TEORIA DEI SEGNALI B – PRIMO COMPITINO

SEGNALI NOTEVOLI

- Costante: $x(t) = A$
- Gradino unitario: $u(t) = \begin{cases} 0\ per\ t < 0 \\ 1\ per\ t \geq 0 \end{cases}$
- Impulso rettangolare: $\prod(t) = \begin{cases} 0\ per\ |t| > \frac{1}{2} \\ 1\ per\ |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$
- Impulso triangolare: $\wedge(t) = \begin{cases} 0\ \ per\ |t| > 1 \\ 1 - |t|\ per\ |t| \leq 1 \end{cases}$
- Esponenziale negativo causale: $x(t) = Ae^{-BT}u(t)\ \ (A > 0, B > 0)$
- Sinusoide: $x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \phi)$ - Fasore: $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$ - Sinc: $sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$
- Segnali pari e/o dispari: ogni segnale $x(t)$ si può scrivere come la somma della sua parte pari $x_P(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big)$ e la sua parte dispari $x_D(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big)$
- Energia su un intervallo: $E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt$ - Potenza su un intervallo: $P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt$

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

- Moltiplicazione per una costante: $y(t) = Ax(t)$, grafico identico a x(t) con ampiezza scalata di A; si distinguono vari casi:
  - A>1 → estensione A<-1 → estensione + ribaltamento
  - 0<A<1 → compressione -1<A<0 → compressione + ribaltamento
- Traslazione temporale: $y(t) = x(t - t_0)$, versione di x(t) ritardata della quantità t_0; se $t_0>0$ ho una traslazione a destra (ritardo), se $t_0<0$ ho una traslazione a sinistra (anticipo)
- Inversione temporale: $y(t) = x(-t)$, grafico di x(t) ribaltato attorno all'asse delle ordinate
- Cambiamento di scala: $y(t) = x\left(\frac{t}{T}\right)$, i valori assunti da x(t) nell'intervallo $[t_1,t_2]$ vengono assunti da y(t) nell'intervallo $[t_1T,t_2T]$; si distinguono vari casi:
  - T>1 → espansione
  - 0<T<1 → compressione
  - -1<T<0 → compressione + ribaltamento
  - T<-1 → estensione + ribaltamento
- Ordine di trasformazione: Moltiplicazione per costante → Cambiamento di scala → Traslazione → Inversione temporale
- Segnali definiti a tratti: è necessario sostituire il nuovo argomento temporale anche negli intervalli stessi

IMPULSO DI DIRAC

- Proprietà di campionamento: $\int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau = y(t_0)$
- Area unitaria, quasi ovunque nullo, tende a ∞ nell'origine, simmetria pari, elemento neutro della convoluzione, derivata del gradino unitario $u'(x) = \delta(x)$

CLASSIFICAZIONE SISTEMI – Un sistema può essere:

- deterministici: l'uscita è univocamente determinata una volta assegnato il segnale d'ingresso.
- causale: la risposta del sistema ad un dato istante di tempo t non dipende da valori futuri del segnale di ingresso.
- fisicamente realizzabile: oltre ad essere causale la risposta ad un qualsiasi segnale reale è anch'essa reale.
- senza memoria: l'uscita è una trasformazione istantanea del segnale d'ingresso, che non dipende né da valori futuri né da valori passati.
- stabile (B.I.B.O.): ad ingressi limitati in ampiezza fa corrispondere uscite limitate anch'esse in ampiezza.
- stazionario: ad un dato segnale d'ingresso produce la stessa uscita a prescindere dall'istante di applicazione dell'ingresso.
- lineare: gode del principio di sovrapposizione degli effetti.

RISPOSTA IMPULSIVA h(t)

La risposta impulsiva (funzione del tempo) specifica completamente il sistema L.T.I. a cui si riferisce nel ***dominio del tempo***. Per calcolare un'uscita basta quindi fare la convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva $y(t) = x(t) * h(t)$. Per calcolarla, $h(t) = y(\delta(t))$.

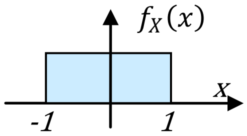
Per trovare l'uscita conoscendo ingresso e h(t) o faccio la convoluzione oppure sapendo che facendo entrare una Aδ(t-T) in uscita avrò la h(t) traslata di T e con ampiezza moltiplicata per A, costruisco il segnale in uscita.

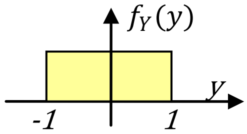
VERIFICA DELLE PROPRIETÀ DI UN SISTEMA

- Linearità: data $y(t) = f(x(t))$, scrivo tre generiche funzioni $y_1(t) = f(x_1),\ y_2(t) = f(x_2),\ y_3(t) = f(x_3)$, pongo $x_3(t) = ax_1 + bx_2$, calcolo $y(x_3)$ e controllo che $y(x_3) = y_3(t)$.
- Stazionarietà: data $y(t) = f(x(t))$, calcolo $y(t - t_0)$, calcolo $y(x(\tau - t_0))$ e controllo che $y(t - t_0) = y(x(\tau - t_0))$.
- Causalità: data $y(t) = f(x(t))$, trovo la $h(t)$ sostituendo alle $x(t - t_0)$ una $\delta(t - t_0)$; se $h(t)$ è causale, cioè è nulla $\forall t < 0$, il sistema è causale.
- Stabilità B.I.B.O.: data $y(t) = f(x(t))$ e la sua $h(t)$, controllo che $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt$ abbia valore finito.
- Senza memoria: data $y(t) = f(x(t))$, controllo che l'uscita $y(t)$ dipenda solamente da valori $x(t)$ né ritardati né posticipati; solo i sistemi che hanno $h(t) = \delta(t)$ sono senza memoria.

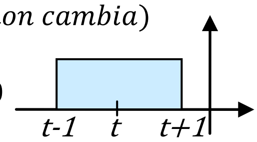
CONVOLUZIONE

$Cerco\ z = x * y$



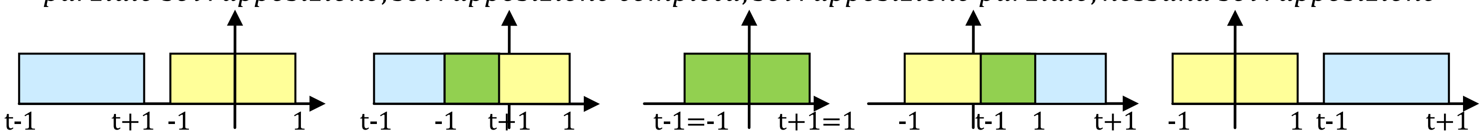


$1)\ Ribalto\ f_X(x)\ rispetto\ all'asse\ y\ per\ ottenere\ f_X(-u)(in\ questo\ es, non\ cambia)$



$2)\ Traslo\ f_X\ di\ un\ valore\ generico\ t\ per\ ottenere\ una\ f_X(t-u)\ centrata\ in\ t\ invece\ che\ in\ 0$

$3)\ Considero\ i\ vari\ casi\ al\ variare\ di\ t{:}\ nessuna\ sovrapposizione\ tra\ le\ f_X(t-u)\ e\ f_Y(u),$
$parziale\ sovrapposizione, sovrapposizione\ completa, sovrapposizione\ parziale, nessuna\ sovrapposizione$



$4)\ Se\ la\ sovrapposizione\ e'\ nulla,\ f_Z(z) = 0; altrimenti,\ f_Z(z) = \int_a^b f_X(t-u) \cdot f_Y(y) du$

$a\ e\ b\ estremi\ della\ sovrapposizione$

$5)\ Il\ risultato\ sara'\ una\ f_Z(z)\ definita\ a\ tratti\ a\ seconda\ del\ valore\ di\ t.$

PROPRIETÀ DELLA CONVOLUZIONE: SISTEMI IN CASCATA E IN PARALLELO

- Commutativa: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
- Associativa: $\big(x(t) * g(t)\big) * h(t) = x(t) * g(t) * h(t)$
- Distributiva: $x(t) * \big(g(t) + h(t)\big) = x(t) * g(t) + x(t) * h(t)$
- Elemento neutro: la delta di Dirac $\delta(t)$
- Traslazione: $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
- Cascata: sia $x(t)$ un segnale che passa attraverso un sistema di risposta impulsiva $h_1(t)$ e poi attraverso un altro sistema di risposta impulsiva $h_2(t)$; l'uscita sarà data da $y(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$
- Parallelo: sia $x(t)$ un segnale che passa attraverso un sistema di risposta impulsiva $h_1(t)$ e contemporaneamente attraverso un altro sistema di risposta impulsiva $h_2(t)$ e poi entrambe attraverso un sommatore; l'uscita sarà data da $y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$.

RELAZIONE DI PARSEVAL

La potenza media di un segnale periodico è pari a $P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$. Sinusoide → $P = |X_1|^2 + |X_{-1}|^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A}{2}$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO H(f)

Funzione che caratterizza il comportamento di un sistema di risposta impulsiva h(t). È una funzione complessa di variabile reale che descrive il sistema nel ***dominio della frequenza***. $H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$. Essendo una funzione complessa, posso scriverla come $H(f) = A_H(f)e^{j\varphi_{H(f)}}$, cioè attraverso modulo e fase.

SERIE DI FOURIER

Qualsiasi segnale che soddisfi le condizioni di Dirichlet può essere scritto come $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi kf_0 t}$. I coefficienti X_k, detti coefficienti di Fourier, sono calcolabili come $X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi kf_0 t} dt$. Per k=0 si ha la componente continua, che altro non è se non il valor medio temporale del segnale.

$x_k(t) = X_k \cdot e^{2\pi kf_0 t} \rightarrow\ y_k(t) = x_k(t) * h(t) = H(kf_0)\cdot X_k e^{2\pi kf_0 t}$ $\qquad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0)\cdot X_k e^{2\pi kf_0 t}$

TRASFORMATA DI FOURIER | **ma SE x(t) PERIODICO** | **ANTITRASFORMATA DI FOURIER**

$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi ft}\, dt$ $\qquad X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi kf_0 t} dt$ $\qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\, df$

PROPRIETÀ

$Y(f) = X(f)\cdot H(f)$ $\qquad A_Y(f) = A_X(f)\cdot A_H(f)$ $\qquad \varphi_Y(f) = \varphi_X(f) + \varphi_H(f)$ $\qquad \boxed{y(t) = H(f_0)\cdot x(t)}$

Se $H(f)$ Hermitiana (spettro ampiezza pari, spettro fase dispari; $X_k = X_k{}^*$ $X(f) = X^*(f)$) → $h(t)$ reale → fase nulla.

$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(f) \xleftrightarrow{(dualit\grave{a})} X(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} x(-f)$ $\qquad Ax(t) \xleftrightarrow{(linearit\grave{a})\ \mathcal{F}} A\cdot X(f)$ $\qquad x\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{(cambiamento\ \ di\ scala)\ \mathcal{F}} |T|\cdot X(Tf)$

$x(t-t_0) \xleftrightarrow{(traslazione\ \ temporale)\ \mathcal{F}} X(f)e^{-j2\pi f t_0}$ $\qquad x(t+t_0) \xleftrightarrow{(traslazione\ \ temporale)\ \mathcal{F}} X(f)e^{j2\pi f t_0}$

$x(t)\ pari \leftrightarrow X(-f) = X(f)$ $\qquad x(t)\ dispari \leftrightarrow X(-f) = -X(f)$ $\qquad x(t) reale\ pari\ \leftrightarrow\ X(f)\ reale\ pari$

$x(t)\ reale\ dispari\ \leftrightarrow\ X(f)\ immaginario\ dispari$

FORMULE UTILI SU TRASFORMATE E NON

DOMINIO DEL TEMPO	DOMINIO DELLA FREQUENZA	COMMENTO
$A\cdot rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$A\cdot T\cdot sinc(f\cdot T)$	Rect di durata T
$A\cdot e^{-Bt}\cdot u(t)$	$\frac{A}{B+j2\pi f}$	Esponenziale unilatero
$A\cdot\Lambda\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right)$	$A\cdot T\cdot sinc^2(f\cdot T)$	Triangolo di durata 2T
$A\cdot\delta(t)$	$X(f) = A$	Delta di Dirac
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$	Delta centrata in t_0
$e^{j2\pi f_0 t)}$	$\delta(f-f_0)$	Trasformata fasore
$x(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\big(X(f-f_0)+X(f+f_0)\big)$	Teorema della modulazione
$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}\right)$	$\frac{1}{2}\big(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\big)$	Trasformata coseno
$\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j2\pi f_0 t}-e^{-j2\pi f_0 t}\right)$	$\frac{1}{2j}\big(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\big)$	Trasformata seno

$e^{j\theta} = cos\theta + jsen\theta$ $\qquad e^{-j\theta} = cos\theta - jsen\theta$ $\qquad z = a+jb = \rho e^{j\theta}$

$\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \sin b\cos a$
$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$
$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$
$\cos a + \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$