UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

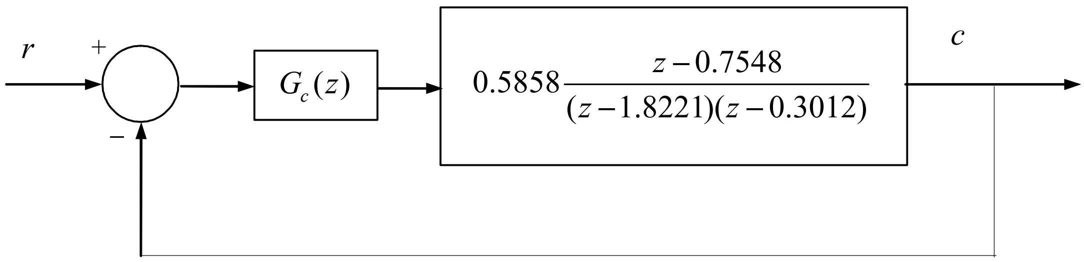
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

29/1/03

PARTE I

a) Sia dato il seguente sistema in retroazione unitaria



Si chiede di progettare il controllore $G_c(z)$ in modo tale che la risposta al gradino del sistema retroazionato sia di tipo deadbeat.

b) Si valuti il controllore discreto equivalente al seguente controllore continuo:

$$G_c(s) = \frac{s+3}{s(s+1)}$$

Si adotti a questo scopo la trasformazione bilineare con prewarping alla pulsazione $\bar{\omega} = 3$ e tempo di campionamento $T = 0.5s$. Verificare se il tempo di campionamento scelto è compatibile con la rete $G_c(s)$.

Soluzione Parte I

Quesito a:

Impostiamo i polinomi:
$B^{-}=0.5858(z-0.7548)=K(z-\alpha)$

$B^{+}=1$

$A^{-}=(z-1.8221)=(z-\beta)$

$A^{+}=(z-0.3012)=(z-\gamma)$

Visto che l'errore al gradino deve essere nullo per avere un comportamento di tipo deadbeat poniamo $q=1$.

Calcoliamo i gradi dell'equazione Diofantea
grado(S')=1+1-1=1
grado(R'')=2-0-1=1
grado(A_m)=1+2-0-1+1=3

Impostiamo l'equazione diofantea:

$$(z-\beta)(z-1)(r_0+r_1 z)+k(z-\alpha)(s_0+s_1 z)=z^3$$

$$r_1 z^3+(r_0-r_1-r_1\beta)z^2+(r_1\beta-r_0-r_0\beta)z+\beta r_0+Ks_1 z^2+K(s_0-\alpha s_1)-K\alpha s_0=z^3$$

che può essere risolto attraverso il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} r_1=1 \\ r_0-r_1-r_1\beta+Ks_1=0 \\ r_1\beta-r_0-r_0\beta+Ks_0-K\alpha s_1=0 \\ \beta r_0-K\alpha s_0=0 \end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione ricaviamo

$$Ks_1=-r_0+1+\beta$$

mentre dalla terza si ottiene

$$Ks_0=-r_1\beta+r_0+r_0\beta+K\alpha s_1=-\beta+r_0+r_0\beta-\alpha r_0+\alpha+\alpha\beta\ .$$

Infine dalla quarta:

$$\beta r_0=K\alpha s_0=-\alpha\beta+\alpha r_0+r_0\alpha\beta-\alpha^2 r_0+\alpha^2+\alpha^2\beta$$

che riordinata rende

$$r_0(\beta-\alpha-\alpha\beta+\alpha^2)=-\alpha\beta+\alpha^2+\alpha^2\beta$$

da cui, infine, si ricava

$$r_0=\frac{-\alpha\beta+\alpha^2+\alpha^2\beta}{\beta-\alpha-\alpha\beta+\alpha^2}=0.8884$$

Inoltre

$$s_0=\frac{\beta r_0}{K\alpha}=3.6614\ ;$$

$$s_1=\frac{1+\beta-r_0}{K}=3.3011$$

L'equazione del regolatore deadbeat sarà dunque

$$G_c(z)=\frac{(z-0.3012)(3.6614+3.3011z)}{(z-1)(z+0.8884)}=3.3011\frac{(z-0.3012)(z+1.1091)}{(z-1)(z+0.8884)}$$

Quesito b:

Utilizzo la formula di trasformazione

$$s = \frac{\bar{\omega}}{\tan\frac{\bar{\omega}T}{2}}\frac{z-1}{z+1} = a\frac{z-1}{z+1}.$$

Con i valori assegnati di $\bar{\omega}$ e T si ottiene $a = 3.2203$.

Sostituendo in $G_c(s)$ si ottiene:

$$G_c(z) = \frac{a\frac{z-1}{z+1}+3}{a\frac{z-1}{z+1}\left(a\frac{z-1}{z+1}+1\right)} = \frac{a(z-1)+3(z+1)}{a(z-1)\left(a\frac{z-1}{z+1}+1\right)}$$

$$= \frac{\left[(3+a)z+(3-a)\right](z+1)}{a(z-1)\left(a(z-1)+(z+1)\right)} = \frac{\left[(3+a)z+(3-a)\right](z+1)}{a(z-1)\left[(1+a)z+(1-a)\right]}$$

$$= \frac{\left[6.2203z-0.2203\right](z+1)}{3.2203(z-1)\left[4.2203z-2.2203\right]} = 0.4577\frac{(z-0.03542)(z+1)}{(z-0.5261)(z-1)}$$

La pulsazione di Nyquist corrispondente al periodo di campionamento T=0.5 s è pari a $\frac{\pi}{T} = \frac{3.1415}{0.5} = 6.2830$ ovvero è sufficientemente larga da comprendere le pulsazioni corrispondenti a tutti i poli e gli zeri della funzione di trasferimento $G_c(s)$ nonché la pulsazione di prewarping. La situazione è un po' al limite poiché vi è lo zero in -3 che è molto prossimo a $\frac{\pi}{T}$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

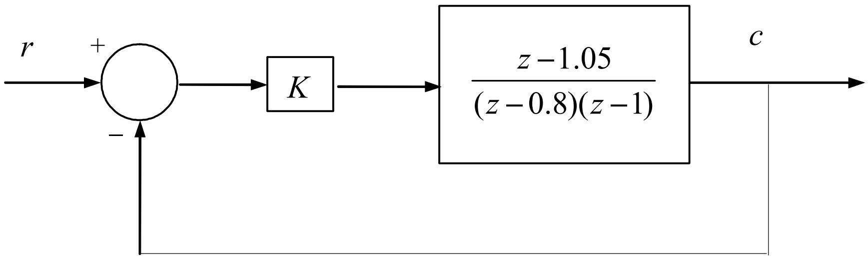
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

29/1/03

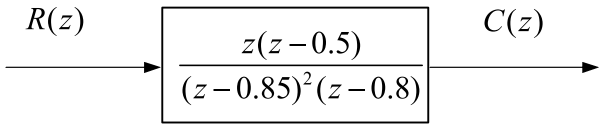
PARTE II

a) Sia dato il seguente sistema in retroazione unitaria



Si chiede di valutarne la stabilità asintotica mediante il criterio di Jury al variare del parametro $K \in [-\infty, \infty]$.

b) Sia dato il seguente sistema



Si valuti l'evoluzione libera dell'uscita $c(k)$ del sistema sapendo che le condizioni iniziali per l'uscita sono:

$c(0)=1$; $c(1)=1$; $c(2)=0$.

(Suggerimento: $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{az}{(z-a)^2}\right\} = ka^k$; $\quad \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} = a^k$)

Soluzione Parte II

Quesito a:

Si ricava il polinomio caratteristico del sistema

$$1+K\frac{z-1.05}{(z-0.8)(z-1)}=0$$

$$z^2-1.8z+0.8+Kz-1.05K=0$$

$$z^2+(K-1.8)z+0.8-1.05K=0$$

Si verifica la condizione $a_0>|a_2|$

$$1>|0.8-1.05K|$$

$$-1<0.8-1.05K<1\Rightarrow\begin{cases}-1<0.8-1.05K\\ 0.8-1.05K<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1>-0.8+1.05K\\ 0.8-1<1.05K\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}K<\dfrac{1+0.8}{1.05}=1.7143\\ K>\dfrac{0.8-1}{1.05}=\text{-}0.1905\end{cases}$$

Si verifica la condizione $P(z)\big|_{z=1}>0$

$P(z)\big|_{z=1}=1+K-1.8+0.8-1.05K=-0.05K>0$ soddisfatta per $K<0$

Si verifica la condizione $P(z)\big|_{z=-1}>0$ (il polinomio è di grado pari)

$P(z)\big|_{z=-1}=1-K+1.8+0.8-1.05K=+3.6-2.05K>0$ soddisfatta per $K<\dfrac{3.6}{2.05}=1.7561$.

Visto che il sistema è del secondo ordine non è necessario costruire la tabella di Jury.

Tutte le condizioni risultano simultaneamente soddisfatte nell'intervallo

$$-0.1905<K<0$$

Quesito b:

Si riscrive la funzione di trasferimento in forma simbolica

$$C(z)=\frac{z(z-0.5)}{(z-0.85)^2(z-0.8)}R(z)=\frac{z(z-c)}{(z-a)^2(z-b)}R(z)$$

Si risale all'equazione alle differenze del sistema

$$C(z)\left[(z^2-2az+a^2)(z-b)\right]=R(z)(z^2-cz)$$

$$C(z)\left[z^3-(2a+b)z^2+(a^2+2ab)z-a^2b\right]=R(z)(z^2-cz)$$

$$\Downarrow$$

$$c(k+3)-(2a+b)c(k+2)+(a^2+2ab)c(k+1)-a^2bc(k)=r(k+2)-cr(k+1)$$

Si ritrasforma tenendo conto delle condizioni iniziali. Poiché interessa la sola evoluzione libera del sistema si eguaglia a zero il lato destro della equazione

$$\mathcal{Z}\left\{c(k+3)-(2a+b)c(k+2)+(a^2+2ab)c(k+1)-a^2bc(k)\right\}=0$$

$$z^3C(z)-z^3c(0)-z^2c(1)-zc(2)-(2a+b)\left[z^2C(z)-z^2c(0)-zc(1)\right]+(a^2+2ab)\left[zC(z)-zc(0)\right]-a^2bC(z)=0$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali imposte si ottiene l'equazione semplificata

$$z^3C(z)-z^3-z^2-(2a+b)\left[z^2C(z)-z^2-z\right]+(a^2+2ab)\left[zC(z)-z\right]-a^2bC(z)=0$$

$$\left[z^3-(2a+b)z^2+(a^2+2ab)z-a^2b\right]C(z)=z^3+z^2+(2a+b)\left[-z^2-z\right]+(a^2+2ab)z$$

$$\left[(z-a)^2(z-b)\right]C(z)=z^3+(1-2a-b)z^2+(a^2+2ab-2a-b)z$$

Sostituendo i valori numerici si ricava la Z-trasformata dell'evoluzione libera del sistema

$$C(z)=\frac{z^3+(1-2a-b)z^2+(a^2+2ab-2a-b)z}{(z-a)^2(z-b)}$$

$$C(z)=\frac{z^3-1.5z^2-0.4175z}{(z-0.85)^2(z-0.8)}=-\frac{19.4z}{(z-0.85)^2}+\frac{392z}{z-0.85}-\frac{391z}{z-0.8}$$

Antitrasformando si ricava infine

$$c(k)=-22.8235\,k\,(0.85)^k+392\cdot(0.85)^k-391\cdot(0.8)^k\ .$$

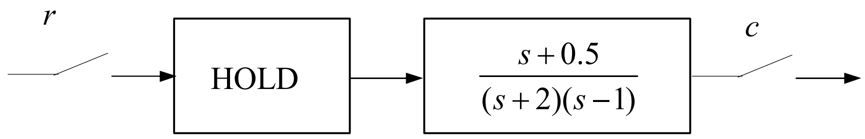
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

29/1/03

PARTE III

Sia dato il seguente sistema



Si valuti la funzione di trasferimento discreta $\mathcal{Z}\{HG(s)\}$ assumendo un tempo di campionamento $T = 0.3\,s$.

(Suggerimento: $\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = \frac{z}{z-e^{-aT}}$)

Soluzione Parte III

Calcoliamo

$$\mathcal{Z}\left\{HG(s)\right\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{s+0.5}{(s+2)(s-1)s}\right\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{A}{(s+2)}+\frac{B}{(s-1)}+\frac{C}{s}\right\}$$

Calcolo

$$A = (s+2)\left.\frac{s+0.5}{(s+2)(s-1)s}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

$$B = (s-1)\left.\frac{s+0.5}{(s+2)(s-1)s}\right|_{s=1} = \frac{1}{2}$$

$$C = s\left.\frac{s+0.5}{(s+2)(s-1)s}\right|_{s=0} = -\frac{1}{4}$$

Si noti che i tre valori trovati rispettano il teorema dei residui essendo $A+B+C=0$.
Torniamo al problema di partenza:

$$\mathcal{Z}\left\{HG(s)\right\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{-\frac{1}{4(s+2)}+\frac{1}{2(s-1)}-\frac{1}{4s}\right\}.$$

Usando l'espressione fornita nel testo otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left\{HG(s)\right\} &= \frac{z-1}{z}\left(-\frac{z}{4(z-e^{-2T})}+\frac{z}{2(z-e^{T})}-\frac{z}{4(z-1)}\right)\\ &= (z-1)\left(\frac{-(z-e^{T})(z-1)+2(z-e^{-2T})(z-1)-(z-e^{-2T})(z-e^{T})}{4(z-e^{-2T})(z-e^{T})(z-1)}\right)\\ &= \frac{(-e^{-2T}+2e^{T}-1)z-e^{T}+2e^{-2T}-e^{-T}}{4(z-e^{-2T})(z-e^{T})}\end{aligned}$$

Sostituendo T=0.3 s si ottiene infine

$$\mathcal{Z}\left\{HG(s)\right\} = \frac{1.1509z - 0.9931}{4z^2 - 7.5947z + 2.9633} = 0.2877\frac{(z\ -\ 0.8629)}{(z\ -\ 0.5488)\ (z\ -\ 1.35)}\ .$$