

TEORIA DEI SEGNALI B – PRIMO COMPITINO

SEGNALI NOTEVOLI

- Segnali pari e/o dispari: ogni segnale $x(t)$ si può scrivere come la somma della sua parte pari $x_p(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$ e la sua parte dispari $x_D(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$
- Energia su un intervallo: $E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$ - Potenza su un intervallo: $P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$

IMPULSO DI DIRAC

- Proprietà di campionamento: $\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = y(t_0)$

RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$

$$h(t) = y(\delta(t)).$$

PROPRIETÀ DELLA CONVOLUZIONE: SISTEMI IN CASCATA E IN PARALLELO

- Cascata: $y(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$
- Parallelo: $y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$.

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO $H(f)$

$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$. Essendo una funzione complessa, posso scriverla come $H(f) = A_H(f) e^{j\varphi_H(f)}$, cioè attraverso modulo e fase.

SERIE DI FOURIER $\rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$

COEFFICIENTI DI FOURIER

$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$. Per $k=0$ si ha la componente continua, cioè il valor medio temporale del segnale.

$$x_k(t) = X_k \cdot e^{2\pi k f_0 t} \rightarrow y_k(t) = x_k(t) * h(t) = H(kf_0) \cdot X_k e^{2\pi k f_0 t} \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) \cdot X_k e^{2\pi k f_0 t}$$

TRASFORMATA DI FOURIER

SE $x(t)$ PERIODICO

ANTITRASFORMATA DI FOURIER

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

PROPRIETÀ

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \quad A_Y(f) = A_X(f) \cdot A_H(f) \quad \varphi_Y(f) = \varphi_X(f) + \varphi_H(f) \quad \boxed{y(t) = H(f_0) \cdot x(t)}$$

Se $H(f)$ Hermitiana (spettro ampiezza pari, spettro fase dispari; $X_k = X_k^*$ $X(f) = X^*(f)$) $\rightarrow h(t)$ reale \rightarrow fase nulla.

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \xleftrightarrow{\text{(dualità)}} X(t) \leftrightarrow x(-f) \quad Ax(t) \xleftrightarrow{\text{(linearità)}} A \cdot X(f) \quad x\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\text{(cambiamento di scala)}} |T| \cdot X(Tf)$$

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\text{(traslazione temporale)}} X(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad x(t + t_0) \xleftrightarrow{\text{(traslazione temporale)}} X(f) e^{j2\pi f t_0}$$

$$x(t) \text{ pari} \leftrightarrow X(-f) = X(f) \quad x(t) \text{ dispari} \leftrightarrow X(-f) = -X(f) \quad x(t) \text{ reale pari} \leftrightarrow X(f) \text{ reale pari}$$

$$x(t) \text{ reale dispari} \leftrightarrow X(f) \text{ immaginario dispari}$$

RELAZIONE DI PARSEVAL

La potenza media di un segnale periodico è pari a $P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$. Sinusoide $\rightarrow P = |X_1|^2 + |X_{-1}|^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A}{2}$

FORMULE UTILI SU TRASFORMATE E NON

DOMINIO DEL TEMPO	DOMINIO DELLA FREQUENZA	COMMENTO
$A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$A \cdot T \cdot \text{sinc}(f \cdot T)$	Rect di durata T
$A \cdot e^{-Bt} \cdot u(t)$	$\frac{A}{B + j2\pi f}$	Esponenziale unilatero
$A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$A \cdot T \cdot \text{sinc}^2(f \cdot T)$	Triangolo di durata 2T
$A \cdot \delta(t)$	$X(f) = A$	Delta di Dirac
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$	Delta centrata in t_0
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$	Trasformata fasore
$x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}(X(f - f_0) + X(f + f_0))$	Teorema della modulazione
$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$	$\frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$	Trasformata coseno
$\text{sen}(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t})$	$\frac{1}{2j}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$	Trasformata seno

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \quad z = a + jb = \rho e^{j\theta}$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$