UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

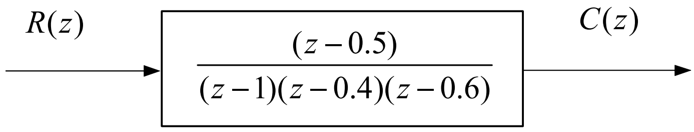
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

28/11/03

PARTE A - I

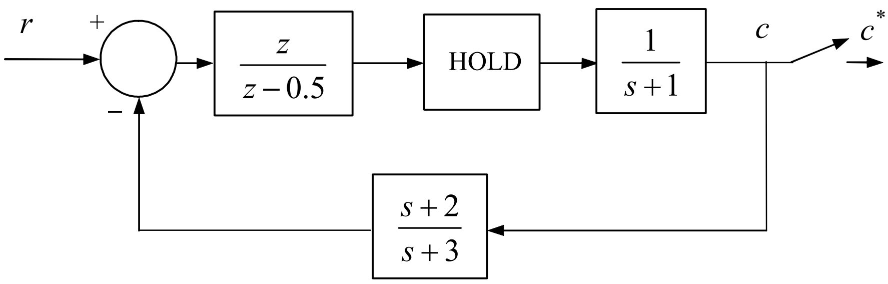
a) Sia dato il seguente sistema



Si valuti l'evoluzione libera dell'uscita $c(k)$ del sistema utilizzando l'integrale di inversione, sapendo che le condizioni iniziali per l'uscita sono:

$c(0)=2$; $c(1)=2$; $c(2)=2$.

b) Sia dato il seguente sistema chiuso in retroazione:



Sapendo che il tempo di campionamento del sistema è $T=1\mathrm{s}$ si chiede di valutare la funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso r e l'uscita c^*;

(Suggerimento: $Z\left\{\frac{1}{s+a}\right\}=\frac{z}{z-e^{-aT}}$; $Z\left\{\frac{1}{s}\right\}=\frac{z}{z-1}$)

Quesito a:

Sviluppando la funzione di trasferimento si ottiene

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{(z-0.5)}{(z-1)(z-0.4)(z-0.6)}$$

$$C(z)\left[(z-1)(z^2-z+0.24)\right] = R(z)(z-0.5)$$

$$C(z)\left[z^3-2z^2+1.24z-0.24\right] = R(z)(z-0.5)$$

che antitrasformando restituisce l'equazione alle differenze del sistema

$$c(k+3)-2\,c(k+2)+1.24\,c(k+1)-0.24\,c(k) = r(k+1)-0.5\,r(k)\ .$$

Trasformando questa relazione tenendo conto delle condizioni iniziali e del fatto che è stata richiesta la risposta libera del sistema ($r(k)=0,\ \forall k \geq 0$) si ottiene

$$C(z)\,z^3 - c(0)\,z^3 - c(1)\,z^2 - c(2)\,z - 2\,C(z)\,z^2 + 2\,c(0)\,z^2 + 2\,c(1)\,z + 1.24\,C(z)\,z - 1.24\,c(0)\,z - 0.24\,C(z) = 0$$

$$C(z)\left[z^3-2z^2+1.24z-0.24\right] - 2\,z^3 - 2\,z^2 - 2\,z + 4\,z^2 + 4\,z - 2.48\,z = 0$$

$$C(z)\left[z^3-2z^2+1.24z-0.24\right] = 2\,z^3 - 2\,z^2 + 0.48\,z$$

$$C(z) = 2\frac{z\left(z^2-z+0.24\right)}{z^3-2z^2+1.24z-0.24} = 2\frac{z(z-0.4)(z-0.6)}{(z-1)(z-0.4)(z-0.6)} = 2\frac{z}{(z-1)}$$

Già da questa relazione si vede che la risposta libera del sistema è costituita da una sequenza di impulsi di ampiezza pari a 2. Tuttavia essendo richiesta l'antitrasformazione mediante l'integrale di inversione si sviluppano gli ultimi calcoli

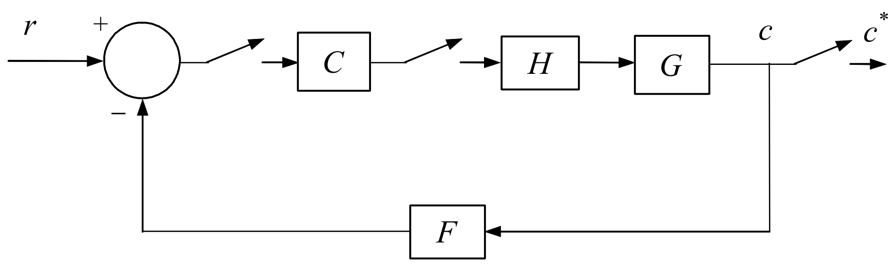
$$C(z)\,z^{k-1} = 2\frac{z^k}{(z-1)}\,.$$

La relazione trovata ammette sempre lo stesso numero di poli per ogni $k \geq 0$ e pertanto è necessario considerare un solo singolo caso

$$c(k) = (z-1)C(z)\,z^{k-1}\Big|_{z=1} = 2(z-1)\frac{z^k}{(z-1)}\Bigg|_{z=1} = 2\ .$$

Quesito b:

Si modifica lo schema evidenziando i campionatori



La funzione di trasferimento è del tipo

$$\frac{C}{R}=\frac{CHG}{1+CHGF} \quad \Rightarrow \quad \frac{C(z)}{R(z)}=\frac{C(z)\,HG(z)}{1+C(z)\,HGF(z)}$$

Si calcolano le trasformate dei due termini $HG(z)$ e $GHF(z)$

$$\mathcal{Z}\left\{HG(s)\right\}=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$$

Scomponendo in fratti semplici il termine $\frac{1}{s(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}$ si ottiene

$$A=s\frac{1}{s(s+1)}\bigg|_{s=0}=1$$

$$B=(s+1)\frac{1}{s(s+1)}\bigg|_{s=-1}=-1$$

e pertanto

$$\mathcal{Z}\left\{HG(s)\right\}=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\}=\frac{z-1}{z}\left\{\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}\right\}=(z-1)\left\{\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-e^{-T}}\right\}=$$

$$=(z-1)\left\{\frac{(z-e^{-T})-(z-1)}{(z-1)(z-e^{-T})}\right\}=\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}.$$

Analogamente si avrà

$$\mathcal{Z}\left\{HGF(s)\right\}=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}\right\}.$$

Ancora una volta la scomposizione in fratti semplici del termine $\frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+1)}+\frac{C}{(s+3)}$ rende

$$A=s\frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}\bigg|_{s=0}=\frac{2}{3}$$

$$B=(s+1)\frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}\bigg|_{s=-1}=-\frac{1}{2}$$

$$C=(s+3)\frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}\bigg|_{s=-3}=-\frac{1}{6}$$

e quindi

$$\mathcal{Z}\{HGF(s)\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{2}{3s}-\frac{1}{2(s+1)}-\frac{1}{6(s+3)}\right\} = \frac{z-1}{z}\left\{\frac{2z}{3(z-1)}-\frac{z}{2(z-e^{-T})}-\frac{z}{6(z-e^{-3T})}\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}-\frac{z-1}{2(z-e^{-T})}-\frac{z-1}{6(z-e^{-3T})} = \frac{4(z-e^{-T})(z-e^{-3T})-3(z-1)(z-e^{-3T})-(z-1)(z-e^{-T})}{6(z-e^{-T})(z-e^{-3T})}$$

$$= \frac{4\left[z^2-(e^{-T}+e^{-3T})z+e^{-4T}\right]-3\left[z^2-(1+e^{-3T})z+e^{-3T}\right]-(z^2-(1+e^{-T})z+e^{-T})}{6(z-e^{-T})(z-e^{-3T})}$$

$$= \frac{-4(e^{-T}+e^{-3T})z+4e^{-4T}+3(1+e^{-3T})z-3e^{-3T}+(1+e^{-T})z-e^{-T}}{6(z-e^{-T})(z-e^{-3T})}$$

$$= \frac{(4-3e^{-T}-e^{-3T})z+4e^{-4T}-3e^{-3T}-e^{-T}}{6(z-e^{-T})(z-e^{-3T})}.$$

La funzione di trasferimento complessiva sarà quindi espressa da

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{C(z)\,HG(z)}{1+C(z)\,HGF(z)} = \frac{\dfrac{z}{z-0.5}\,\dfrac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}}{1+\dfrac{z}{z-0.5}\,\dfrac{(4-3e^{-T}-e^{-3T})z+4e^{-4T}-3e^{-3T}-e^{-T}}{6(z-e^{-T})(z-e^{-3T})}}$$

$$= \frac{\dfrac{2z}{2z-1}\,\dfrac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}}{\dfrac{6(2z-1)(z-e^{-T})(z-e^{-3T})+2z\left[(4-3e^{-T}-e^{-3T})z+4e^{-4T}-3e^{-3T}-e^{-T}\right]}{(2z-1)6(z-e^{-T})(z-e^{-3T})}}$$

$$= \frac{6\,z(1-e^{-T})(z-e^{-3T})}{3(2z-1)\left[z^2-(e^{-T}+e^{-3T})z+e^{-4T}\right]+(4-3e^{-T}-e^{-3T})z^2+(4e^{-4T}-3e^{-3T}-e^{-T})z}$$

$$= \frac{6\,z(1-e^{-T})(z-e^{-3T})}{6z^3+(1-9e^{-T}-7e^{-3T})z^2+(2e^{-T}+10e^{-4T})z-3e^{-4T}}.$$

Ricordando che è stato fissato un tempo di campionamento $T=1$ si ottiene il risultato finale

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.6321\,z(z-0.04979)}{z^3-0.4432z^2+0.1532z-0.009158}.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

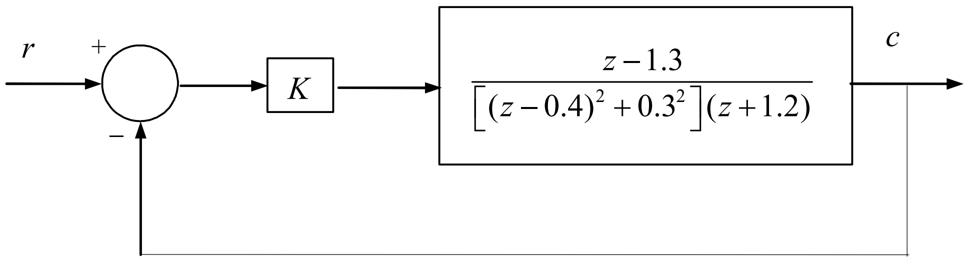
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

28/11/03

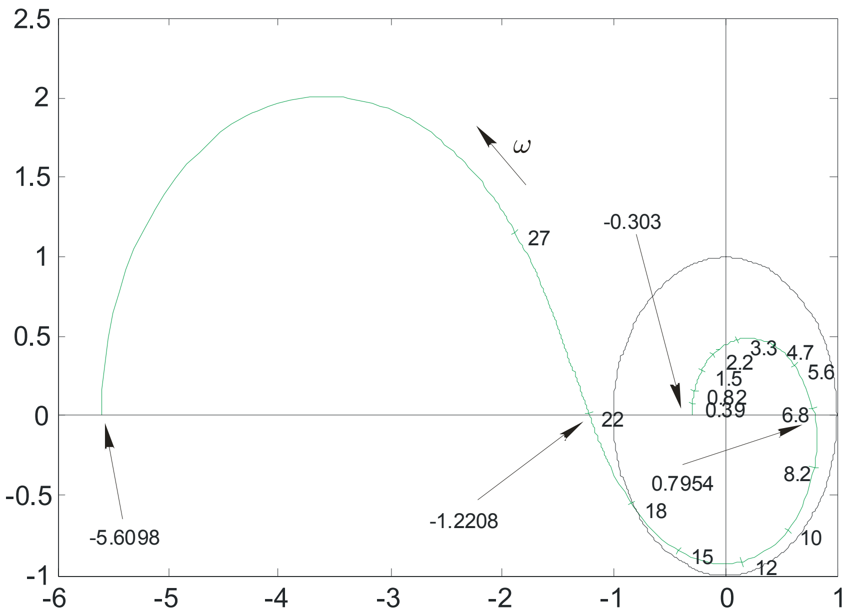
PARTE A - II

Sia dato il seguente sistema in retroazione unitaria



a) Fissato $K=2$ si chiede di valutarne la stabilità asintotica mediante l'uso del criterio di Jury.

b) Sapendo che il diagramma di Nyquist del sistema in catena aperta è quello riportato in figura discutere la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso al variare del parametro $K \in [-\infty, \infty]$.



Quesito a:

Ricaviamo il polinomio caratteristico del sistema per $K = 2$

$$1+2\frac{z-1.3}{\left[(z-0.4)^2+0.3^2\right](z+1.2)}=0$$

$$\left[z^2-0.8z+0.16+0.09\right](z+1.2)+2z-2.6=0$$

$$\left[z^2-0.8z+0.25\right](z+1.2)+2z-2.6=0$$

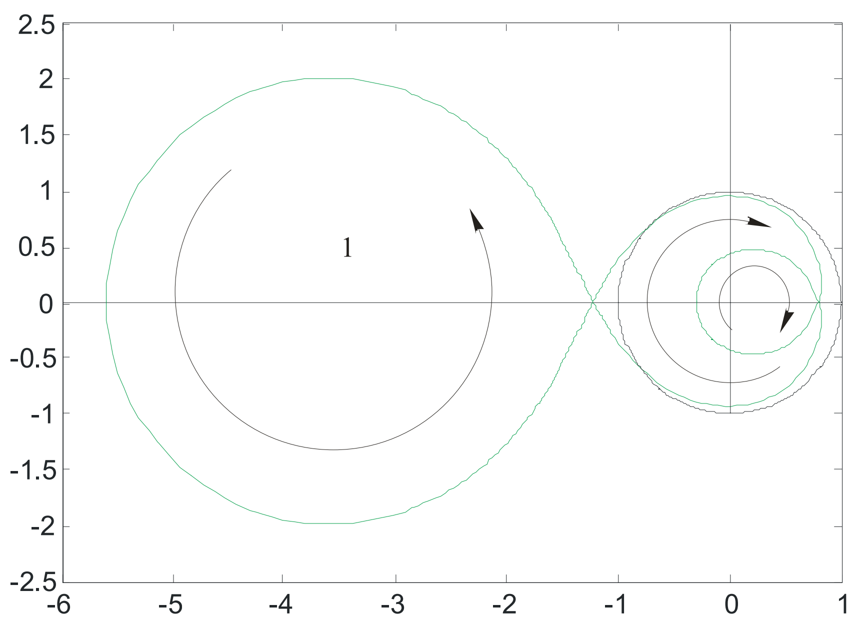
$$z^3-0.8z^2+0.25z+1.2z^2-0.96z+0.3+2z-2.6=0$$

$$z^3+0.4z^2+1.29z-2.3=0$$

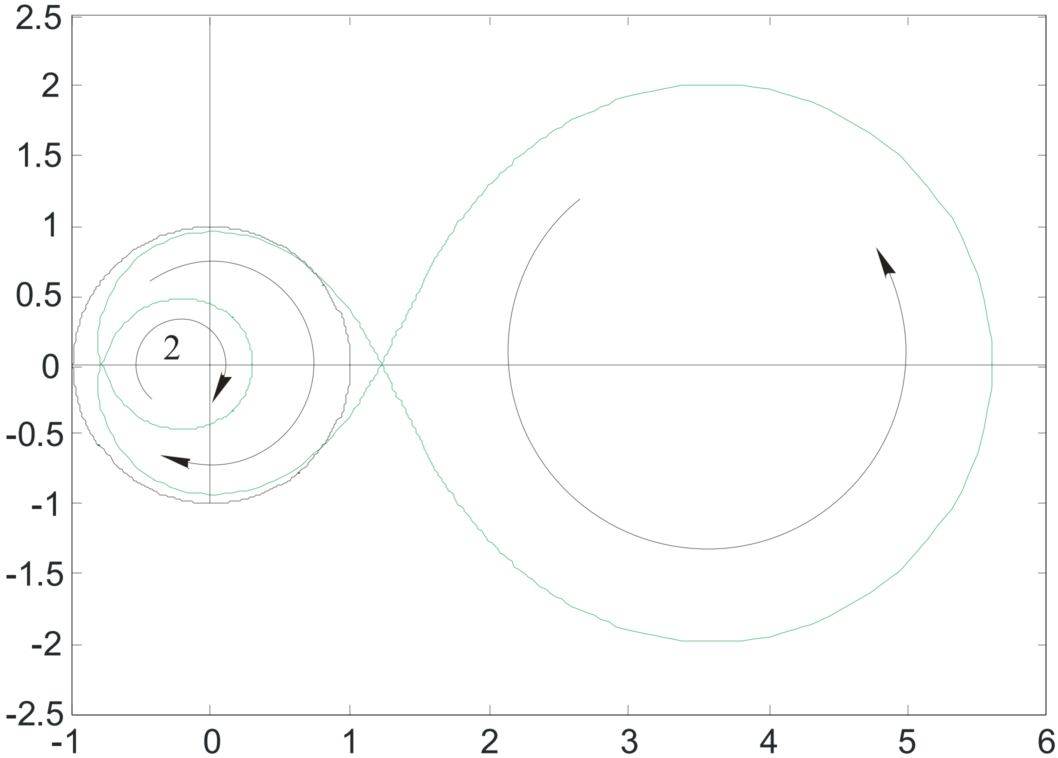
Il termine a_0 è maggiore di zero mentre la condizione $a_0 > |a_n| \quad \Rightarrow \quad 1 > |-2.3|$ non è soddisfatta per cui il sistema risulta instabile. Non è necessario continuare a verificare le altre condizioni.

Quesito b:

Il guadagno di anello del sistema presenta un solo polo al di fuori del cerchio unitario ($z = -1.2$) per cui, per ottenere la stabilità del sistema retroazionato, è necessario che il diagramma polare completo circondi una sola volta il punto critico in senso antiorario. Dalla figura seguente si deduce che ciò si può ottenere, per valori di *K* positivi, facendo cadere il punto critico entro il perimetro indicato con 1. Per far ciò è necessario scalare il grafico modificando il valore di *K*. Si comincia ad avere stabilità per $K < \frac{1}{1.2208} = 0.8191$, mentre il punto critico torna a uscire dal perimetro ammesso per $k < \frac{1}{5.6098} = 0.1783$. Si ha quindi stabilità asintotica per $0.1783 < K < 0.8191$.



Per valori di *K* negativi il diagramma polare diviene



Il punto critico non è circondato per cui il sistema è sicuramente instabile. Se si ingrandisce il grafico aumentando il valore di K accade che il punto critico viene circondato due volte in senso orario (vedi 2) per cui il sistema continua a risultare instabile. In conclusione, il sistema risulta asintoticamente instabile solo per $0.1783 < K < 0.8191$.

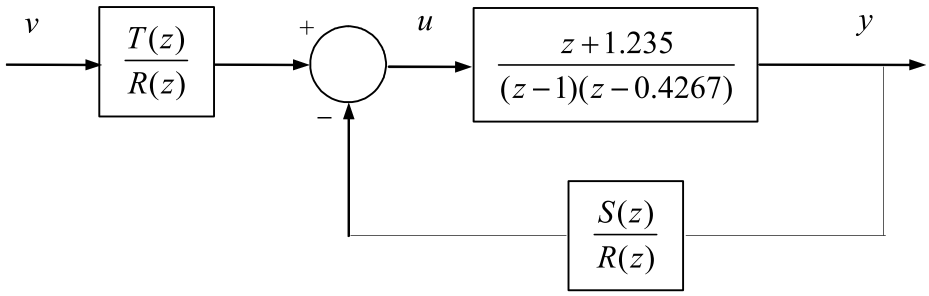
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

28/11/03

PARTE A - III

a) Sia dato il seguente sistema chiuso in retroazione:



Sapendo che il tempo di campionamento del sistema è $T = 0.4\,\mathrm{s}$, si chiede di sintetizzare, mediante la diofantea, i tre polinomi del controllore $R(z), S(z), T(z)$ in modo tale che il sistema controllato soddisfi le seguenti specifiche:

1) Massima sovraelongazione in risposta al gradino S=5%;
2) Tempo di assestamento al 2% in risposta al gradino T_a = 2 s.
3) Il polinomio $R(z)$ non presenti alcun termine integrale;
4) Per ovviare alla possibile presenza di disturbi sull'uscita c il polinomio dell'osservatore A_0 presenti un polo tale da tagliare i disturbi le cui pulsazioni siano superiori a $\omega = 2.5$.

Si valuti se il tempo di campionamento adottato è appropriato.

Soluzione:

Cominciamo fissando la funzione di trasferimento ad anello chiuso che soddisfi le specifiche imposte, ovvero la $G_m(z) = \dfrac{B_m(z)}{A_m(z)}$.

Utilizzando la specifica sulla massima sovraelongazione ricaviamo il δ dei poli dominanti:

$$\delta = \sqrt{\frac{\ln(S/100)^2}{\ln(S/100)^2 + \pi^2}} = \sqrt{\frac{\ln(0.05)^2}{\ln(0.05)^2 + \pi^2}} = 0.6901 .$$

Utilizzando la specifica sul tempo di assestamento al 2% ricaviamo l' ω_n dei poli dominanti:

$$\omega_n = \frac{4}{\delta T_a} = \frac{4}{0.6901 * 2} = 2.8981 .$$

Grazie a queste informazioni siamo in grado di fissare il polinomio caratteristico del sistema retroazionato:

$$Q(z) = z^2 - 2e^{-\delta\omega_n T}\cos\left(\omega_n T\sqrt{1-\delta^2}\right)z + e^{-2\delta\omega_n T} = z^2 - 0.6005z + 0.2019 = z^2 + p_1 z + p_0 .$$

Per poter definire completamente la $G_m(z)$ occorre decidere quale parte di $B(z)$ sia cancellabile:

$B^- = z + 1.235 = z + b_1$

$B^+ = 1$

Vista la scelta appena fatta avremo

$$G_m(z) = \frac{Q(1)B^-(z)}{B^-(1)Q(z)}z^k = \frac{0.4197}{2.235}\frac{z+1.235}{z^2 - 0.6005z + 0.2019} = 0.1878\frac{z+1.235}{z^2 - 0.6005z + 0.2019} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} .$$

Si noti che è stato fissato $k = 0$ in modo che il grado relativo della $G_m(z)$ sia lo stesso dell'impianto da controllare.

Indichiamo con $A(z)$ il denominatore del sistema di partenza:

$A(z) = z^2 + a_1 z + a_0 = z^2 - 1.427z + 0.4267$

Calcoliamo i gradi dell'equazione Diofantea

La richiesta della presenza di un termine integrale in $R(z)$ impone di fissare $q = 1$.

grado(S)=grado(A)+q-1=2+0-1=1

grado(R")= grado(A) - grado(B^+)-1=2-0-1=1

grado(A_0)= 2 grado(A) - grado(B^+) - grado(A_m)+q-1=4-0-2-1=1.

Prima di poter impostare la diofantea è necessario fissare anche il polinomio $A_0(z)$. Poiché si vuole introdurre un polo dell'osservatore che filtri le pulsazioni superiori a $\omega = 2.5$ si impone per $A_0(z)$ un comportamento analogo a un polinomio del tipo $A_0(s) = (s+\omega) = (s+2.5)$. Di conseguenza l'equivalente discreto sarà

$A_0(z) = z - e^{-\omega T} = z - e^{-2.5 \bullet 0.4} = z - 0.3679 = z + p_2$.

L'equazione diofantea sarà del tipo:

$A(z)R''(z)(z-1) + B^-(z)S(z) = A_0(z)A_m(z)$

$(z^2 + a_1 z + a_0)(r_0 + r_1 z) + (z + b_1)(s_0 + s_1 z) = (z + p_2)\left(z^2 + p_1 z + p_0\right)$

$r_1 z^3 + (a_1 r_1 + r_0 + s_1)z^2 + (a_0 r_1 + a_1 r_0 + b_1 s_1 + s_0)z + a_0 r_0 + b_1 s_0 = z^3 + (p_1 + p_2)z^2 + (p_1 p_2 + p_0)z + p_0 p_2$

che può essere risolto attraverso il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ a_1 r_1 + r_0 + s_1 = p_1 + p_2 \\ a_0 r_1 + a_1 r_0 + b_1 s_1 + s_0 = p_1 p_2 + p_0 \\ a_0 r_0 + b_1 s_0 = p_0 p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ b_1 s_1 = b_1 (p_1 + p_2 - a_1) - b_1 r_0 \\ a_0 + a_1 r_0 + b_1 (p_1 + p_2 - a_1) - b_1 r_0 + s_0 = p_1 p_2 + p_0 \\ b_1 s_0 = p_0 p_2 - a_0 r_0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ b_1 s_1 = b_1 (p_1 + p_2 - a_1) - b_1 r_0 \\ b_1 a_0 + b_1 (a_1 - b_1) r_0 + b_1^2 (p_1 + p_2 - a_1) + b_1 s_0 = (p_1 p_2 + p_0) b_1 \\ b_1 s_0 = p_0 p_2 - a_0 r_0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ b_1 s_1 = b_1 (p_1 + p_2 - a_1) - b_1 r_0 \\ \left[b_1 (a_1 - b_1) - a_0 \right] r_0 = (p_1 p_2 + p_0 - a_0) b_1 - b_1^2 (p_1 + p_2 - a_1) - p_0 p_2 \\ b_1 s_0 = p_0 p_2 - a_0 r_0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 = \dfrac{(p_1 p_2 + p_0 - a_0) b_1 - b_1^2 (p_1 + p_2 - a_1) - p_0 p_2}{b_1 (a_1 - b_1) - a_0} \\ s_1 = p_1 + p_2 - a_1 - r_0 \\ s_0 = \dfrac{p_0 p_2 - a_0 r_0}{b_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 = 0.1695 \\ s_1 = 0.2888 \\ s_0 = -0.1187 \end{cases}$$

Il polinomio $R(z)$ varrà dunque

$R(z) = R''(z) B^+(z) = z + 0.1695$.

Manca ancora il calcolo di T. Sappiamo che

$B_m(z) = B^-(z) B_m^{'}(z) = (z + 1.235) B_m^{'}(z) = 0.1878 (z + 1.235)$.

Di conseguenza

$T = B_m^{'}(z) A_0(z) = 0.1878\,(z - 0.3679)$.

L'equazione del regolatore sarà dunque

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)} V(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z) = 0.1878 \frac{z - 0.3679}{z + 0.1695} V(z) + \frac{0.2888 z - 0.1187}{z + 0.1695} Y(z)$$

$$U(z^{-1}) = 0.1878 \frac{1 - 0.3679\, z^{-1}}{1 + 0.1695\, z^{-1}} V(z^{-1}) + \frac{0.2888 - 0.1187\, z^{-1}}{1 + 0.1695\, z^{-1}} Y(z^{-1})$$

che, antitrasformata, rende

$u(k) = -0.1695\, u(k-1) + 0.1878\, v(k) - 0.0691\, v(k-1) + 0.2888\, y(k) - 0.1187\, y(k-1)$.

La specifica sul polinomio dell'osservatore $A_0(z)$ impone di fissare un polo in corrispondenza della pulsazione $\omega = 2.5$. Tale pulsazione è al di sotto della pulsazione di Nyquist $\pi / T = 3.1415 / 0.4 = 7.8540$ per cui la dinamica dell'osservatore è implementabile con il tempo di campionamento scelto. Per finire, il tempo di campionamento risulta assolutamente compatibile con il tempo di assestamento assegnato: ciò garantisce implicitamente che la dinamica dei poli di $G_m(z)$ risulterà implementabile.