UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

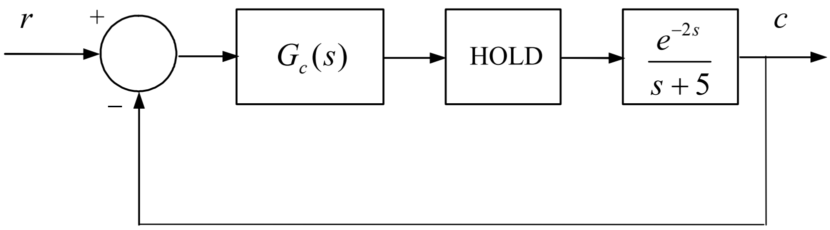
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

23/2/04

PARTE A - I

1) Si consideri lo schema in retroazione unitaria riportato in figura



dove il controllore $G_c(s)$ è costituito da una rete ritardatrice: $G_c(s) = K\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$. Si voglia progettare un regolatore digitale mediante l'uso delle tecniche di discretizzazione dei regolatori continui. A tal fine si ricavino i coefficienti del regolatore continuo $G_c(s)$ capace di garantire

a) un errore a regime in risposta ad un gradino unitario $e_p = 0.4$;

b) un margine di fase del sistema retroazionato pari a $M_F = \pi/6$.

Nello svolgere il progetto si tenga conto della presenza del dispositivo di hold e si ipotizzi un tempo di campionamento T = 0.05 s (suggerimento: si usino le formule di inversione).

2) Si verifichi che il tempo di campionamento adottato risulti compatibile con il controllore sintetizzato, spiegando il perché.

3) Si discretizzi il regolatore trovato usando la trasformazione bilineare, applicando la tecnica del prewarping in corrispondenza della pulsazione ω_0 utilizzata per la compensazione del sistema.

Soluzione Parte A-I

1) Ricordando che la funzione di trasferimento approssimata di un circuito di Hold risulta essere $H(s)=\dfrac{1}{\frac{T}{2}s+1}=\dfrac{1}{\frac{0.05}{2}s+1}=\dfrac{40}{s+40}$ si ricava la funzione di trasferimento complessiva da utilizzare per il progetto della rete anticipatrice: $G(s)=\dfrac{40\,e^{-2s}}{(s+5)(s+40)}$.

Come primo passaggio va messo a posto l'errore a regime scegliendo una opportuna costante K del regolatore. Poiché è richiesto un errore a regime $e_p=0.4=\dfrac{4}{10}$ la costante di posizione del sistema dovrà essere $e_p=\dfrac{1}{1+K_p}=\dfrac{4}{10} \quad\Rightarrow\quad 4+4K_p=10 \quad\Rightarrow\quad K_p=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

Ricordando che $K_p=\lim\limits_{s\to 0}G_c(s)G(s)=\lim\limits_{s\to 0}K\dfrac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}\dfrac{40\,e^{-2s}}{(s+5)(s+40)}=K\dfrac{1}{5}$ si ricava immediatamente che $K_p=K\dfrac{1}{5} \quad\Rightarrow\quad K=5K_p=\dfrac{15}{2}=7.5$.

E' il momento di valutare la rete compensatrice tenendo conto della presenza del guadagno K della rete ritardatrice. E' essenziale considerare la presenza del guadagno al momento di calcolare la rete anticipatrice. Se questo venisse infatti aggiunto solo dopo aver fatto il progetto della rete farebbe espandere il diagramma di Nyquist causando nuovamente la violazione della specifica sul margine di fase. L'impianto da compensare sarà quindi

$$\tilde{G}(s)=K\frac{40\,e^{-2s}}{(s+5)(s+40)}=\frac{300\,e^{-2s}}{(s+5)(s+40)}$$

La corrispondente funzione di risposta armonica $\tilde{G}(j\omega)=\dfrac{300\,e^{-2j\omega}}{(j\omega+5)(j\omega+40)}$ può essere scomposta al fine di valutarne il modulo e l'argomento:

$$\left|\tilde{G}(j\omega)\right|=\frac{300}{\sqrt{\omega^2+25}\,\sqrt{\omega^2+1600}}$$

$$\angle\tilde{G}(j\omega)=-2\omega-\arctan\left(\frac{\omega}{5}\right)-\arctan\left(\frac{\omega}{40}\right).$$

Al fine di fissare una pulsazione ω_0 adeguata per il calcolo della rete anticipatrice conviene tracciare (almeno in forma qualitativa) il diagramma di Nyquist del sistema.

Il sistema ha un guadagno statico pari a $K_p=1.5$ e quindi il diagramma di Nyquist partirà dall'asse reale positivo. Il sistema è a fase minima per cui verrà generata una spirale in senso orario.

Valutiamo le pulsazioni per le quali si hanno le intersezioni con l'asse reale negativo e con l'asse immaginario negativo tali informazioni saranno essenziali per proporre una pulsazione opportuna di compensazione. Per l'intersezione con l'asse reale negativo si ha che

$$\angle\tilde{G}(j\tilde{\omega}) = -2\tilde{\omega} - \arctan\left(\frac{\tilde{\omega}}{5}\right) - \arctan\left(\frac{\tilde{\omega}}{40}\right) = -\pi \quad \Rightarrow \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{2}\left[\pi - \arctan\left(\frac{\tilde{\omega}}{5}\right) - \arctan\left(\frac{\tilde{\omega}}{40}\right)\right]$$

Troviamo la soluzione attraverso un procedimento iterativo. Partendo da $\tilde{\omega} = 0.01$ si ottiene

$$\tilde{\omega} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad 1.5697 \quad \Rightarrow \quad 1.3991 \quad \Rightarrow \quad 1.4169 \quad \Rightarrow \quad 1.4150 \quad \Rightarrow \quad 1.4152 .$$

Per l'intersezione con l'asse immaginario negativo si ha che

$$\angle\tilde{G}(j\hat{\omega}) = -2\hat{\omega} - \arctan\left(\frac{\hat{\omega}}{5}\right) - \arctan\left(\frac{\hat{\omega}}{40}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{\omega} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\hat{\omega}}{5}\right) - \arctan\left(\frac{\hat{\omega}}{40}\right)\right]$$

e quindi

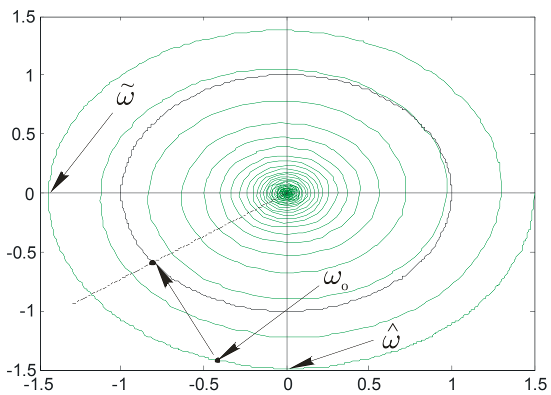
$$\hat{\omega} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad 0.7843 \quad \Rightarrow \quad 0.6978 \quad \Rightarrow \quad 0.7073 \quad \Rightarrow \quad 0.7063 \quad \Rightarrow \quad 0.7064 .$$

Valutando il modulo della $\tilde{G}(j\omega)$ per entrambe le pulsazioni si ottiene

$$\left|\tilde{G}(j\tilde{\omega})\right| = \frac{300}{\sqrt{1.4152^2 + 25}\,\sqrt{1.4152^2 + 1600}} = 1.4424$$

$$\left|\tilde{G}(j\hat{\omega})\right| = \frac{300}{\sqrt{0.7064^2 + 25}\,\sqrt{0.7064^2 + 1600}} = 1.4850$$

L'andamento del diagramma di Nyquist sarà quello riportato in figura.



Per soddisfare la specifica sul margine di fase converrà scegliere una pulsazione ω_0 per il progetto della rete compensatrici leggermente maggiore di $\hat{\omega}$ ma chiaramente non superiore di $\tilde{\omega}$: $\omega_0 = 1.0$.

Si calcoli il ritardo di fase che deve essere fornito dalla rete ritardatrice per garantire il margine di fase richiesto

$$\varphi_0 = \pi - M_F + \angle G(j\omega_0) = \pi - \frac{\pi}{6} - 2.2224 = 0.3956 .$$

Visto che il valore di ω_0 non è stato scelto a caso si dovrebbe avere immediatamente il soddisfacimento della condizione di esistenza della soluzione che, poiché si sta progettando una rete ritardatrice, sarà dato dalla relazione $\cos\varphi_0 > \dfrac{1}{|G(j\omega_0)|}$ e pertanto

$$\cos(\varphi_0) = 0.9228 > \frac{1}{|G(j1)|} = \frac{300}{\sqrt{1^2+25}\sqrt{1^2+1600}} = \frac{1}{1.4704} = 0.6801 .$$

La rete ritardatrice può essere pertanto progettata usando le espressioni.

$$M = |G(j\omega_0)| = 1.4704$$
$$\varphi = \varphi_0 = 0.3956$$

Ricordando che per α e τ valgono le solite relazioni, si ricava

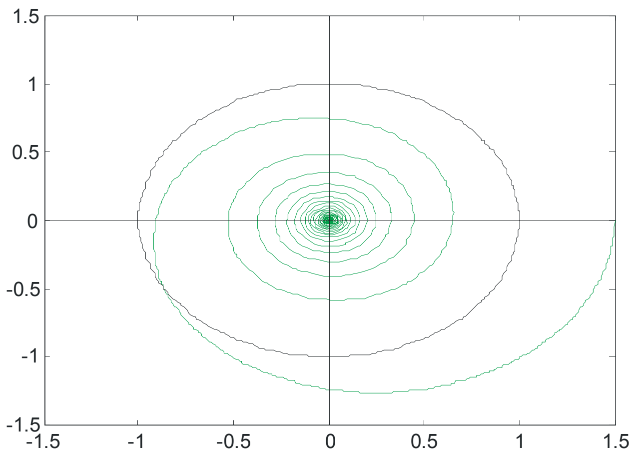
$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)} = \frac{1.4704 * 0.9228 - 1}{1.4704(1.4704 - 0.9228)} = 0.4431$$

$$\tau = \frac{M - \cos\varphi}{\omega_0 \sin\varphi} = \frac{1.4704 - 0.9228}{0.3854} = 1.4211$$

In conclusione la rete ritardatrice che soddisfa la specifica sul margine di fase e sull'errore a regime è data da

$$G_c(s) = K\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} = 7.5\frac{1+0.4431*1.4211s}{1+1.4211s} = 3.323\frac{s+1.588}{s+0.7037}.$$

Il diagramma di Nyquist del sistema compensato sarà



b) Nel caso in questione la pulsazione massima della rete è quella relativa allo zero (1.588) mentre la pulsazione di Nyquist è pari a $\dfrac{\pi}{T} = 62.8319$ e quindi il tempo di campionamento risulta essere più che appropriato per poter implementare la rete correttrice. Si noti inoltre che la pulsazione di Nyquist risulta essere molto superiore anche alla massima pulsazione dell'impianto (5.0). Con tutta probabilità si sarebbe potuta scegliere una frequenza di campionamento più bassa ottenendo ugualmente dei risultati soddisfacenti.

c) Si utilizzi la formula di trasformazione

$$s = \frac{\varpi}{\tan\frac{\varpi T}{2}}\frac{z-1}{z+1} = a\frac{z-1}{z+1}.$$

Con i valori assegnati di ϖ e T si ottiene $a = 39.9917$.
Si riscriva in forma simbolica $G_c(s)$ ottenendo

$$G_c(s) = 3.323\frac{s+1.588}{s+0.7037} = K\frac{s+b}{s+c}$$

e si ricavi $G_c(z)$ attraverso la sostituzione proposta

$$G_c(s) = K\frac{a\frac{z-1}{z+1}+b}{a\frac{z-1}{z+1}+c} = K\frac{a(z-1)+b(z+1)}{a(z-1)+c(z+1)} = K\frac{(a+b)z+b-a}{(a+c)z+c-a}$$

$$= 3.323\frac{41.5797\,z-38.4037}{40.6954\,z-39.2880} = 3.3952\frac{z-0.9236}{z-0.9654}.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

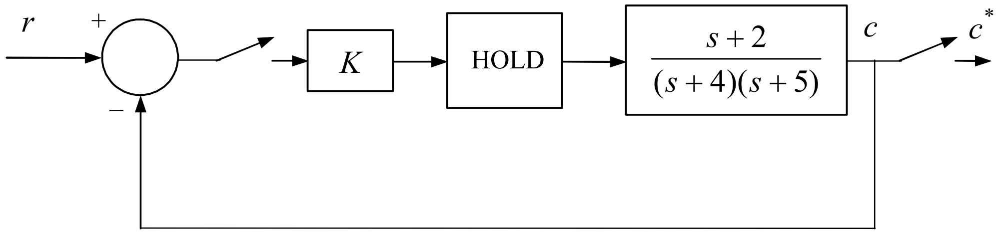
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

23/2/04

PARTE A - II

a) Sia dato il seguente sistema chiuso in retroazione unitaria:



Sapendo che il tempo di campionamento del sistema è $T = 1/2\,\text{s}$ si chiede di valutare la stabilità asintotica al variare del parametro $K \in [-\infty, \infty]$ mediante il criterio di Jury.

(Suggerimento: $\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = \frac{z}{z-e^{-aT}}$; $\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}$)

b) Si discretizzi il controllore continuo

$$G_c(s) = 3\frac{s+5}{(s+7)(s+3)}$$

mediante la tecnica basata sulla corrispondenza poli-zeri, adottando un tempo di campionamento $T = 0.5s$. Verificare se il tempo di campionamento scelto è compatibile con la rete $G_c(s)$.

Soluzione Parte A-II

Quesito a.

Si indichi con H la funzione di trasferimento del dispositivo di Hold e con G la funzione di trasferimento dell'impianto. La relazione tra ingresso e uscita sarà del tipo

$$C = \frac{KHGR}{1+KHG}.$$

Passando alle Z-trasformate si nota che tra i blocchi K, H e G non vi è alcun campionatore e quindi i tre blocchi andranno accorpati tra loro al momento di calcolarne la funzione di trasferimento discreta. R entra nel blocco K attraverso un campionatore e non va pertanto accorpato agli altri blocchi.
In conclusione la relazione ingresso-uscita del sistema retroazionato sarà del tipo

$$C(z) = \frac{KHG(z)}{1+KHG(z)}R(z) = G_0(z)R(z).$$

L'equazione caratteristica del sistema è data da $1+KHG(z)$ e risulta quindi necessario calcolare il termine $KHG(z)$ per poter valutare la stabilità asintotica del sistema. Ricordando che per il dispositivo di hold la funzione di trasferimento equivalente è data da $H(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$ si ottiene

$$\begin{aligned} KHG(z) &= \mathcal{Z}\left\{K\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{s+2}{(s+4)(s+5)}\right\} = K\left(\frac{z-1}{z}\right)\mathcal{Z}\left\{\frac{s+2}{s(s+4)(s+5)}\right\} \\ &= K\left(\frac{z-1}{z}\right)\mathcal{Z}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s+4}+\frac{C}{s+5}\right\} \end{aligned}.$$

Il calcolo dei coefficienti della scomposizione in fratti semplici è immediato

$$A = s\frac{s+2}{s(s+4)(s+5)}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{10}$$

$$B = (s+4)\frac{s+2}{s(s+4)(s+5)}\bigg|_{s=-4} = \frac{1}{2}$$

$$C = (s+5)\frac{s+2}{s(s+4)(s+5)}\bigg|_{s=-5} = -\frac{3}{5}$$

Verifichiamo il risultato con il teorema dei residui, ricordando che il sistema ha grado relativo pari a due

$$A+B+C = \frac{1}{10}+\frac{1}{2}-\frac{3}{5} = 0.$$

In definitiva

$$\begin{aligned} KHG(z) &= K\left(\frac{z-1}{z}\right)\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{10}\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+4}-\frac{3}{5}\frac{1}{s+5}\right\} = K\left(\frac{z-1}{z}\right)\left\{\frac{1}{10}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-4T}}-\frac{3}{5}\frac{z}{z-e^{-5T}}\right\} \\ &= K(z-1)\left\{\frac{(z-e^{-4T})(z-e^{-5T})+5(z-1)(z-e^{-5T})-6(z-1)(z-e^{-4T})}{10(z-1)(z-e^{-4T})(z-e^{-5T})}\right\} \\ &= K\left\{\frac{(z^2-(e^{-4T}+e^{-5T})z+e^{-9T})+5(z^2-(1+e^{-5T})z+e^{-5T})-6(z^2-(1+e^{-4T})z+e^{-4T})}{10(z-e^{-4T})(z-e^{-5T})}\right\} \\ &= K\left\{\frac{(1+5e^{-4T}-6e^{-5T})z+e^{-9T}+5e^{-5T}-6e^{-4T}}{10(z-e^{-4T})(z-e^{-5T})}\right\} \end{aligned}$$

L'equazione caratteristica del sistema è allora

$$1+K\left\{\frac{(1+5e^{-4T}-6e^{-5T})z+e^{-9T}+5e^{-5T}-6e^{-4T}}{10(z-e^{-4T})(z-e^{-5T})}\right\}=0$$

e quindi il polinomio caratteristico da studiare sarà

$$10(z-e^{-4T})(z-e^{-5T})+K((1+5e^{-4T}-6e^{-5T})z+e^{-9T}+5e^{-5T}-6e^{-4T})=0$$

$$10(z^2-(e^{-4T}+e^{-5T})z+e^{-9T})+K((1+5e^{-4T}-6e^{-5T})z+e^{-9T}+5e^{-5T}-6e^{-4T})=0$$

$$10z^2+\left[K(1+5e^{-4T}-6e^{-5T})-10(e^{-4T}+e^{-5T})\right]z+10e^{-9T}+K(e^{-9T}+5e^{-5T}-6e^{-4T})=0$$

Ricordando infine che $T=1/2\,\mathrm{s}$ si ottiene

$$10z^2+\left[K(1+5e^{-4T}-6e^{-5T})-10(e^{-4T}+e^{-5T})\right]z+10e^{-9T}+K(e^{-9T}+5e^{-5T}-6e^{-4T})=0$$

$$10z^2+\left[1.1842K-2.1742\right]z+0.1111-0.3905K=0$$

Il polinomio caratteristico del sistema risulta essere quindi del secondo ordine. Per valutare la stabilità asintotica del sistema retroazionato non risulta pertanto necessario impostare la tabella di Jury ma basta prendere in considerazione le sole disuguaglianze

1) $a_0>|a_n|\Rightarrow 10>|0.1111-0.3905K|\Rightarrow -10+0.1111<0.3905K<10+0.1111$
$\Rightarrow -25.3237<K<25.8927$

2) $P(z)|_{z=1}>0\Rightarrow 10+1.1842K-2.1742+0.1111-0.3905K>0$
$\Rightarrow 0.7937\,K+7.9369>0\Rightarrow K>-10$

3) $P(z)|_{z=-1}>0$ (il polinomio è pari) $\Rightarrow 10-1.1842K+2.1742+0.1111-0.3905K>0$
$\Rightarrow -1.5747K+12.2853>0\Rightarrow K<7.8017$

Le tre condizioni sono simultaneamente soddisfatte e pertanto il sistema risulta essere asintoticamente stabile per

$$-10<K<7.8017$$

Quesito b.

Si ricordi che la corrispondenza poli-zeri richiede di ottenere il regolatore discreto attraverso la sostituzione $(s+a)\quad\Rightarrow\quad(z-e^{-aT})$ e di aggiungere tanti zeri in -1 quanto è l'eccesso tra poli e zeri nella funzione di trasferimento da trasformare. Ricordando che T=0.5, si ricava

$$G_c(z)=\tilde{k}\frac{(z-e^{-2.5})(z+1)}{(z-e^{-1.5})(z-e^{-3.5})}=\tilde{k}\frac{(z-0.0821)(z+1)}{(z-0.2231)(z-0.0302)}.$$

Poiché il sistema è di tipo 0 il valore di $\tilde{k}$ si valuta imponendo che il controllore discreto e quello continuo abbiano lo stesso guadagno statico

$$\lim_{s\to 0}G_c(s)=\lim_{z\to 1}G_c(z)$$

Pertanto

$$\lim_{s\to 0}G_c(s)=\lim_{s\to 0}3\frac{s+5}{(s+7)(s+3)}=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}=0.7143$$

ed essendo

$$\lim_{z\to 1}G_c(z)=\lim_{z\to 1}\tilde{k}\frac{(z-0.0821)(z+1)}{(z-0.2231)(z-0.0302)}=\tilde{k}\;\frac{2(1-0.0821)}{(1-0.2231)(1-0.0302)}=\tilde{k}\,2.4366$$

dal confronto delle due relazioni si ricava $\tilde{k}=0.2932$.

Il regolatore discreto avrà equazione

$G_c(z) = 0.2932 \dfrac{(z-0.0821)(z+1)}{(z-0.2231)(z-0.0302)}$ e sarà pertanto stabile.