UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

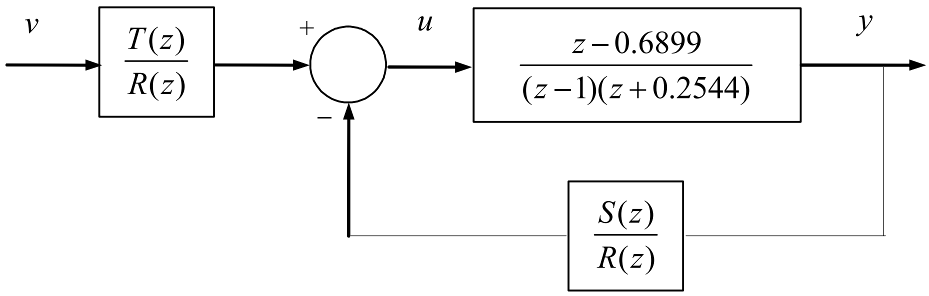
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

9/6/04

PARTE I

Sia dato il seguente sistema chiuso in retroazione:



Sapendo che il tempo di campionamento del sistema è $T = 0.2\,\mathrm{s}$, si chiede di sintetizzare, mediante la diofantea, i tre polinomi del controllore $R(z), S(z), T(z)$ in modo tale che il sistema controllato soddisfi le seguenti specifiche:

1) Massima sovraelongazione in risposta al gradino S=5%;
2) Tempo di massima sovraelongazione in risposta al gradino T_m = 0.5 s.
3) Per ovviare alla possibile presenza di disturbi sull'uscita y il polinomio dell'osservatore A_0 presenti un polo tale da tagliare i disturbi le cui pulsazioni siano superiori a $\omega = 5$.
4) Sempre per ragioni relative alla presenza di disturbi, il polinomio $S(z)$ contenga uno zero con un comportamento analogo a quello di uno zero nel continuo posto in -7, ovvero contenga uno zero con comportamento analogo a quello del termine (s+7).

Si valuti se il tempo di campionamento adottato è appropriato.

Soluzione Parte I

Cominciamo fissando la funzione di trasferimento ad anello chiuso che soddisfi le specifiche imposte, ovvero la $G_m(z) = \dfrac{B_m(z)}{A_m(z)}$.

Utilizzando la specifica sulla massima sovraelongazione ricaviamo il δ dei poli dominanti:

$$\delta = \sqrt{\frac{\ln(S/100)^2}{\ln(S/100)^2 + \pi^2}} = \sqrt{\frac{\ln^2(0.05)}{\ln^2(0.05) + \pi^2}} = 0.6901 .$$

Utilizzando la specifica sul tempo di massima sovraelongazione si ricava l' ω_n dei poli dominanti:

$$\omega_n = \frac{\pi}{T_m\sqrt{1-\delta^2}} = \frac{\pi}{0.5\sqrt{1-0.6901^2}} = 8.6819 .$$

Grazie a queste informazioni siamo in grado di fissare il polinomio caratteristico del sistema retroazionato:

$$Q(z) = z^2 - 2e^{-\delta\omega_n T}\cos\left(\omega_n T\sqrt{1-\delta^2}\right)z + e^{-2\delta\omega_n T} = z^2 - 0.1865z + 0.0910 = z^2 + p_1 z + p_0 .$$

Per poter definire completamente la $G_m(z)$ occorre decidere quale parte di $B(z)$ sia cancellabile:

$B^- = 1$

$B^+ = z - 0.6899$

Vista la scelta appena fatta avremo

$$G_m(z) = \frac{Q(1)B^-(z)}{B^-(1)Q(z)}z^k = \frac{1+p_1+p_0}{z^2+p_1 z+p_0}z = \frac{1-0.1865+0.0910}{z^2-0.1865z+0.0910}z = \frac{0.9046z}{z^2-0.1865z+0.0910} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} .$$

Si noti che è stato fissato $k=1$ in modo che il grado relativo della $G_m(z)$ sia lo stesso dell'impianto da controllare.

Calcoliamo i gradi dell'equazione Diofantea
Non essendo richiesto alcun termine integrale in $R(z)$ si fissa $q=0$.
grado(S)=grado(A)+q-1=2+0-1=1
grado(R")= grado(A) - grado(B^+)-1=2-1-1=0
grado(A_0)= 2 grado(A) - grado(B^+) - grado(A_m)+q-1=4-1-2+0-1=0.
Per poter assegnare il polo dell'osservatore richiesto, si pone il problema di elevare il grado di $A_0(z)$.
E' noto che in questo caso risulta necessario elevare anche il grado di *R"*, per bilanciare i gradi dell'equazione Diofantea. Si adotteranno pertanto i seguenti gradi
grado(A_0) = 1;
grado(*R"*) = 1.
Il grado di *S* potrebbe essere lasciato immutato ma, per poter imporre lo zero richiesto dalle specifiche, si rende necessario elevare anche il grado di quest'ultimo polinomio e pertanto si adotterà
grado(S) = 2
Per poter impostare la diofantea è necessario fissare il polinomio $A_0(z)$. Poiché si vuole introdurre un polo dell'osservatore che filtri le pulsazioni superiori a $\omega = 5$ si impone per $A_0(z)$ un comportamento analogo a un polinomio del tipo $A_0(s) = (s+\omega) = (s+5)$. Di conseguenza l'equivalente discreto sarà

$$A_0(z) = z - e^{-\omega T} = z - e^{-5\cdot 0.2} = z - 0.3679 = z + p_2 .$$

Lo stesso problema si presenta per lo zero di *S* che è stato imposto: il polinomio dovrà contenere uno zero con un comportamento analogo a quello di uno zero nel continuo posto in -7. Il polinomio S avrà quindi la seguente struttura:

$$S(z) = (s_1 z + s_0)(z - e^{-\omega T}) = (s_1 z + s_0)(z - e^{-7\cdot 0.2}) = (s_1 z + s_0)(z - 0.2466) = (s_1 z + s_0)(z + p_3)$$

L'equazione diofantea sarà del tipo:

$$A(z)R''(z)(z-1)^q + B^-(z)S(z) = A_0(z)A_m(z)$$
$$(z^2 + a_1 z + a_0)(r_1 z + r_0) + (s_1 z + s_0)(z + p_3) = (z + p_2)\left(z^2 + p_1 z + p_0\right)$$
$$r_1 z^3 + (r_0 + a_1 r_1)z^2 + (a_1 r_0 + a_0 r_1)z + a_0 r_0 + s_1 z^2 + (s_1 p_3 + s_0)z + s_0 p_3 = z^3 + (p_2 + p_1)z^2 + (p_1 p_2 + p_0)z + p_2 p_0$$
e può essere risolta attraverso il seguente sistema lineare:
$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 + a_1 r_1 + s_1 = p_1 + p_2 \\ a_1 r_0 + a_0 r_1 + s_1 p_3 + s_0 = p_1 p_2 + p_0 \\ a_0 r_0 + s_0 p_3 = p_0 p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 = p_1 + p_2 - a_1 - s_1 \\ a_1 r_0 + a_0 + s_1 p_3 + s_0 = p_1 p_2 + p_0 \\ a_0 r_0 + s_0 p_3 = p_0 p_2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 = p_1 + p_2 - a_1 - s_1 \\ a_1(p_1 + p_2 - a_1 - s_1) + a_0 + s_1 p_3 + s_0 = p_1 p_2 + p_0 \\ a_0(p_1 + p_2 - a_1 - s_1) + s_0 p_3 = p_0 p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 = p_1 + p_2 - a_1 - s_1 \\ s_0 = p_1 p_2 + p_0 - a_1(p_1 + p_2 - a_1) - a_0 - s_1(p_3 - a_1) \\ a_0(p_1 + p_2 - a_1) - a_0 s_1 + s_0 p_3 = p_0 p_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 = p_1 + p_2 - a_1 - s_1 \\ s_0 = p_1 p_2 + p_0 - a_1(p_1 + p_2 - a_1) - a_0 - s_1(p_3 - a_1) \\ a_0(p_1 + p_2 - a_1) - a_0 s_1 + [p_1 p_2 + p_0 - a_1(p_1 + p_2 - a_1) - a_0]p_3 - s_1(p_3 - a_1)p_3 = p_0 p_2 \end{cases}$$
Dall'ultima relazione attraverso un semplice passaggio si ricava
$$s_1 = \frac{a_0(p_1 + p_2 - a_1) + [p_1 p_2 + p_0 - a_1(p_1 + p_2 - a_1) - a_0]p_3 - p_0 p_2}{a_0 + (p_3 - a_1)p_3} = 0.4038$$
mentre
$$r_0 = p_1 + p_2 - a_1 - s_1 = -0.2126$$
e
$$s_0 = \frac{p_0 p_2 - a_0 r_0}{p_3} = 0.3551$$
Il polinomio $R(z)$ varrà dunque
$$R(z) = R''(z)B^+(z) = (z - 0.2126)(z - 0.6899)\,.$$
Manca ancora il calcolo di $T(z)$. Sappiamo che $B_m(z) = B^-(z)B_m^{'}(z) = B_m^{'}(z) = 0.9046z$. Di conseguenza
$$T(z) = B_m^{'}(z)A_0(z) = 0.9046z\,(z - 0.3679) = 0.9046z^2 - 0.3328z\,.$$
L'equazione del regolatore sarà dunque
$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)}V(z) - \frac{S(z)}{R(z)}Y(z) = \frac{0.9046z^2 - 0.3328z}{(z - 0.2126)(z - 0.6899)}V(z) + \frac{(0.4038z + 0.3551)(z - 0.2466)}{(z - 0.2126)(z - 0.6899)}Y(z)$$
$$U(z^{-1}) = \frac{0.9046 - 0.3328z^{-1}}{(1 - 0.2126z^{-1})(1 - 0.6899z^{-1})}V(z^{-1}) + \frac{(0.4038 + 0.3551z^{-1})(1 - 0.2466z^{-1})}{(1 - 0.2126z^{-1})(1 - 0.6899z^{-1})}Y(z^{-1})$$
che, antitrasformata, rende
$$u(k) = 0{,}9025u(k-1) - 0.1467u(k-2) + 0.9046v(k) - 0.3328v(k-1)$$
$$+0.4038y(k) + 0.2358y(k-1) - 0.0876y(k-2).$$
La specifica sul polinomio dell'osservatore $A_0(z)$ impone di fissare un polo in corrispondenza della pulsazione $\omega = 5$ mentre la specifica su $S(z)$ impone di fissare un polo in corrispondenza della pulsazione $\omega = 7$. Quest'ultima pulsazione risulta essere troppo vicina alla pulsazione di Nyquist $\pi / T = 3.1415/0.2 = 15.71$ per cui il comportamento dinamico del regolatore potrebbe non essere esattamente quello atteso.

Tuttavia vi e' un ulteriore polo che è stato allocato dalla diofantea in una posizione ancora peggiore. Si osservi che nel regolatore compare un polo in $z-0.2126$, corrispondente ad un modo la cui pulsazione caratteristica risulta essere $\omega = 7.74$. La presenza di tale modo è causata dall'aver adottato un tempo di campionamento non compatibile con il tempo di massima sovraelongazione assegnato: durante la fase di transitorio cade praticamente un solo istante di campionamento. Tutte queste constatazioni portano ad affermare che il tempo di campionamento dovrebbe essere abbassato.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PARMA

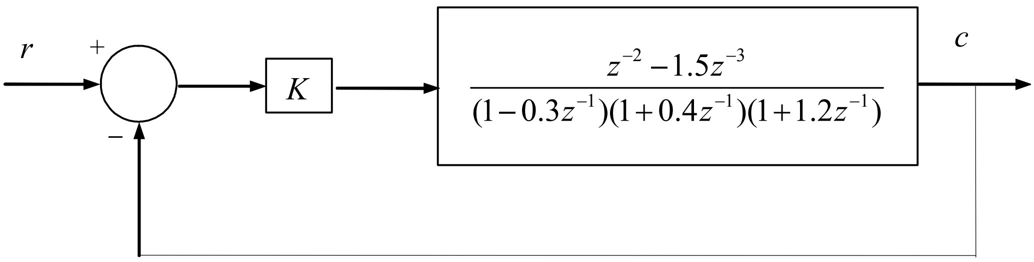
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

09/06/04

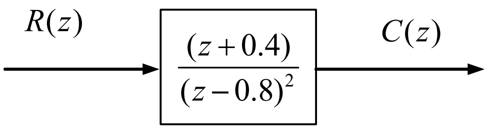
PARTE II

a) Sia dato il seguente sistema in retroazione unitaria



Si chiede di valutarne la stabilità asintotica mediante l'uso della bilineare e del criterio di Routh-Hurwitz al variare del parametro $K \in [-\infty, \infty]$.

b) Sia dato il seguente sistema



Si valuti l'evoluzione totale dell'uscita $c(k)$ del sistema sapendo che le condizioni iniziali per l'uscita sono $c(0)=1$; $c(1)=1$ e che in ingresso al sistema è presente una sequenza di impulsi la cui ampiezza è pari a due (ovvero $r(k)=2\ h(k)$).

(Suggerimento: $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{az}{(z-a)^2}\right\} = ka^k$; $\quad \mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-a}\right\} = a^k$)

Soluzione Parte II

Quesito a:

Trasformiamo la funzione di trasferimento passando alla rappresentazione in z

$$\frac{z^{-2}-1.5z^{-3}}{(1-0.3z^{-1})(1+0.4z^{-1})(1+1.2z^{-1})}\frac{z^3}{z^3}=\frac{z-1.5}{(z-0.3)(z+0.4)(z+1.2)}$$

Ricaviamo il polinomio caratteristico del sistema

$$1+K\frac{z-1.5}{(z-0.3)(z+0.4)(z+1.2)}=0$$

$$(z^2+0.1z-0.12)(z+1.2)+Kz-1.5K=0$$

$$(z^3+1.3z^2-0.144)+Kz-1.5K=0$$

$$z^3+1.3z^2+Kz-0.144-1.5K=0$$

Trasformiamo il polinomio caratteristico utilizzando l'equazione bilineare $z=\frac{1+w}{1-w}$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3+1.3\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2+K\left(\frac{1+w}{1-w}\right)-0.144-1.5K=0$$

$$(1+w)^3+1.3(1+w)^2(1-w)+K(1+w)(1-w)^2-(0.144+1.5K)(1-w)^3=0$$

$$\left(1+3w+3w^2+w^3\right)+1.3\left(1+2w+w^2\right)(1-w)+K(1+w)\left(1-2w+w^2\right)-(0.144-1.5K)\left(1-3w+3w^2-w^3\right)=0$$

$$\left(1+3w+3w^2+w^3\right)+1.3\left(1+w-w^2-w^3\right)+K\left(1-w-w^2+w^3\right)-(0.144+1.5K)\left(1-3w+3w^2-w^3\right)=0$$

$$(-0.1560+2.5K)w^3+(1.2680-5.5K)w^2+(4.7320+3.5K)w+2.1560-0.5K=0$$

Verifichiamo la positività di tutti i termini del polinomio caratteristico trasformato

$$\begin{cases}-0.1560+2.5K>0\\1.2680-5.5K>0\\4.7320+3.5K>0\\2.1560-0.5K>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}K>\frac{0.1560}{2.5}=0.0624\\K<\frac{1.2680}{5.5}=0.2305\\K>-\frac{4.7320}{3.5}=-1.3520\\K<\frac{2.1560}{0.5}=4.3120\end{cases}\tag{1.1}$$

Riassumendo tutti i termini sono positivi se

$$0.0624<K<0.2305\tag{1.2}$$

Passiamo alla costruzione della tabella di Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|ll}3 & -0.1560+2.5K & 4.7320+3.5K\\2 & 1.2680-5.5K & 2.1560-0.5K\\1 & \alpha(K) & \\0 & 2.1560-0.5K & \end{array}$$

dove $\alpha(K)=(4.7320+3.5K)(1.2680-5.5K)-(-0.1560+2.5K)(2.1560-0.5K)=$

$$=6.3365-27.0560K-18K^2$$

Si noti che nell'espressione di α non compare al denominatore il termine $1.2680-5.5K$ in quanto si è già verificato che risulta essere positivo. Se le relazioni (1.1) sono tutte soddisfatte allora i primi elementi delle righe 3, 2 e 0 sono senz'altro positivi. Per avere la stabilità garantita deve essere positivo anche $\alpha(K)$.

$$K_{1,2}=-\frac{27.0560\pm\sqrt{27.0560^2+4\cdot 6.3365\cdot 18}}{2\cdot 18}=\begin{cases}K_1=-1.7091\\ K_2=0.2060\end{cases}\Rightarrow -1.7091<K<0.2060$$

Confrontando questo risultato con il risultato della (1.2) si ottiene che il sistema risulta asintoticamente stabile per

$$0.0624<K<0.2060\,. \tag{1.3}$$

Altre regioni di stabilità si potrebbero avere con tutti i termini del polinomio caratteristico negativi ovvero con

$$\begin{cases}-0.1560+2.5K<0\\ 1.2680-5.5K<0\\ 4.7320+3.5K<0\\ 2.1560-0.5K<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}K<\dfrac{0.1560}{2.5}=0.0624\\ K>\dfrac{1.2680}{5.5}=0.2305\\ K<-\dfrac{4.7320}{3.5}=-1.3520\\ K>\dfrac{2.1560}{0.5}=4.3120\end{cases}$$

Si vede immediatamente che tutte queste condizioni non possono essere mai verificate simultaneamente per cui concludiamo che non vi sono altre regioni di stabilità se non quella relativa all'equazione (1.3).

Quesito b:

Si riscrive la funzione di trasferimento in forma simbolica

$$C(z)=\frac{(z+0.4)}{(z-0.8)^2}R(z)=\frac{(z+b)}{(z+a)^2}R(z)$$

Si risale all'equazione alle differenze del sistema

$$C(z)(z^2+2az+a^2)=R(z)(z+b)$$

$$\Downarrow$$

$$c(k+2)+2a\,c(k+1)+a^2c(k)=r(k+1)+b\,r(k)$$

Si ritrasforma tenendo conto delle condizioni iniziali.

$$\mathcal{Z}\left\{c(k+2)+2a\,c(k+1)+a^2c(k)=r(k+1)+b\,r(k)\right\}$$

$$z^2C(z)-z^2c(0)-zc(1)+2a\left[zC(z)-zc(0)\right]+a^2C(z)=z\,R(z)-z\,r(0)+b\,R(z)$$

Le condizioni iniziali per l'uscita sono date mentre per $r(0)$, sapendo che in ingresso vi è una sequenza di impulsi di ampiezza pari a due si avrà $r(0)=2$

$$z^2C(z)-z^2-z+2a\left[zC(z)-z\right]+a^2C(z)=z\,R(z)-2z+b\,R(z)$$

$$\left[z^2+2az+a^2\right]C(z)=\left(z+b\right)R(z)+z^2+(2a-1)z$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}C(z)&=\frac{\left(z+b\right)}{\left(z+a\right)^2}R(z)+\frac{z^2+(2a-1)z}{\left(z+a\right)^2}=\frac{\left(z+b\right)}{\left(z+a\right)^2}\frac{2z}{z-1}+\frac{z^2+(2a-1)z}{\left(z+a\right)^2}\\&=\frac{2z\left(z+b\right)+\left(z^2+(2a-1)z\right)\left(z-1\right)}{\left(z+a\right)^2\left(z-1\right)}=\frac{z\left(2z+2b\right)+z\left(z^2+(2a-2)z-(2a-1)\right)}{\left(z+a\right)^2\left(z-1\right)}\\&=\frac{z\left(z^2+2az-(2a-2b-1)\right)}{\left(z+a\right)^2\left(z-1\right)}\end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici si ricava la Z-trasformata dell'evoluzione totale del sistema

$$C(z)=\frac{z\left(z^2-2\cdot 0.8z-(-2\cdot 0.8-2\cdot 0.4-1)\right)}{\left(z-0.8\right)^2\left(z-1\right)}=\frac{z\left(z^2-1.6z+3.4\right)}{\left(z-0.8\right)^2\left(z-1\right)}.$$

Si scompone in fratti semplici la funzione

$$\frac{C(z)}{z}=\frac{z^2-1.6z+3.4}{\left(z-0.8\right)^2\left(z-1\right)}=\frac{A}{\left(z-0.8\right)^2}+\frac{B}{\left(z-0.8\right)}+\frac{C}{\left(z-1\right)}$$

dove

$$A=\left(z-0.8\right)^2\left.\frac{z^2-1.6z+3.4}{\left(z-0.8\right)^2\left(z-1\right)}\right|_{z=0.8}=\frac{0.8^2-1.6\cdot 0.8+3.4}{\left(0.8-1\right)}=-13.8$$

$$C=\left(z-1\right)\left.\frac{z^2-1.6z+3.4}{\left(z-0.8\right)^2\left(z-1\right)}\right|_{z=1}=\frac{1-1.6+3.4}{\left(1-0.8\right)^2}=70$$

Poiché il grado relativo è pari ad 1 deve essere $B+C=1$ e pertanto

$B=-69$.

Di conseguenza

$$C(z)=-\frac{13.8z}{\left(z-0.8\right)^2}-\frac{69z}{\left(z-0.8\right)}+\frac{70z}{\left(z-1\right)}$$

e la sua antitrsformata sarà

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\left\{C(z)\right\}&=\mathcal{Z}^{-1}\left\{-\frac{13.8z}{\left(z-0.8\right)^2}-\frac{69z}{\left(z-0.8\right)}+\frac{70z}{\left(z-1\right)}\right\}=\\&=-17.25\cdot k\cdot 0.8^k-69\cdot 0.8^k+70\cdot h(k)\end{aligned}$$