UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

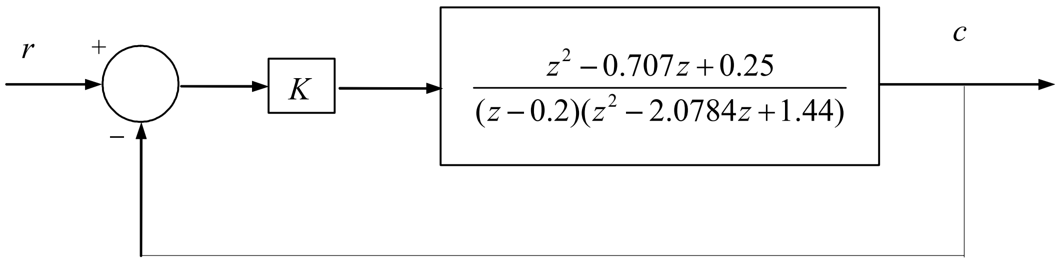
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

6/12/02

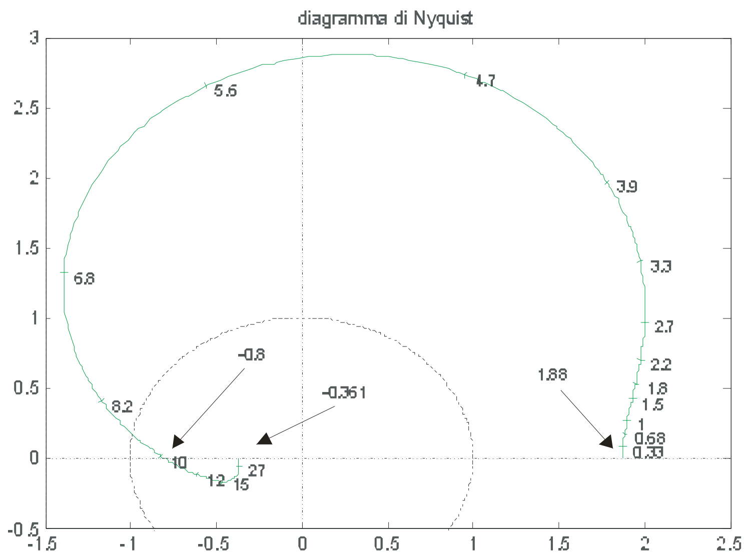
PARTE I

Sia dato il seguente sistema in retroazione unitaria



a) Posto K=2, si chiede di valutarne la stabilità asintotica mediante il criterio di Jury.

b) Il diagramma di Nyquist della funzione di risposta armonica in catena aperta, tracciato per K=1 e tempo di campionamento T=0.1, è rappresentato dal seguente grafico



Si chiede di discutere la stabilità del sistema in funzione di $K \in [-\infty, \infty]$ sapendo che il sistema in catena aperta ha due poli a modulo maggiore di uno.

Soluzione Parte I

a) Posto $K = 2$ l'equazione caratteristica del sistema sarà

$$1+2\frac{z^2-0.707z+0.25}{(z-0.2)(z^2-2.0784z+1.44)}=0\,.$$

Facendo il minimo comune multiplo si ottiene il polinomio caratteristico associato al sistema retroazionato

$$z^3 - 0.2784z^2 + 0.4417z + 0.2120 = 0\,.$$

Passando alla verifica di stabilità mediante il criterio di Jury si ottiene immediatamente che

1) $a_0 > |a_n| \Rightarrow 1 > 0.212$ √

2) $P(z)\big|_{z=1} > 0 \Rightarrow 1.3753 > 0$ √

3) $P(z)\big|_{z=-1} < 0$ (il polinomio è dispari) $\Rightarrow -1.5081 < 0$ √

Visto che le prime tre condizioni risultano verificate si passa a costruire la tabella di Jury

1	0.2120	0.4417	0.2784	1
2	1	0.2784	0.4417	0.2120
3	-0.9551	0.3720	-0.5007	
4	-0.5007	0.3720	-0.9551	

4) $|b_{n-1}| > |b_0| \Rightarrow 0.9551 > 0.5007$ √

Il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile per $K = 2$.

b) Visto che il sistema in catena aperta possiede due poli a fase non minima, il sistema complessivo retroazionato risulterà stabile solo nel caso in cui il diagramma polare completo circonderà due volte il punto critico $-1+j0$ in senso antiorario. E' immediato constatare dal grafico che per $K=1$ il punto critico non verrà circondato per cui il sistema retroazionato risulterà instabile. Anche per valori di K compresi tra 0 e 1 il punto critico non verrà mai circondato (il grafico complessivo subisce una contrazione al diminuire del K per cui il punto critico non verrà mai raggiunto). Al crescere del K, invece, il grafico si espande fino ad arrivare a toccare il punto critico. Visto che tale espansione dipende linearmente dal K basta fare una proporzione per ottenere il valore di K che permette di toccare il punto critico: il grafico passa per -0.8 per $K=1$, quanto deve valere il K perché il grafico passi per -1?

$$-0.8:1=-1:\bar{K} \Rightarrow \bar{K}=\frac{1}{0.8}=1.25$$

A partire da $K=\bar{K}$ il punto critico sarà circondato due volte in senso antiorario per cui il circuito retroazionato risulterà stabile. Facendo crescere ulteriormente K si ha che il punto "a" del grafico viene a toccare il punto critico. Calcoliamo il valore di K per cui si ha questa condizione:

$$-0.361:1=-1:\tilde{K} \Rightarrow \tilde{K}=\frac{1}{0.361}=2.7701\,.$$

Per $K > \tilde{K}$ il punto critico verrà circondato una sola volta in senso antiorario per cui il sistema retroazionato risulterà instabile. Per valori di K negativi il diagramma di Nyquist completo non potrà mai circondare due volte in senso antiorario il punto critico (si osservi la figura tracciata per K=-1).
In conclusione il circuito retroazionato risulta asintoticamente stabile per

$$1.25 < K < 2.7701\,.$$

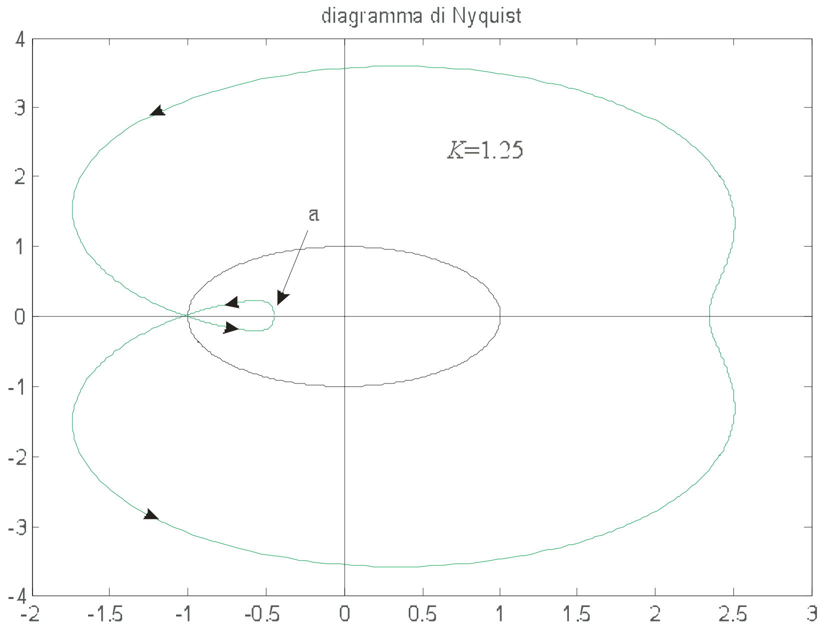


diagramma di Nyquist
K=1.25
a

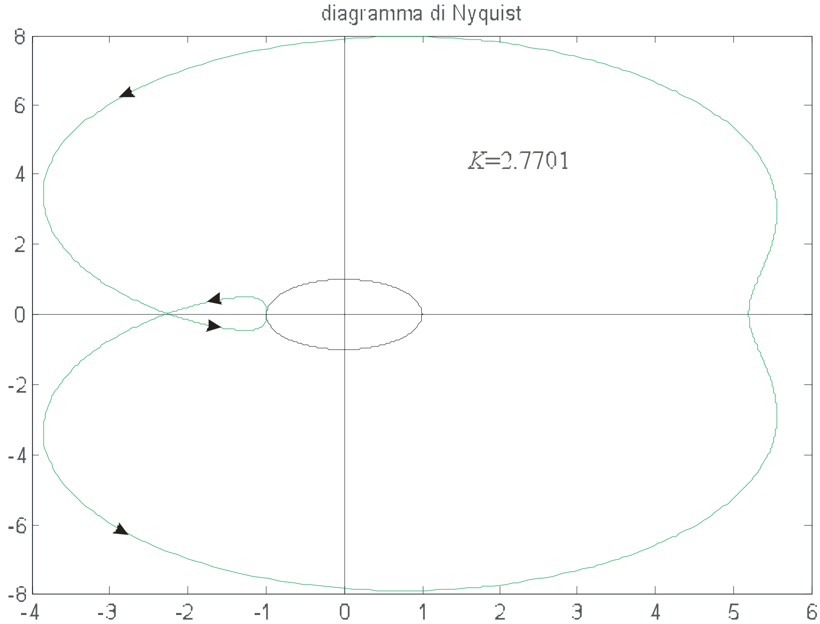


diagramma di Nyquist
K=2.7701

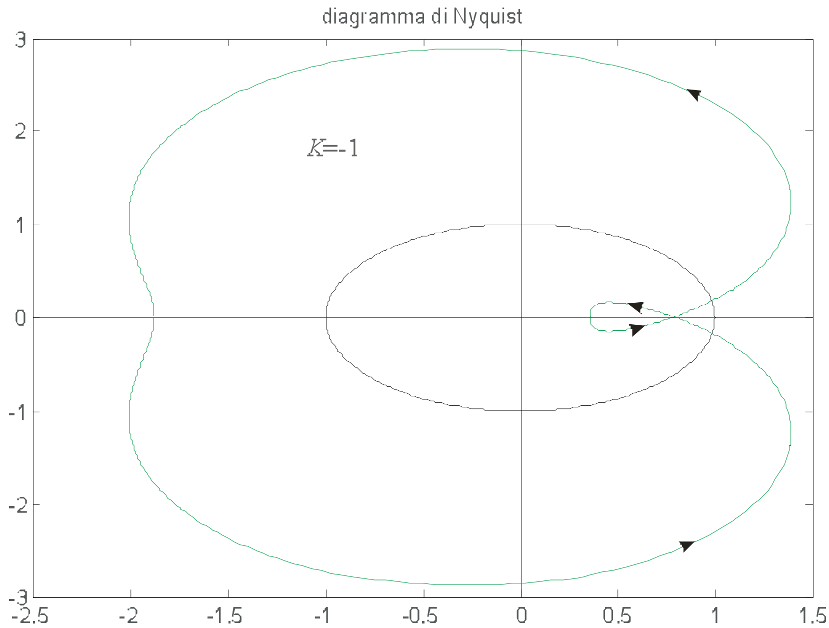


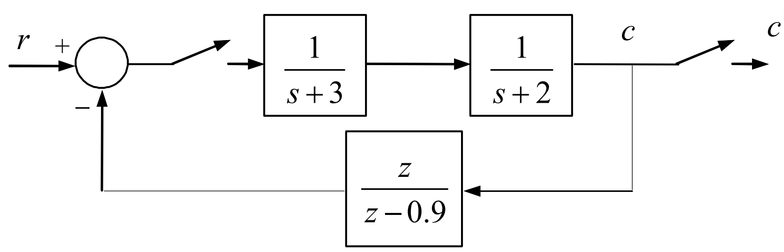
diagramma di Nyquist
K=-1

Prova scritta di "Controlli Digitali"

6/12/02

PARTE II

Sia dato il seguente sistema chiuso in retroazione

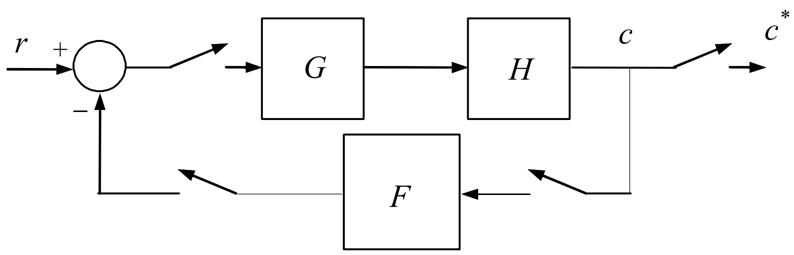


Si valuti la funzione di trasferimento discreta del sistema assumendo un tempo di campionamento T=0.1 s.

(Suggerimento: $Z\left\{\dfrac{1}{s+a}\right\}=\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$)

Soluzione Parte II

Come primo passo ridisegnamo lo schema, aggiungendo i campionatori all'ingresso e all'uscita di tutti i blocchi discreti e sostituendo i vari blocchi con delle lettere



La relazione tra ingresso e uscita sarà del tipo

$$C = \frac{GHR}{1+GHF}.$$

Passando alle Z-trasformate notiamo che tra i blocchi G e H non vi è alcun campionatore e quindi i due blocchi andranno accorpati tra loro al momento di calcolarne la funzione di trasferimento discreta. R entra nel blocco G attraverso un campionatore così come F risulta collegata a G ed H attraverso dei campionatori: R ed F non vanno accorpati agli altri due blocchi.

In conclusione la relazione ingresso-uscita del sistema retroazionato sarà del tipo

$$C(z) = \frac{HG(z)}{1+HG(z)F(z)} R(z) = G_0(z)R(z).$$

Calcoliamo $HG(z)$

$$HG(z) = Z\left\{\frac{1}{s+2}\frac{1}{s+3}\right\} = Z\left\{\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\right\} = \frac{z}{z-e^{-2T}} - \frac{z}{z-e^{-3T}} =$$

$$= \frac{z(z-e^{-3T}) - z(z-e^{-2T})}{(z-e^{-2T})(z-e^{-3T})} = \frac{z(e^{-2T}-e^{-3T})}{(z-e^{-2T})(z-e^{-3T})}$$

Passiamo alla $G_0(z)$

$$G_0(z) = \frac{\dfrac{z(e^{-2T}-e^{-3T})}{(z-e^{-2T})(z-e^{-3T})}}{1+\dfrac{z(e^{-2T}-e^{-3T})z}{(z-e^{-2T})(z-e^{-3T})(z-0.9)}}$$

$$= \frac{z(e^{-2T}-e^{-3T})(z-0.9)}{(z-e^{-2T})(z-e^{-3T})(z-0.9)+z^2(e^{-2T}-e^{-3T})}$$

$$= \frac{z(e^{-2T}-e^{-3T})(z-0.9)}{(z^2-(e^{-2T}+e^{-3T})z+e^{-5T})(z-0.9)+z^2(e^{-2T}-e^{-3T})}$$

$$= \frac{z(e^{-2T}-e^{-3T})(z-0.9)}{z^3 - z^2(e^{-2T}+e^{-3T}-e^{-2T}+e^{-3T}-0.9) + z(e^{-5T}+0.9(e^{-2T}+e^{-3T})) - 0.9e^{-5T}}$$

Sostituendo T=0.1 si ottiene

$$G_0(z) = \frac{0.07791\, z(z-0.9)}{z^3 - 2.3816z^2 + 2.0101z - 0.5459}.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

6/12/02

PARTE III

Sia dato il seguente sistema

$$R(z) \longrightarrow \boxed{\dfrac{z}{(z-0.9)^2(z-0.8)}} \longrightarrow C(z)$$

Si valuti l'evoluzione totale dell'uscita $c(k)$ del sistema (risposta libera + risposta forzata) sapendo che il segnale di ingresso è costituito da un gradino unitario e che le condizioni iniziali per l'uscita sono:

$c(0)=0$; $c(1)=1$; $c(2)=1$.

(Suggerimento: $Z^{-1}\left\{\dfrac{az}{(z-a)^2}\right\} = ka^k$; $Z^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-a}\right\} = a^k$)

Soluzione Parte III

Si ricava come primo passo l'equazione alle differenze del sistema

$$C(z) = \frac{z}{(z-0.9)(z-0.8)} R(z)$$

$$C(z)\left[(z-1.8z+0.81)(z-0.8)\right] = zR(z)$$

$$C(z)(z^3 - 2.6z^2 + 2.25z - 0.6480) = zR(z)$$

$$\Downarrow \quad \text{antitrasformando}$$

$$c(k+3) - 2.6c(k+2) + 2.25c(k+1) - 0.6480c(k) = r(k+1)$$

Si ritrasformi il sistema tenendo conto anche della presenza delle condizioni iniziali

$$z^3C(z) - z^3c(0) - z^2c(1) - z\,c(2) - 2.6z^2C(z) + 2.6z^2c(0) + 2.6z\,c(1) + 2.25zC(z) - 2.25zc(0) - 0.6480C(z) =$$
$$= z\,R(z) - z\,r(0)$$

Il valore di $r(0)$ lo otteniamo sapendo che in ingresso sarà presente un gradino unitario: $r(0) = 1$.
Fatte le debite sostituzioni ed evidenziando i termini dipendenti da $C(z)$ si ottiene

$$C(z)\left[z^3 - 2.6z^2 + 2.25z - 0.6480\right] = z^2 - 2.6z + z\,R(z)$$

$$C(z)(z-0.9)^2(z-0.8) = z^2 - 2.6z + z\,R(z)$$

$$C(z) = \frac{z\,R(z)}{(z-0.9)^2(z-0.8)} + \frac{z(z-2.6)}{(z-0.9)^2(z-0.8)}$$

Tenendo conto che la trasformata del gradino unitario è data da $R(z) = \dfrac{z}{z-1}$ si ricava

$$C(z) = \frac{z^2}{(z-0.9)^2(z-0.8)(z-1)} + \frac{z(z-2.6)}{(z-0.9)^2(z-0.8)}$$

$$C(z) = \frac{z^2 + z(z-2.6)(z-1)}{(z-0.9)^2(z-0.8)(z-1)} = \frac{z(z^2 - 2.6z + 2.6)}{(z-0.9)^2(z-0.8)(z-1)}$$

Procedendo tramite la scomposizione in fratti semplici si ricava

$$C(z) = -\frac{107z}{(z-0.9)^2} + \frac{80z}{z-0.9} - \frac{580z}{z-0.8} + \frac{500z}{z-1}.$$

Utilizzando le espressioni suggerite per l'antitrasformazione si ottiene infine

$$c(k) = -118.89 \cdot k \cdot 0.9^k + 80 \cdot 0.9^k - 580 \cdot 0.8^k + 500.$$