UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

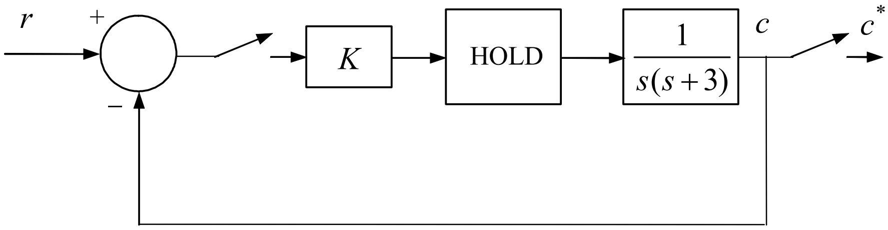
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

21/7/03

PARTE A - I

a) Sia dato il seguente sistema chiuso in retroazione unitaria:



Sapendo che il tempo di campionamento del sistema è $T = 1/3\,\mathrm{s}$ si chiede di valutarne:

1) La funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso r e l'uscita c^*;

2) La stabilità asintotica al variare del parametro $K \in [-\infty, \infty]$ mediante il criterio di Jury.

(Suggerimento: $Z\left\{\dfrac{1}{s+a}\right\} = \dfrac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$; $Z\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$; $Z\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} = \dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$)

Soluzione Parte I

Si indichi con H la funzione di trasferimento del dispositivo di Hold e con G la funzione di trasferimento dell'impianto. La relazione tra ingresso e uscita sarà del tipo

$$C = \frac{KHGR}{1+KHG}\,.$$

Passando alle Z-trasformate si nota che tra i blocchi K, H e G non vi è alcun campionatore e quindi i tre blocchi andranno accorpati tra loro al momento di calcolarne la funzione di trasferimento discreta. R entra nel blocco K attraverso un campionatore e non va pertanto accorpato agli altri blocchi.
In conclusione la relazione ingresso-uscita del sistema retroazionato sarà del tipo

$$C(z) = \frac{KHG(z)}{1+KHG(z)}R(z) = G_0(z)R(z)\,.$$

Calcoliamo la $KHG(z)$ ricordando che per il dispositivo di hold la funzione di trasferimento equivalente è data da $H(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$.

$$KHG(z) = Z\left\{K\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s(s+3)}\right\} = K(1-z^{-1})\; Z\left\{\frac{1}{s^2(s+3)}\right\} = K(1-z^{-1})Z\left\{\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s+3}\right\}.$$

Il calcolo dei coefficienti della scomposizione in fratti semplici è immediato

$$A = s^2\frac{1}{s^2(s+3)}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$C = (s+3)\frac{1}{s^2(s+3)}\bigg|_{s=-3} = \frac{1}{9}$$

Poiché il grado relativo del sistema è pari a tre, il teorema dei residui permette di scrivere

$$B = -C = -\frac{1}{9}\,.$$

In definitiva

$$\begin{aligned}
KHG(z) &= K(1-z^{-1})\left\{\frac{1}{3}\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{1}{9}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{9}\frac{1}{1-e^{-3T}z^{-1}}\right\}\\
&= K(1-z^{-1})\left\{\frac{3Tz^{-1}(1-e^{-3T}z^{-1})-(1-z^{-1})(1-e^{-3T}z^{-1})+(1-z^{-1})^2}{9(1-z^{-1})^2(1-e^{-3T}z^{-1})}\right\}\\
&= K\left\{\frac{(3T-1+e^{-3T})z^{-1}+(1-3Te^{-3T}-e^{-3T})z^{-2}}{9(1-z^{-1})(1-e^{-3T}z^{-1})}\right\}
\end{aligned}$$

Ricordando infine che $T = 1/3\,\mathrm{s}$ si ottiene

$$KHG(z) = K\left\{\frac{e^{-1}z^{-1}+(1-2e^{-1})z^{-2}}{9(1-z^{-1})(1-e^{-1}z^{-1})}\right\}.$$

Il sistema ad anello chiuso avrà quindi funzione di trasferimento

$$\begin{aligned}
G_0(z) &= \frac{K(e^{-1}z^{-1}+(1-2e^{-1})z^{-2})}{9(1-z^{-1})(1-e^{-1}z^{-1})+K(e^{-1}z^{-1}+(1-2e^{-1})z^{-2})}\\
&= \frac{K(e^{-1}z^{-1}+(1-2e^{-1})z^{-2})}{(9e^{-1}+K-2Ke^{-1})z^{-2}+(Ke^{-1}-9-9e^{-1})z^{-1}+9}
\end{aligned}.$$

Passando alla rappresentazione in z

$$G_0(z) = \frac{K(e^{-1}z + 1 - 2e^{-1})}{9z^2 + (Ke^{-1} - 9 - 9e^{-1})z + 9e^{-1} + K - 2Ke^{-1}} = \frac{K(0.3679z + 0.2642)}{9z^2 + (0.3679K - 12.3109)z + 3.3109 + 0.2642K}.$$

Il polinomio caratteristico del sistema risulta essere quindi del secondo ordine. Per valutare la stabilità asintotica del sistema retroazionato non risulta pertanto necessario impostare la tabella di Jury ma basta prendere in considerazione le sole disuguaglianze

1) $a_0 > |a_n| \Rightarrow 9 > |3.3109 + 0.2642K| \Rightarrow -46.5969 < K < 21.5333$

2) $P(z)|_{z=1} > 0 \Rightarrow 9 + 0.3679K - 12.3109 + 3.3109 + 0.2642K > 0 \Rightarrow 0.6321K > 0 \Rightarrow K > 0$

3) $P(z)|_{z=-1} > 0$ (il polinomio è pari) $\Rightarrow 9 - 0.3679K + 12.3109 + 3.3109 + 0.2642K > 0$

$$\Rightarrow 24.6218 - 0.1037K > 0 \Rightarrow K < \frac{24.6218}{0.1037} = 237.4330$$

Le tre condizioni sono simultaneamente soddisfatte e pertanto il sistema risulta essere asintoticamente stabile per

$$0 < K < 21.5333$$

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PARMA

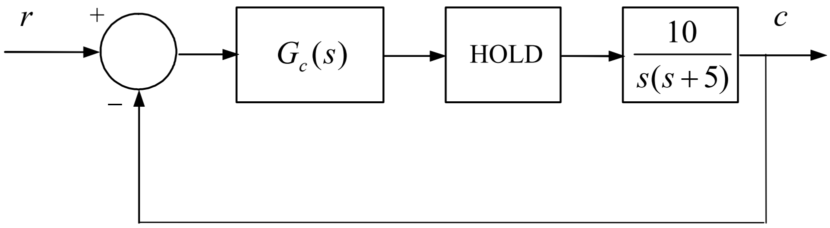
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

21/7/03

PARTE A - II

a) Si consideri lo schema in retroazione unitaria riportato in figura



dove il controllore $G_c(s)$ è costituito da una rete anticipatrice: $G_c(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$. Si voglia progettare un regolatore digitale mediante l'uso delle tecniche di discretizzazione dei regolatori continui. A tal fine si ricavino i coefficienti del regolatore continuo $G_c(s)$ capace di garantire un margine di fase del sistema retroazionato pari a $M_F = \pi / 4$ (suggerimento: si usino le formule di inversione).
Nello svolgere il progetto si tenga conto della presenza del dispositivo di hold e si ipotizzi un tempo di campionamento $T = 1$ s.

b) Si verifichi se il tempo di campionamento adottato risulta compatibile con il controllore sintetizzato, spiegando il perché.

c) Si discretizzi il controllore trovato mediante il metodo delle differenze in avanti e se ne discuta la stabilità.

d) Si discretizzi il controllore trovato mediante il metodo della corrispondenza poli-zeri e se ne discuta la stabilità.

Soluzione Parte II

a) Ricordando che la funzione di trasferimento approssimata di un circuito di Hold risulta essere $H(s)=\dfrac{1}{\frac{T}{2}s+1}$ si ricava la funzione di trasferimento complessiva da utilizzare per il progetto della rete anticipatrice: $G(s)=\dfrac{20}{s(s+5)(s+2)}$.

La corrispondente funzione di risposta armonica $G(j\omega)=\dfrac{20}{j\omega(j\omega+5)(j\omega+2)}$ può essere scomposta al fine di valutarne il modulo e l'argomento:

$$|G(j\omega)|=\frac{20}{\omega\sqrt{\omega^2+25}\sqrt{\omega^2+4}}$$

$$\angle G(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{\omega}{5}\right)-\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Al fine di fissare una pulsazione ω_0 adeguata per il calcolo della rete anticipatrice conviene tracciare (almeno in forma qualitativa) il diagramma di Nyquist del sistema. Il tracciamento risulta piuttosto semplificato visto che il sistema è a fase minima con un solo polo nell'origine: sarà presente un asintoto verticale e l'arrivo nell'origine sarà caratterizzato da una fase pari a $-\frac{3}{2}\pi$.

Valutiamo la pulsazione per la quale si ha intersezione con l'asse reale

$$\angle G(j\tilde{\omega})=-\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{\tilde{\omega}}{5}\right)-\arctan\left(\frac{\tilde{\omega}}{2}\right)=-\pi \quad\Rightarrow\quad \arctan\left(\frac{\tilde{\omega}}{5}\right)+\arctan\left(\frac{\tilde{\omega}}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Una equazione di questo tipo può essere risolta ricorrendo alla solita relazione $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$ ovvero

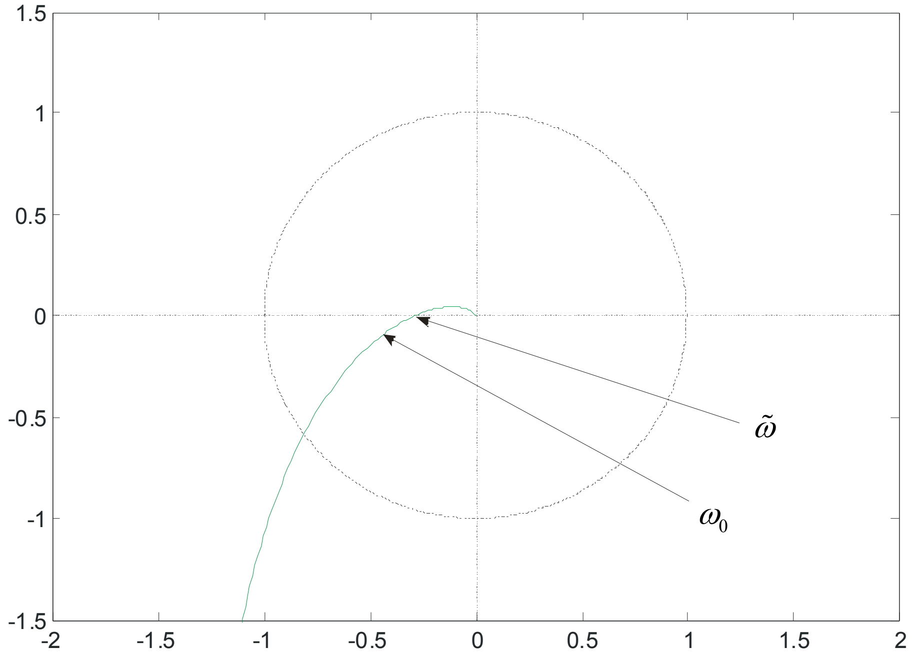
$$\tan\left[\arctan\left(\frac{\tilde{\omega}}{5}\right)+\arctan\left(\frac{\tilde{\omega}}{2}\right)\right]=\tan\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\frac{\tilde{\omega}}{5}+\frac{\tilde{\omega}}{2}}{1-\frac{\tilde{\omega}}{5}\frac{\tilde{\omega}}{2}}=\tan\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1-\frac{\tilde{\omega}^2}{10}}{\frac{\tilde{\omega}}{5}+\frac{\tilde{\omega}}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}}=0 \quad\Rightarrow\quad 1-\frac{\tilde{\omega}^2}{10}=0 \quad\Rightarrow\quad \tilde{\omega}=\sqrt{10}=3,1623$$

Si calcoli il $|G(j\tilde{\omega})|$

$$|G(j\tilde{\omega})|=\frac{20}{\tilde{\omega}\sqrt{\tilde{\omega}^2+25}\sqrt{\tilde{\omega}^2+4}}=0,2858$$

E' allora chiaro che il diagramma di Nyquist ha un andamento del tipo



Il margine di fase è quasi rispettato, tuttavia si migliorino le prestazioni del sistema soddisfacendo esattamente le specifiche. Si scelga un valore ω_0 leggermente inferiore a $\tilde{\omega}$ in modo da avere buone possibilità di soddisfare la condizione di esistenza della soluzione del problema: $\omega_0 = 3$.

Si calcoli l'anticipo che deve essere fornito dalla rete anticipatrice per garantire il margine di fase richiesto

$$\varphi_0 = M_F - \pi - \angle G(j\omega_0) = \frac{\pi}{4} - \pi + 3,0940 = 0,7378.$$

Poiché si sta progettando una rete anticipatrice la condizione da verificare per garantire l'esistenza della soluzione sarà, al solito, $\cos\varphi_0 > |G(j\omega_0)|$ e pertanto

$$\cos(\varphi_0) = 0,7399 > |G(j3)| = \frac{20}{3\sqrt{9+25}\sqrt{9+2}} = 0,3171.$$

La rete anticipatrice può essere pertanto progettata usando le solite espressioni.

$$M = \frac{1}{|G(j\omega_0)|} = \frac{1}{0,3171} = 3,1536$$
$$\varphi = \varphi_0 = 0,7378$$

Ricordando che per α e τ valgono le solite relazioni, si ricava

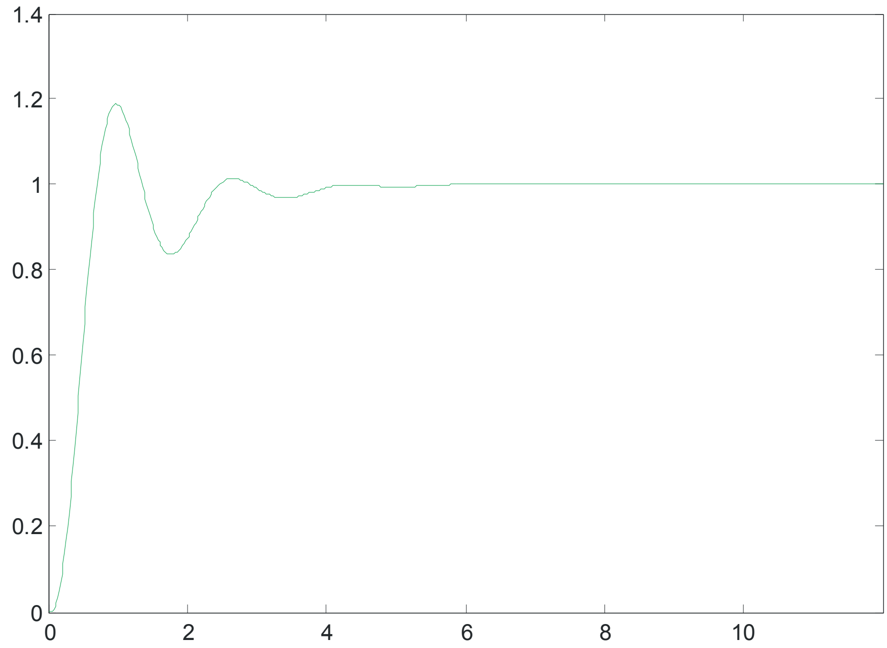
$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M - \cos\varphi)} = \frac{3,1536 * 0,7399 - 1}{3,1536(3,1536 - 0,7399)} = 0,1752$$

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} = \frac{3,1536 - 0,7399}{3 * 0,6727} = 1,1961$$

In conclusione la rete anticipatrice che soddisfa la specifica sul margine di fase è data da

$$G_c(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} = \frac{1+1,1961s}{1+0,1752*1,1961s} = 5,708\frac{s+0,8361}{s+4,772}.$$

La risposta al gradino unitario del sistema retroazionato sarà



b) Affinchè la discretizzazione del controllore porti a dei risultati che siano consistenti, ovvero affinché il regolatore discreto possa emulare al meglio il comportamento del regolatore continuo, è necessario che tutte le pulsazioni caratteristiche della rete correttrice siano ben al di sotto della pulsazione di Nyquist $\frac{\pi}{T}$ (ovvero siano almeno $2 \div 10$ volte più piccole). Nel caso in questione la pulsazione massima della rete è quella relativa al polo (4,772) mentre la pulsazione di Nyquist è pari a 3,14.

Si può concludere che la scelta del tempo di campionamento non risulta appropriata per le esigenze di progetto e che qualunque tecnica di discretizzazione verrà adottata porterà a risultati non conformi alle aspettative.

c) Si discretizzi ponendo $s \to \frac{z-1}{T}$

$$G_c(z) = 5,708\frac{z-1+0,8361}{z-1+4,772} = 5,708\frac{z-0.1639}{z+3,772}.$$

Il regolatore è instabile!

d) Si ricordi che la corrispondenza poli-zeri richiede di ottenere il regolatore discreto attraverso la sostituzione $(s+a) \quad \Rightarrow \quad (z-e^{-aT})$ e di aggiungere tanti zeri in -1 quanto è l'eccesso tra poli e zeri nella funzione di trasferimento da trasformare. Ricordando che T=1, si ricava

$$G_c(z) = \tilde{k}\frac{(z-e^{-0,8361})}{(z-e^{-4,772})} = \tilde{k}\frac{(z-0,4334)}{(z-0,0085)}.$$

Poiché il sistema è di tipo 0 il valore di $\widetilde{k}$ si valuta imponendo che il controllore discreto e quello continuo abbiano lo stesso guadagno statico

$$\lim_{s\to 0} G_c(s) = \lim_{z\to 1} G_c(z)$$

Pertanto

$$\lim_{s\to 0} G_c(s) = \lim_{s\to 0} 5,708\frac{s+0,8361}{s+4,772} = 1$$

ed essendo

$$\lim_{z\to 1} G_c(z) = \lim_{z\to 1} \tilde{k}\,\frac{(z-0,4334)}{(z-0,0085)} = \tilde{k}\ 0,5714$$

dal confronto delle due relazioni si ricava $\tilde{k} = 1,75$.

Il regolatore discreto avrà equazione

$G_c(z) = 1,75\dfrac{(z-0,4334)}{(z-0,0085)}$ e sarà pertanto stabile. Tuttavia la scelta errata del tempo di campionamento farà sì che la risposta al gradino del sistema retroazionato sia di tipo instabile (vedi figura)