

Appunti di "Controlli Automatici 1"

Capitolo 6 - Analisi armonica

Introduzione.....	1
La funzione di risposta armonica.....	2
Diagrammi di Bode.....	4
Introduzione: diagrammi della risposta armonica	4
Costruzione dei diagrammi di Bode	4
Diagrammi di Bode delle funzioni elementari	8
Esempi vari.....	21
Esempio	21
Esempio	24
Diagrammi di Nyquist.....	26
Introduzione.....	26
Regole per il tracciamento dei diagrammi polari	28
<i>Comportamento alle basse frequenze</i>	28
<i>Comportamento alle alte frequenze</i>	32
<i>Comportamento alle frequenze intermedie</i>	33
<i>Caso particolare di 2 poli complessi coniugati: asintoto obliquo</i>	34
<i>Diagramma per $w\hat{I}(-\infty, 0)$</i>	35
Esempio	36
Esempio	38
Esempio	41

INTRODUZIONE

Nei capitoli precedenti abbiamo esaminato procedimenti per la soluzione delle equazioni differenziali lineari, ponendo in particolare rilievo quelli basati sulla trasformazione di Laplace: il nostro obiettivo era la deduzione della risposta dei sistemi lineari a eccitazioni tipiche, come il gradino, oppure, più in generale, a qualunque segnale di ingresso. Questa procedura di analisi viene comunemente detta **analisi nel dominio del tempo**.

Ad essa, nello studio dei sistemi di controllo lineari si affianca l'**analisi nel dominio della frequenza**, detta anche **analisi armonica**, che si basa su un diverso modello matematico dei sistemi lineari: si tratta della cosiddetta **funzione di risposta armonica**.

La funzione di risposta armonica costituisce una rappresentazione dei sistemi lineari stazionari strettamente legata alla funzione di trasferimento ed è pertanto equivalente alle equazioni differenziali qualora si considerino sistemi inizialmente in quiete. Tuttavia, essa è spesso più vantaggiosa per alcune sue caratteristiche, principale tra le quali è l'attitudine ad esse rilevata sperimentalmente: in altre parole, la funzione di risposta armonica rappresenta, rispetto all'equazione differenziale, un modello matematico di più agevole identificazione a partire dai dati sperimentali.

LA FUNZIONE DI RISPOSTA ARMONICA

Per definire la funzione di risposta armonica, dobbiamo partire da una proprietà caratteristica dei sistemi lineari stazionari: consideriamo un sistema lineare stazionario al cui ingresso è applicato un ingresso sinusoidale del tipo

$$x(t) = X \sin(\omega t)$$

Se il sistema è asintoticamente stabile, la sua uscita a regime (cioè una volta esaurito il transitorio) varia anch'essa con legge sinusoidale caratterizzata dalla stessa pulsazione ω e può quindi essere espressa con la relazione

$$y(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

Questa espressione mostra che l'ampiezza dell'uscita e l'angolo di fase rispetto all'ingresso sono, in generale, funzioni della pulsazione ω del segnale di ingresso applicato.

Si definisce, allora, **funzione di risposta armonica** la funzione $F(\omega)$, di variabile reale ed a valori complessi, avente come modulo il rapporto $Y(\omega)/X$ e come argomento l'angolo $\varphi(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X} (\cos(\varphi(\omega)) + j\sin(\varphi(\omega)))$$

Questa funzione, in virtù della linearità del sistema, è indipendente dall'ampiezza X del segnale in ingresso e descrive completamente il comportamento del sistema in condizione di regime (periodico) alle varie frequenze (ovviamente risulta $0 \leq \omega < \infty$).

Premessa la definizione, consideriamo adesso un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta. Dato che siamo interessati a sistemi asintoticamente stabili, la funzione $G(s)$ deve avere tutti i poli a parte reale negativa. Supponiamo allora di applicare in ingresso al sistema il segnale $x(t) = X \sin(\omega t)$: la sua trasformata di Laplace è

$$X(s) = X \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Supponendo che il sistema parta da una condizione iniziale di quiete, la risposta del sistema a tale ingresso è una risposta forzata la cui trasformata di Laplace, per definizione, è data da

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s) \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{X\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$

E' evidente, da questa espressione, che i poli della funzione $Y(s)$ sono gli stessi della funzione di trasferimento $G(s)$, più quelli corrispondenti al segnale ingresso, che sono $p_1 = j\omega$ e $p_2 = -j\omega$. Effettuando, allora, l'antitrasformazione, i poli di $G(s)$ corrispondono ad un termine transitorio $y_0(t)$, mentre gli altri ad un termine permanente $y_p(t)$ che, come si vedrà tra breve, è sinusoidale: possiamo dunque scrivere, in generale, che

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = y_0(t) + K_1 e^{j\omega t} + K_2 e^{-j\omega t}$$

In questa espressione, K_1 è il residuo corrispondente al polo $p_1 = j\omega$, mentre K_2 è il residuo corrispondente a $p_2 = -j\omega$:

$$K_1 = [Y(s)(s - j\omega)]_{s=j\omega} = \left[G(s) \frac{X\omega}{(s + j\omega)} \right]_{s=j\omega} = G(j\omega) \frac{X\omega}{2j\omega}$$

$$K_2 = [Y(s)(s + j\omega)]_{s=-j\omega} = \left[G(s) \frac{X\omega}{(s - j\omega)} \right]_{s=-j\omega} = G(-j\omega) \frac{X\omega}{-2j\omega}$$

A questo punto, ricordando la proprietà della trasformata di Laplace secondo cui $F(s^*)=F^*(s)$, possiamo scrivere che

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \longrightarrow G(-j\omega) = |G(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}$$

dove ovviamente $\varphi(\omega)$ è l'argomento di $G(j\omega)$, mentre $|G(j\omega)|$ è il suo modulo. Con questa posizione, possiamo esprimere la $y(t)$ nel modo seguente:

$$y(t) = y_0(t) + \frac{X}{2j}|G(j\omega)|e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - \frac{X}{2j}|G(j\omega)|e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))} = y_0(t) + |G(j\omega)|X \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j}$$

Adesso, dato che il sistema è per ipotesi asintoticamente stabile, possiamo trascurare il termine transitorio $y_0(t)$ nell'ipotesi di considerare istanti t sufficientemente grandi:

$$y(t) \cong |G(j\omega)|X \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j} = |G(j\omega)|X \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

D'altra parte, abbiamo in precedenza detto che l'uscita del sistema deve essere nella forma generale $y(t) = Y(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$ ed abbiamo inoltre definito la funzione di risposta armonica mediante la relazione $F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}(\cos(\varphi(\omega)) + j\sin(\varphi(\omega)))$: possiamo allora concludere che

$$F(\omega) = G(j\omega)$$

In definitiva, abbiamo dimostrato il seguente **teorema**: *dato un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento razionale fratta avente tutti i poli a parte reale negativa e soggetto ad eccitazione sinusoidale, esso presenta, a regime, una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione; inoltre, la funzione di risposta armonica del sistema si ottiene dalla funzione di trasferimento $G(s)$ ponendo $s=j\omega$.*

N.B. La funzione di risposta armonica si può definire anche per sistemi instabili: tuttavia, in questo caso essa non ha alcun significato fisico né risulta misurabile sperimentalmente.

A questo punto, ricordando che la funzione di trasferimento ha corrispondente biunivoca con la sua antitrasformata di Laplace, ossia la *funzione di risposta all'impulso*, possiamo anche affermare che la risposta all'impulso di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta armonica. Si può dimostrare facilmente anche il contrario, ossia che la risposta armonica di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta all'impulso.

Diagrammi di Bode

INTRODUZIONE: DIAGRAMMI DELLA RISPOSTA ARMONICA

La rappresentazione grafica della funzione di risposta armonica viene effettuata con speciali diagrammi, che costituiscono la base dei procedimenti grafici per la sintesi delle reti correttrici nel dominio delle frequenze.

Consideriamo allora un sistema lineare stazionario asintoticamente stabile avente funzione di trasferimento $G(s)$. Abbiamo visto, nei paragrafi precedenti, che da questa funzione possiamo ricavare la funzione di risposta armonica semplicemente ponendo $s=j\omega$: otteniamo in tal modo la funzione $G(j\omega)$. Questa funzione di risposta armonica è una funzione di variabile reale (ω) ed a valori complessi, per cui si può rappresentare nelle diverse notazioni possibili per i numeri complessi:

$$\text{notazione trigonometrica} \longrightarrow G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\arg(G(j\omega))}$$

$$\text{notazione cartesiana} \longrightarrow G(j\omega) = \text{Re}\{G(j\omega)\} + j \text{Im}\{G(j\omega)\}$$

In base a queste notazioni, ci sono almeno due modi per rappresentare graficamente la funzione $G(j\omega)$ in funzione della pulsazione ω :

- quando si rappresenta $G(j\omega)$ in termini di *modulo e fase*, entrambi funzioni di ω , si ottengono i cosiddetti **diagrammi di Bode** (o *diagrammi logaritmici*);
- quando invece si rappresenta $G(j\omega)$ in termini di *parte reale e coefficiente della parte immaginaria*, sempre funzioni di ω , si ottengono i cosiddetti **diagrammi di Nyquist** (o *diagrammi polari*).

Il nostro obiettivo è quello di capire come si costruiscono questi diagrammi e come se ne sfruttano le proprietà.

COSTRUZIONE DEI DIAGRAMMI DI BODE

Al fine di introdurre i **diagrammi di Bode**, è intanto necessario porre in forma più opportuna la funzione di trasferimento $G(s)$.

In primo luogo, sappiamo di poter esprimere la funzione di trasferimento nel modo seguente:

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

In questo modo, abbiamo evidenziato gli zeri ed i poli della funzione di trasferimento. In più, conviene separare i poli nell'origine dai poli reali e dalle coppie di poli complessi coniugati e, per quanto riguarda il numeratore, separare gli zeri reali dalle coppie di zeri complessi coniugati:

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^p (s - z_j) \prod_{h=1}^q (s^2 + 2\delta_h \omega_{mh} s + \omega_{mh}^2)}{s^\mu \prod_{i=1}^v (s - p_i) \prod_{k=1}^w (s^2 + 2\delta_k \omega_{mk} s + \omega_{mk}^2)}$$

Stiamo in pratica supponendo quanto segue:

- la funzione $G(s)$ presenta μ poli nell'origine, v poli reali e w coppie di poli complessi coniugati: ovviamente risulta $\mu+v+2w=n$;
- la funzione $G(s)$ presenta p zeri reali e q coppie di zeri complessi coniugati, in modo tale che risulti $p+2q=m$.

A questo punto, al posto di evidenziare i poli e gli zeri reali, evidenziamo le costanti di tempo ad essi associate: considerando che

$$(s - z_j) = z_j \left(\frac{s}{z_j} - 1 \right) = z_j (-T_j s - 1) = -z_j (1 + T_j s)$$

$$(s - p_i) = -p_i (1 + T_i s)$$

abbiamo che

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^p (-z_j) \prod_{j=1}^p (1 + T_j s) \prod_{h=1}^q (s^2 + 2\delta_h \omega_{mh} s + \omega_{mh}^2)}{s^\mu \prod_{i=1}^v (-p_i) \prod_{i=1}^v (1 + T_i s) \prod_{k=1}^w (s^2 + 2\delta_k \omega_{mk} s + \omega_{mk}^2)}$$

Ponendo

$$K' = K \frac{\prod_{j=1}^p (-z_j)}{\prod_{i=1}^v (-p_i)}$$

possiamo dunque scrivere $G(s)$ nella forma

$$G(s) = K' \frac{\prod_{j=1}^p (1 + T_j s) \prod_{h=1}^q (s^2 + 2\delta_h \omega_{mh} s + \omega_{mh}^2)}{s^\mu \prod_{i=1}^v (1 + T_i s) \prod_{k=1}^w (s^2 + 2\delta_k \omega_{mk} s + \omega_{mk}^2)}$$

In modo analogo possiamo procedere per zeri e poli complessi: scrivendo infatti che

$$s^2 + 2\delta_{h/k} \omega_{mh/k} s + \omega_{mh/k}^2 = \omega_{mh/k}^2 \left(\frac{s^2}{\omega_{mh/k}^2} + \frac{2\delta_{h/k}}{\omega_{mh/k}} s + 1 \right)$$

abbiamo che

$$G(s) = K' \frac{\prod_{j=1}^p (1 + T_j s) \prod_{h=1}^q \omega_{mh}^2 \prod_{h=1}^q \left(\frac{s^2}{\omega_{mh}^2} + \frac{2\delta_h}{\omega_{mh}} s + 1 \right)}{s^\mu \prod_{i=1}^v (1 + T_i s) \prod_{k=1}^q \omega_{mk}^2 \prod_{k=1}^w \left(\frac{s^2}{\omega_{mk}^2} + \frac{2\delta_k}{\omega_{mk}} s + 1 \right)}$$

Ponendo allora

$$K_1 = K' \frac{\prod_{h=1}^q \omega_{mh}^2}{\prod_{k=1}^q \omega_{mk}^2}$$

possiamo infine porre la $G(s)$ nella seguente forma conclusiva:

$$G(s) = K_1 \frac{\prod_{j=1}^p (1 + T_j s) \prod_{h=1}^q \left(\frac{s^2}{\omega_{mh}^2} + \frac{2\delta_h}{\omega_{mh}} s + 1 \right)}{s^\mu \prod_{i=1}^v (1 + T_i s) \prod_{k=1}^w \left(\frac{s^2}{\omega_{mk}^2} + \frac{2\delta_k}{\omega_{mk}} s + 1 \right)}$$

A questo punto, ottenuta la $G(s)$ in questa forma, possiamo individuare la funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ nella forma in cui ci serve:

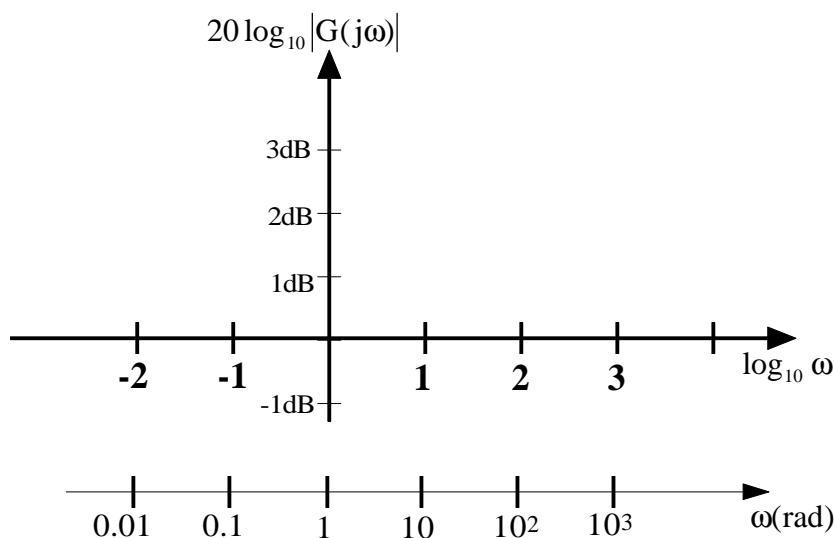
$$G(j\omega) = \frac{K_1 \prod_{j=1}^p (1 + jT_j \omega) \prod_{h=1}^q \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{mh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{mh}} \omega \right)}{(j\omega)^\mu \prod_{i=1}^v (1 + jT_i \omega) \prod_{k=1}^w \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{mk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{mk}} \omega \right)}$$

Questa è l'espressione della funzione di risposta armonica sulla base della quale si costruiscono i diagrammi di Bode.

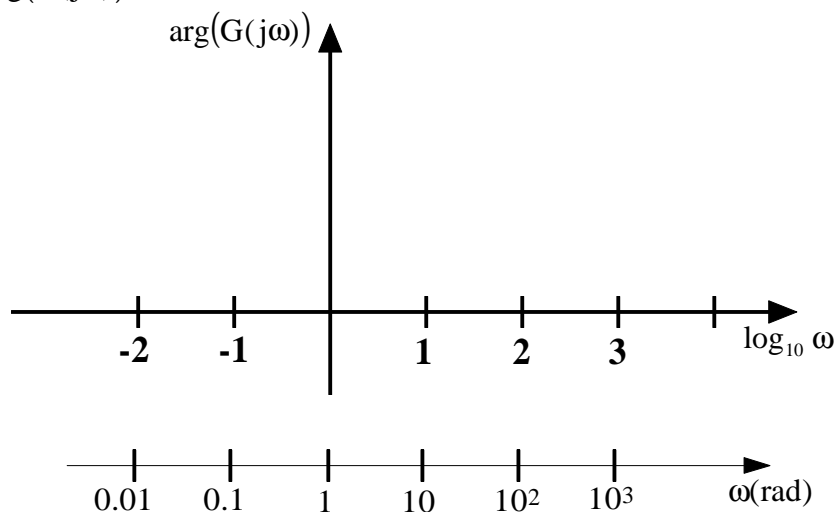
Come già anticipato in precedenza, i diagrammi di Bode si costruiscono riportando, in funzione della pulsazione ω , il modulo e l'argomento della funzione di risposta armonica:

- per quanto riguarda l'asse delle ascisse, non viene direttamente riportata la pulsazione ω , bensì la quantità $\log_{10} \omega$; in questo modo, l'asse delle ascisse viene suddiviso in **decadi**: gli estremi di una decade sono due valori di pulsazione di cui quello finale è 10 volte quello iniziale;
- per quanto riguarda, invece, l'asse delle ordinate, sussiste una differenza tra il diagramma del modulo di $G(j\omega)$ e quello dell'argomento di $G(j\omega)$:

- * nel **diagramma dei moduli** (o *diagramma delle ampiezze*), non viene riportato direttamente $|G(j\omega)|$, bensì la quantità $20 \log_{10}|G(j\omega)|$, ossia il modulo di $G(j\omega)$ espresso in dB:



- * nel **diagramma degli argomenti** (o *diagramma delle fasi*), invece, viene direttamente riportato $\arg(G(j\omega))$:



E' bene precisare che, nonostante la scala usata per le ascisse sia quella logaritmica, i valori numerici che vengono riportati sono quelli della pulsazione ω espressa in radianti/secondo, in modo da facilitare la lettura del diagramma e soprattutto i calcoli che su esso si basano.

I vantaggi che si conseguono impiegando la scala logaritmica sono i seguenti:

- in primo luogo, è possibile rappresentare, col dovuto dettaglio, grandezze che variano in campi notevolmente estesi: in particolare, il modulo della funzione di risposta armonica, generalmente, passa, all'aumentare della frequenza, da valori molto alti a valori molto bassi;
- in secondo luogo, è possibile sommare i diagrammi relativi a sistemi in cascata, al fine di ottenere il diagramma del sistema complesso: infatti, la risposta armonica complessiva si ottiene eseguendo il prodotto delle singole risposte armoniche, cioè eseguendo il prodotto delle ampiezze (che, impiegando una scala logaritmica, si riconduce ad una somma) e la somma delle fasi;

- infine, è possibile costruire i diagrammi relativi ad una funzione di risposta armonica, data in forma fattorizzata, come somma di diagrammi elementari, di un numero limitato di tipi fondamentali, corrispondente ciascuno ad un singolo fattore.

Una volta individuate le quantità riportate nei diagrammi di Bode e le scale secondo cui tale quantità vengono riportate, passiamo a vedere le principali caratteristiche di tali diagrammi. A tale scopo, riprendiamo l'espressione della $G(j\omega)$ trovata prima:

$$G(j\omega) = \frac{K_1 \prod_{j=1}^p (1 + jT_j \omega) \prod_{h=1}^q \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right)}{(j\omega)^\mu \prod_{i=1}^v (1 + jT_i \omega) \prod_{k=1}^w \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right)}$$

In questa espressione si individuano facilmente le seguenti **funzioni elementari**:

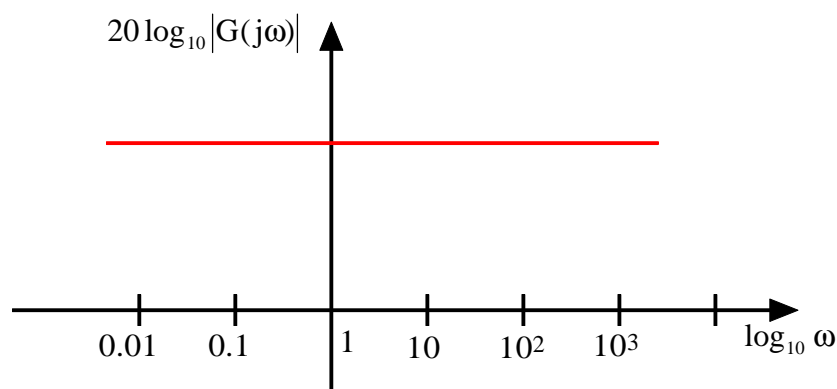
$$K \quad (j\omega)^{-\mu} \quad (1 + j\omega T)^{\pm 1} \quad \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^{\pm 1}$$

Allora, se tracciamo i diagrammi di Bode, delle ampiezze e delle fasi, corrispondenti a queste funzioni elementari, ci basterà poi sommarli per ottenere il diagramma di Bode della funzione complessiva $G(j\omega)$. Il nostro scopo diventa dunque quello di tracciare i diagrammi di Bode delle funzioni elementari.

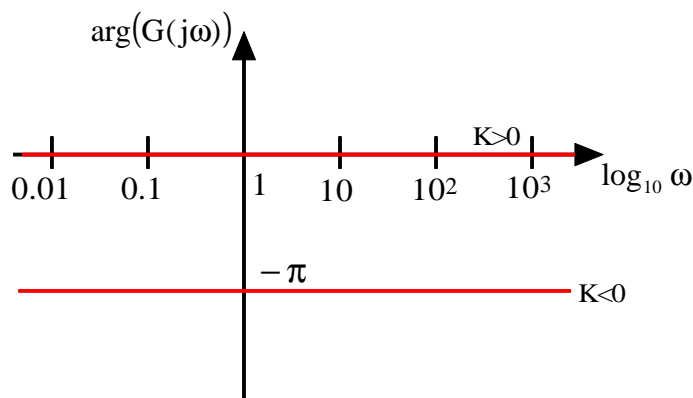
DIAGRAMMI DI BODE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

La prima funzione elementare di cui ci occupiamo è $G(j\omega) = K$. Questa funzione ha evidentemente modulo pari a K (indipendente da ω) e fase dipendente solo dal segno di K : se K è positiva, la fase è 0 , mentre se K è negativa, la fase è $-\pi$. Deduciamo allora quanto segue:

- il diagramma dei moduli è una retta orizzontale corrispondente a $|G(j\omega)| = 20 \log_{10} |K|$:



- il diagramma delle fasi è invece una retta orizzontale corrispondente a $-\pi$ se $K < 0$ oppure coincidente con l'asse delle ascisse se $K > 0$:



La seconda funzione elementare è $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$ ed è quella corrispondente ad eventuali poli nulli della funzione di trasferimento del sistema. Calcoliamo per prima cosa il modulo di questa funzione:

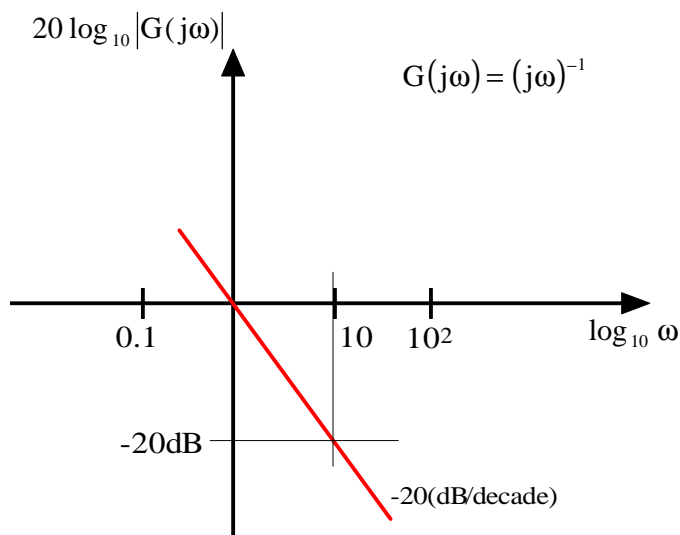
$$|G(j\omega)| = |(j\omega)^{-h}| = \omega^{-h}$$

La funzione che viene allora riportata sul diagramma di Bode dei moduli è

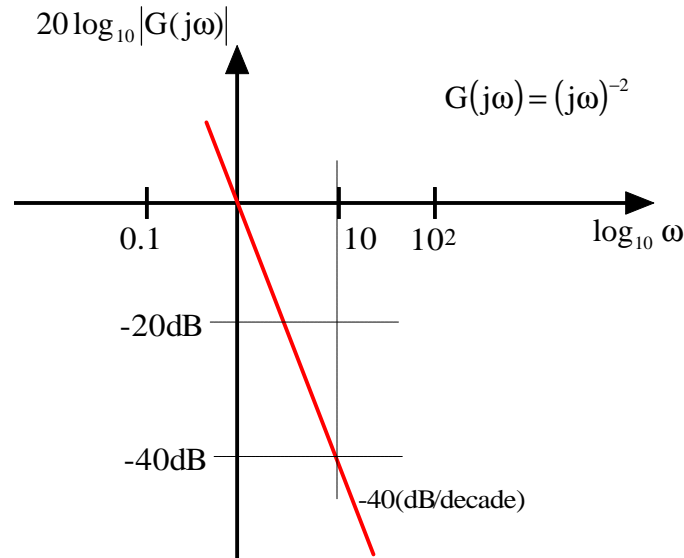
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \omega^{-h} = -20h \log_{10} \omega$$

Dato che in ascisse viene riportata la quantità $\log_{10} \omega$, deduciamo che $|G(j\omega)|_{dB} = -20h \log_{10} \omega$ corrisponde ad una retta passante per l'origine e di pendenza $-20h$ (dB/decade) dipendente dal valore di h :

- il caso più semplice è ovviamente quello di un sistema avente 1 solo polo nell'origine, per cui **$h=1$** : la funzione da considerare è dunque $G(j\omega) = (j\omega)^{-1}$, per cui la quantità da riportare sul diagramma dei moduli è $|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \omega$, corrispondente ad una retta (passante per l'origine) di pendenza -20 (dB / decade):



- il secondo caso è quello di un sistema avente 2 poli nell'origine, per cui **h=2**: la funzione da considerare è dunque $G(j\omega) = (j\omega)^{-2}$, per cui la quantità da riportare sul diagramma dei moduli è $|G(j\omega)|_{dB} = -40 \log_{10} \omega$, corrispondente ad una retta (passante per l'origine) di pendenza $-40(\text{dB/decade})$:

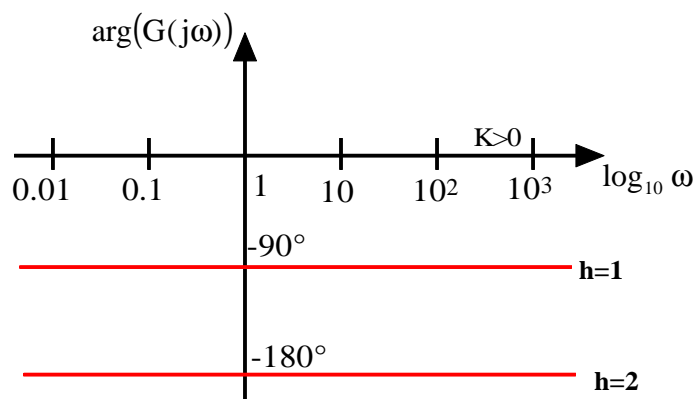


Si osserva, dunque, in generale, che, aumentando il numero h dei poli nell'origine (cioè il cosiddetto *tipo* del sistema), il diagramma dei moduli della funzione $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$ è sempre una retta passante per l'origine, ma di pendenza crescente: tale pendenza aumenta di $20(\text{dB/decade})$ per ogni aumento unitario di h .

Passiamo adesso al diagramma delle fasi della funzione $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$:

$$\arg G(j\omega) = \arg[(j\omega)^{-h}] = \arg\left[\frac{1}{(j\omega)^h}\right] = \begin{cases} -90^\circ & h = 1 \\ -180^\circ & h = 2 \\ \dots & h > 2 \end{cases}$$

Avendo una quantità puramente immaginaria a denominatore, l'argomento è un multiplo intero $-\pi/2$, per cui avremo, nel diagramma delle fasi, ancora una volta una retta orizzontale:



La terza funzione elementare di cui ci occupiamo è la funzione $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}$. Cominciamo sempre dal modulo:

$$|G(j\omega)| = |(1 + j\omega T)^{-1}| = \frac{1}{|1 + j\omega T|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

La funzione da riportare sul diagramma dei moduli è dunque

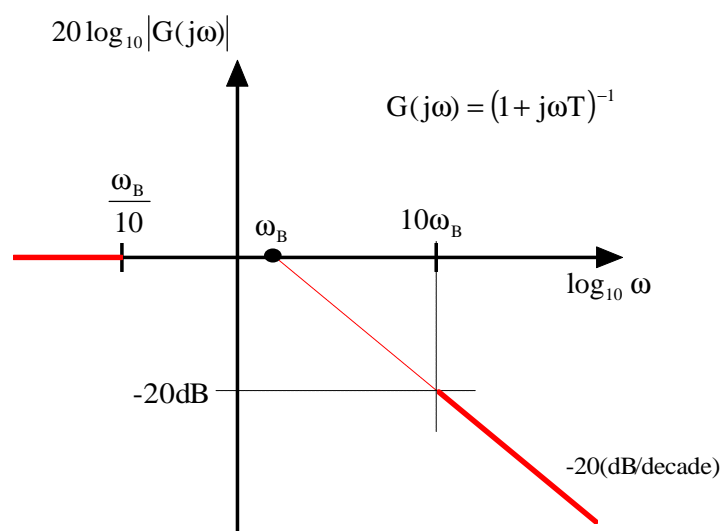
$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -10 \log_{10} (1 + \omega^2 T^2)$$

Per capire quale andamento abbiamo questa funzione, possiamo osservare quello che succede per ω molto piccolo e per ω molto grande:

$$\text{se } \omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} \cong -10 \log_{10} 1 = 0(\text{dB})$$

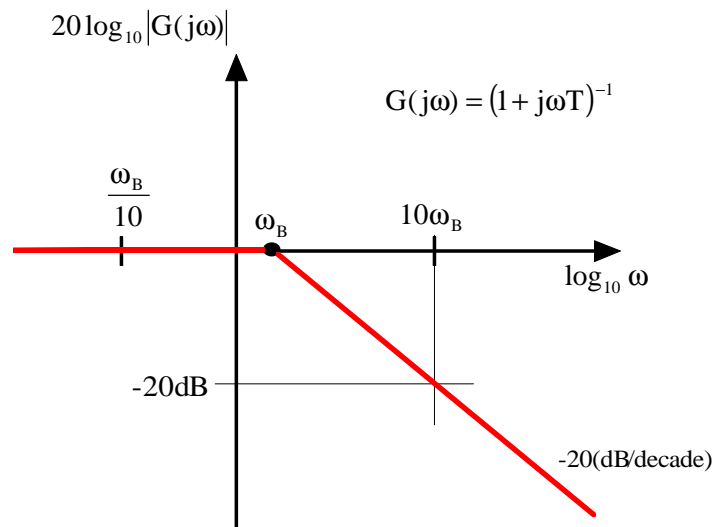
$$\text{se } \omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} \cong -20 \log_{10} \omega T$$

In base a questi risultati, indicata con $\omega_B = 1/T$ la cosiddetta **frequenza di break** (o *frequenza di rottura* o anche *frequenza d'angolo*) possiamo affermare che l'andamento di $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$ corrisponde ad una retta coincidente con l'asse orizzontale per $\omega \ll \omega_B$ e, per $\omega \gg \omega_B$, ad una retta passante per il punto $(0, \omega_B)$ e con pendenza di $-20(\text{dB}/\text{decade})$. Si tratta allora di capire come quantificare le dizioni $\omega \ll \omega_B$ e $\omega \gg \omega_B$: si assume allora che $\omega \ll \omega_B$ equivalga a porsi una decade prima di ω_B e, ovviamente, che $\omega \gg \omega_B$ equivalga a porsi una decade dopo ω_B . Così facendo, possiamo tracciare il diagramma dei moduli da $-\infty$ fino a una decade prima di ω_B e da una decade dopo ω_B fino a $+\infty$:



Dobbiamo adesso capire l'andamento del diagramma nell'intorno della frequenza ω_B , ossia tra $\omega_B/10$ e $10\omega_B$. E' possibile allora procedere in modi diversi: un primo modo sarebbe quello di calcolarsi la quantità $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$ in corrispondenza di 3 o 4 punti nell'intervallo considerato e di interpolare i valori ottenuti al fine di raccordare i due tratti estremi; un secondo modo, più approssimato, è invece quello di

costruire il **diagramma asintotico**, che si ottiene semplicemente prolungando i due tratti estremi fino a congiungersi in ω_B :



Così facendo, si ottiene un diagramma approssimato, che però approssima molto bene (lo si può verificare analiticamente) il diagramma reale. Nel seguito, quindi, faremo sempre uso di questo diagramma asintotico.

Passiamo ora al diagramma delle fasi della funzione $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}$: la fase di questa funzione è

$$\arg G(j\omega) = \arg[(1 + j\omega T)^{-1}] = \arg\left[\frac{1}{1 + j\omega T}\right] = -\arctg(\omega T)$$

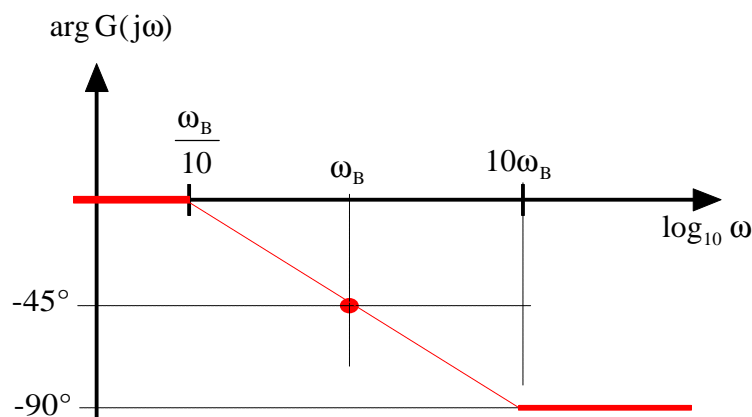
Dobbiamo dunque diagrammare la funzione $-\arctg(\omega T)$. Anche in questo caso, possiamo cominciare ad analizzare l'andamento asintotico del diagramma:

$$\text{se } \omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow \arg G(j\omega) \cong 0$$

$$\text{se } \omega = \frac{1}{T} \rightarrow \arg G(j\omega) = -45^\circ$$

$$\text{se } \omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow \arg G(j\omega) \cong -90^\circ$$

In base a questi risultati, possiamo tracciare un diagramma delle fasi qualitativo fatto nel modo seguente:



Si tratta ancora una volta di stabilire l'andamento del diagramma nell'intorno della frequenza di break $\omega_B=1/T$: possiamo allora approssimare questo andamento con un segmento di pendenza pari a quella della tangente al diagramma reale nel punto $(\omega_B, -45^\circ)$. Dobbiamo allora andare a calcolare questa tangente e in particolare la sua pendenza: analiticamente, dobbiamo calcolare la quantità $\frac{d(\arg G(j\omega))}{d(\log_{10} \omega)}$, ossia

$$\begin{aligned} \frac{d(\arg G(j\omega))}{d(\log_{10} \omega)} &= \frac{d}{d(\log_{10} \omega)} [-\arctg(\omega T)] = \frac{d}{d\omega} [-\arctg(\omega T)] \frac{d\omega}{d(\log_{10} \omega)} = -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} \frac{d\omega}{d(\log_{10} \omega)} = \\ &= -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} \omega \log_e 10 \end{aligned}$$

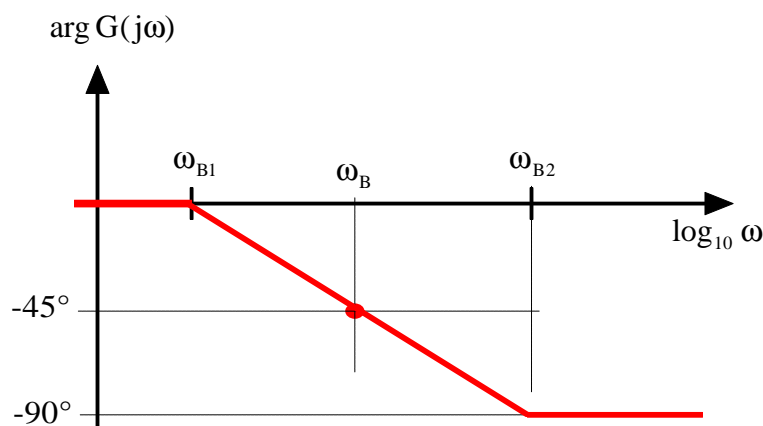
Dato che $\log_e 10=2.3$ è un numero caratteristico, deduciamo che la pendenza della tangente al diagramma reale vale

$$\frac{d(\arg G(j\omega))}{d(\log_{10} \omega)} = -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} \omega \cdot 2.3$$

ed è ovviamente funzione di ω , ossia del punto in cui ci stiamo ponendo: a noi interessa il punto $\omega=\omega_B$, in corrisponde del quale si trova un altro numero caratteristico:

$$\left[\frac{d(\arg G(j\omega))}{d(\log_{10} \omega)} \right]_{\omega=\frac{1}{T}} = -\frac{1}{1+1} \cdot 2.3 = -1.151$$

Possiamo dunque tracciare, nell'intorno della frequenza di break, un segmento di pendenza 1.151:



Ovviamente, la conoscenza della pendenza di tale segmento consente di individuare con precisione il punto ω_{B1} in cui il segmento stesso interseca l'asse delle ascisse: infatti, dato che il segmento passa per i punti $(\omega_{B1}, 0)$ e $(\omega_B, -45^\circ)$ ed ha pendenza 1.151, possiamo scrivere che

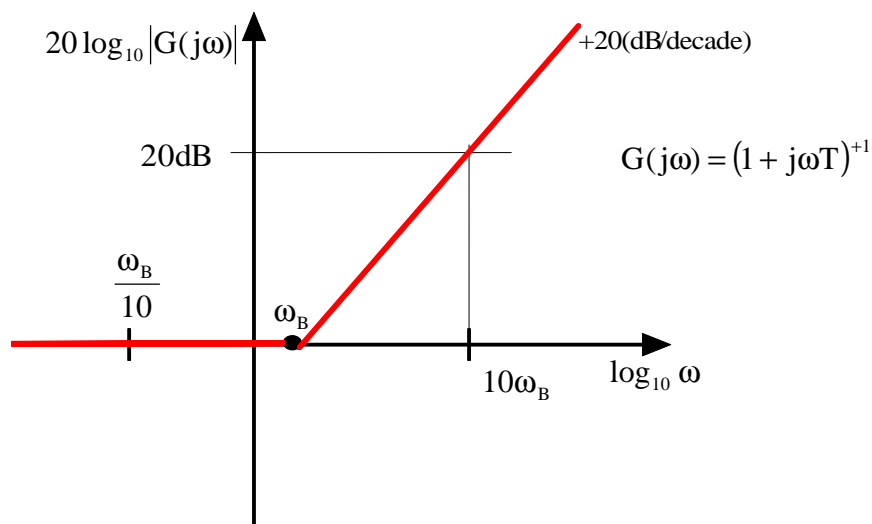
$$\frac{\frac{\pi}{4}}{\log_{10} \omega_B - \log_{10} \omega_{B1}} = 1.151 \longrightarrow \log_{10} \frac{\omega_B}{\omega_{B1}} = \frac{\pi}{4} \cdot 1.151 \longrightarrow \frac{\omega_B}{\omega_{B1}} = 10^{\frac{\pi}{4} \cdot 1.151} = 4.81$$

da cui concludiamo che $\omega_{B1} = \frac{\omega_B}{4.81}$. Questa relazione è fondamentale, in quanto ci consente di tracciare il diagramma delle fasi semplicemente conoscendo la frequenza di break ω_B : nota ω_B , dividendo per **4.81** (in prima approssimazione, basta anche dividere per 5) troviamo il punto ω_{B1} in cui il diagramma interseca l'asse delle ascisse per poi rimanere su di esso per ω decrescenti. Ovviamente, moltiplicando per 4.81 otterremo invece il valore ω_{B2} della pulsazione a partire dalla quale il diagramma si assesta asintoticamente sul valore -90° ; tra i valori ω_{B1} e ω_{B2} , il diagramma è costituito da un segmento di pendenza -1.151 .

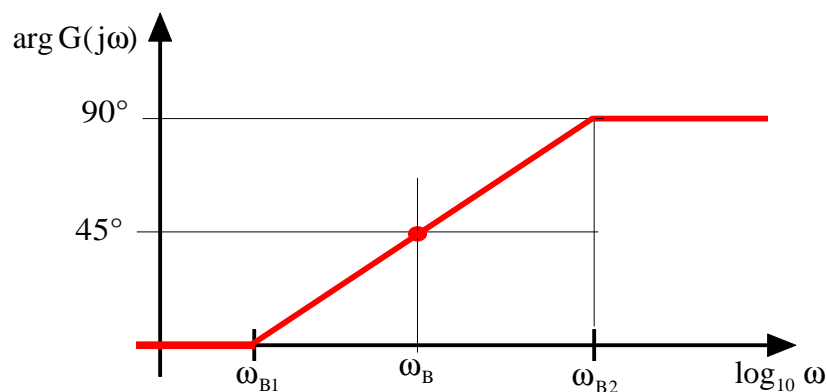
Questo semplice procedimento prende il nome di **"regola del 4.81"**.

Abbiamo dunque capito come diagrammare il modulo e la fase della funzione elementare $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}$. Non ci vuole molto per capire come diagrammare il modulo e la fase della funzione $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{+1}$: è evidente, infatti, che sia il diagramma del modulo sia quello della fase di questa funzione si ottengono semplicemente ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, quelli di $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}$.

Il diagramma dei moduli sarà dunque fatto nel modo seguente (ovviamente si tratta sempre del *diagramma asintotico*):



Il diagramma delle fasi, per il quale vale ovviamente ancora la *regola del 4.81*, sarà del tipo seguente



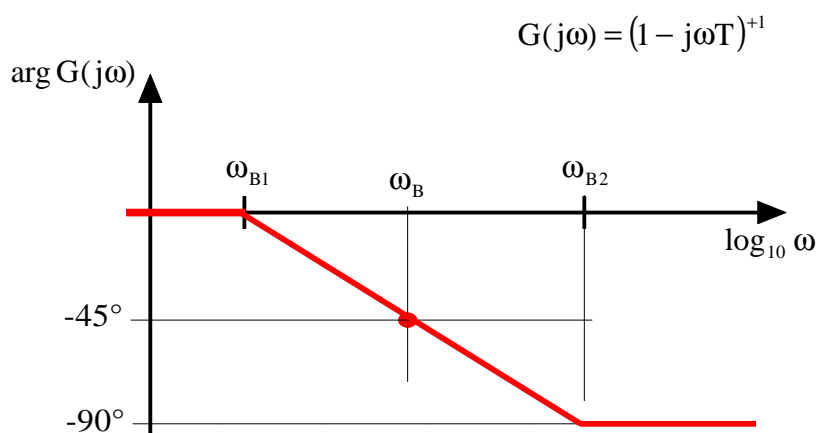
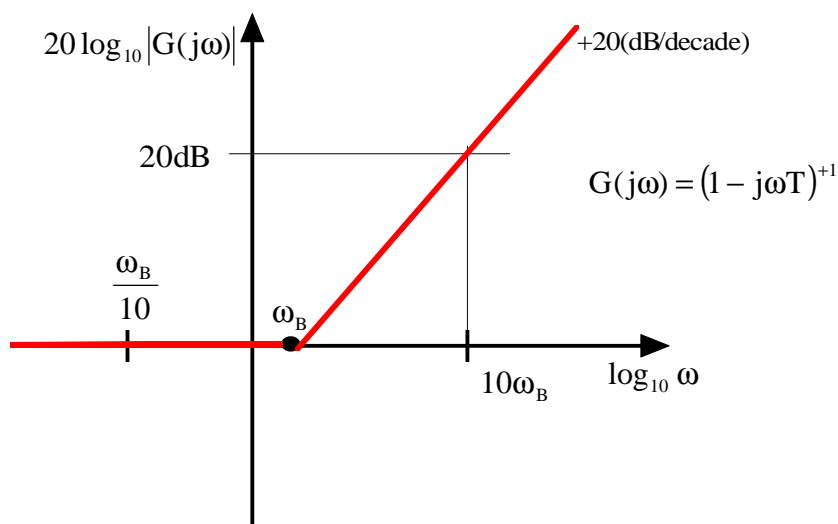
Osserviamo adesso che le funzioni $(1 + j\omega T)^{-1}$ e $(1 + j\omega T)^{+1}$, assumendo T positivo, sono relative, rispettivamente, ad un polo a parte reale negativa e ad uno zero a parte reale negativa. In modo del tutto analogo, allora, le funzioni $(1 - j\omega T)^{-1}$ e $(1 - j\omega T)^{+1}$, assumendo T sempre positivo, sono relative, rispettivamente, ad un polo a parte reale positiva e ad uno zero a parte reale positiva. Ci chiediamo allora come sono fatti i diagrammi di Bode di queste funzioni.

Consideriamo ad esempio la funzione $G(j\omega) = (1 - j\omega T)^{+1}$: possiamo scrivere che

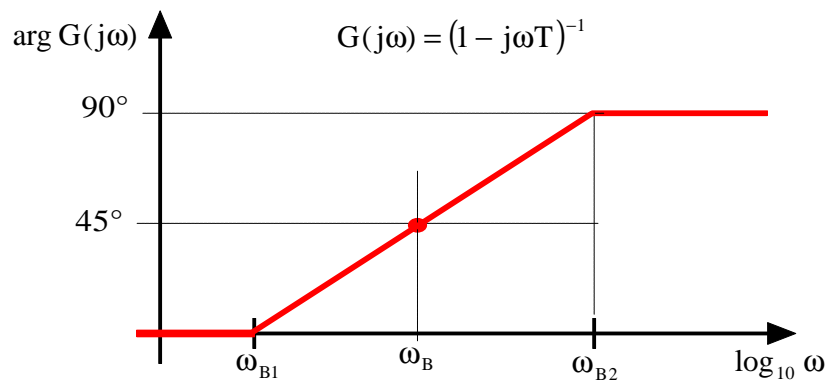
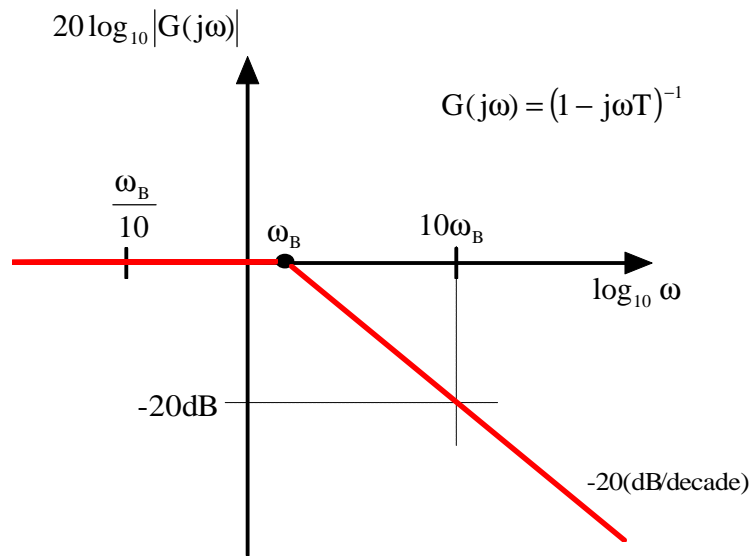
$$G(j\omega) = (1 - j\omega T)^{+1} = (1 + (-j\omega T)^{+1}) = G'(-j\omega) \longrightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = |G'(-j\omega)| \\ \arg G(j\omega) = \arg G'(-j\omega) = -\arg G'(j\omega) \end{cases}$$

dove $G'(j\omega) = (1 + j\omega T)^{+1}$.

Questo risultato ci dice dunque che il diagramma del modulo di $G(j\omega) = (1 - j\omega T)^{+1}$ rimane immutato rispetto a quello di $(1 + j\omega T)^{+1}$, mentre quello della fase si ottiene da quello di $(1 + j\omega T)^{+1}$ tramite un ribaltamento rispetto all'asse delle ascisse, per cui coincide con quello di $(1 + j\omega T)^{-1}$



Ovviamente, i diagrammi della funzione $G(j\omega) = (1 - j\omega T)^{-1}$ si otterranno entrambi da quelli, appena tracciati, della funzione $(1 - j\omega T)^{+1}$ tramite un ribaltamento rispetto all'asse delle ascisse:



La penultima funzione di cui dobbiamo tracciare i diagrammi di Bode è $G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega\right)^{-1}$

(corrispondente alla presenza di una coppia di poli complessi coniugati). Calcoliamo per prima cosa il modulo di questa funzione:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n} \omega\right)^2}} \xrightarrow{\text{sul diagramma}} |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_n} \omega\right)^2}$$

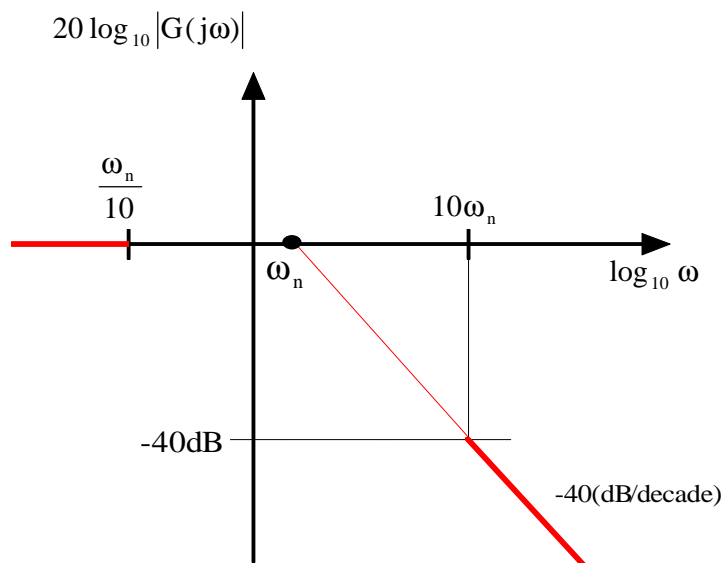
Evidentemente, la quantità $|G(j\omega)|_{dB}$, oltre a dipendere da ω , dipende anche dalla *pulsazione naturale* ω_n e dal *coefficiente di smorzamento* δ . Ovviamente, è bene ricordare che facciamo riferimento al caso in cui $0 \leq \delta < 1$, in quanto, se fosse $\delta \geq 1$, le due radici non sarebbero più complesse coniugate e si potrebbe scindere il termine di 2° grado nel prodotto di due termini di 1° grado, riconducendosi perciò ai casi considerati in precedenza.

Premesso questo, supponiamo nota la pulsazione naturale ω_n , mentre lasciamo variabile δ . Possiamo allora vedere quanto vale la funzione $|G(j\omega)|_{dB}$ per ω molto maggiore e molto minore della pulsazione naturale:

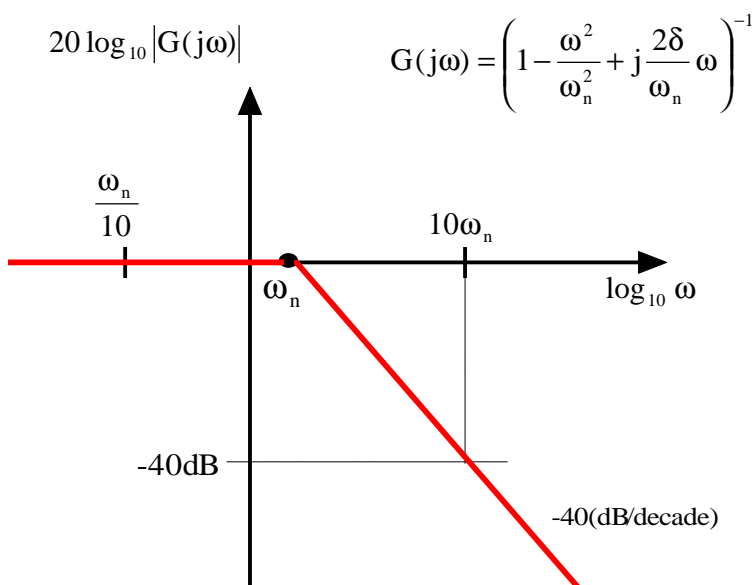
se $\omega \ll \omega_n \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \cong 10 \log_{10} 1 = 0$

se $\omega \gg \omega_n \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \cong -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = -40 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_n}$

Quindi, per $\omega \ll \omega_n$, il diagramma coincide con l'asse delle ascisse, mentre, per $\omega \gg \omega_n$, il diagramma è costituito da una retta passante per il punto $(\omega_n, 0)$ e di pendenza $-40(dB/decade)$:



Dobbiamo ora capire l'andamento del diagramma nell'intorno della frequenza ω_n , ossia tra $\omega_n/10$ e $10\omega_n$. Allora, come abbiamo fatto per i termini di primo grado, possiamo pensare di utilizzare anche qui il **diagramma asintotico**, che si ottiene semplicemente prolungando i due tratti estremi fino a congiungersi in ω_n :



Tuttavia, in questo caso subentra una complicazione rispetto a quanto accade per i termini del primo grado: infatti, mentre in quel caso si può facilmente verificare che il diagramma asintotico approssima comunque bene il diagramma reale, in questo caso l'approssimazione dipende strettamente dal valore del coefficiente di smorzamento δ . Vediamo allora qualche dettaglio in più su questo aspetto.

Nel diagramma asintotico appena tracciato, abbiamo supposto $|G(j\omega_n)|_{dB} = 0$; se, invece, usiamo l'espressione di $|G(j\omega)|_{dB}$, otteniamo che

$$|G(j\omega_n)|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{2\delta}$$

Abbiamo cioè che, in $\omega = \omega_n$, la quantità $|G(j\omega)|_{dB}$ non è nulla, ma assume un valore tanto maggiore quanto più piccolo è il coefficiente di smorzamento δ . Questo è già un primo risultato che ci consente di dire che il diagramma reale può discostarsi apprezzabilmente dal diagramma asintotico.

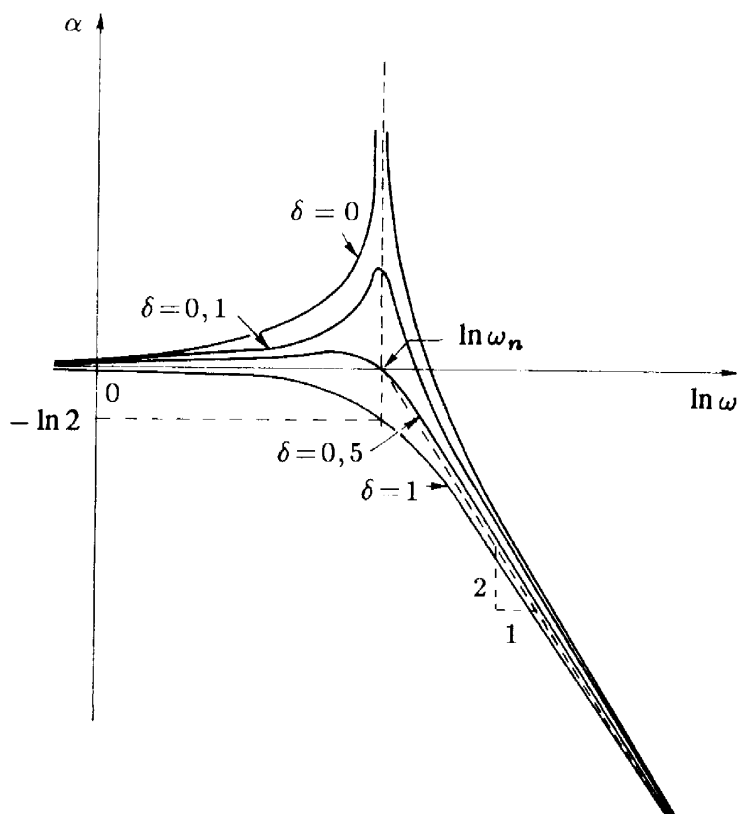
Si può trovare anche un altro risultato importante: si trova infatti che la funzione $|G(j\omega)|_{dB}$ presenta un massimo nel punto

$$\omega_{max} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\delta^2}}$$

Evidentemente, al diminuire di δ , tale punto di massimo si approssima al valore ω_n , confermando una volta di più la differenza tra il diagramma reale e quello asintotico. Naturalmente, perché il valore ω_{max} abbia un senso, l'argomento della radice a denominatore deve essere positivo, dal che deduciamo che questo massimo esiste solo se $1 - 2\delta^2 > 0$, ossia se $\delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Possiamo allora affermare quanto segue: se $\delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$, la funzione $|G(j\omega)|_{dB}$ presenta un andamento reale diverso (anche notevolmente) da quello asintotico, per cui il diagramma asintotico va necessariamente corretto, usando i valori indicati in apposite tabelle; se, invece, risulta $\delta > \frac{\sqrt{2}}{2}$, allora la funzione $|G(j\omega)|_{dB}$ non presenta un massimo e il diagramma asintotico diventa accettabile (in quanto $|G(j\omega)|_{dB}$ risulta comunque avere un andamento monotonicamente decrescente).

Riportiamo, in conclusione, nella figura seguente l'andamento della funzione $|G(j\omega)|_{dB}$ per diversi valori del coefficiente di smorzamento δ :



Questo diagramma conferma (ovviamente) le conclusioni analitiche ricavate prima: in particolare, si osserva che il valore di $|G(j\omega)|_{dB}$ nel punto di massimo ω_{max} vale ∞ nel caso in cui $\delta=0$.

Passiamo adesso al diagramma delle fasi per la funzione $G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega\right)^{-1}$: la fase di questa funzione è

$$\arg G(j\omega) = \arg \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega} = -\operatorname{arctg} \frac{\frac{2\delta}{\omega_n} \omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = -\operatorname{arctg} \frac{2\delta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

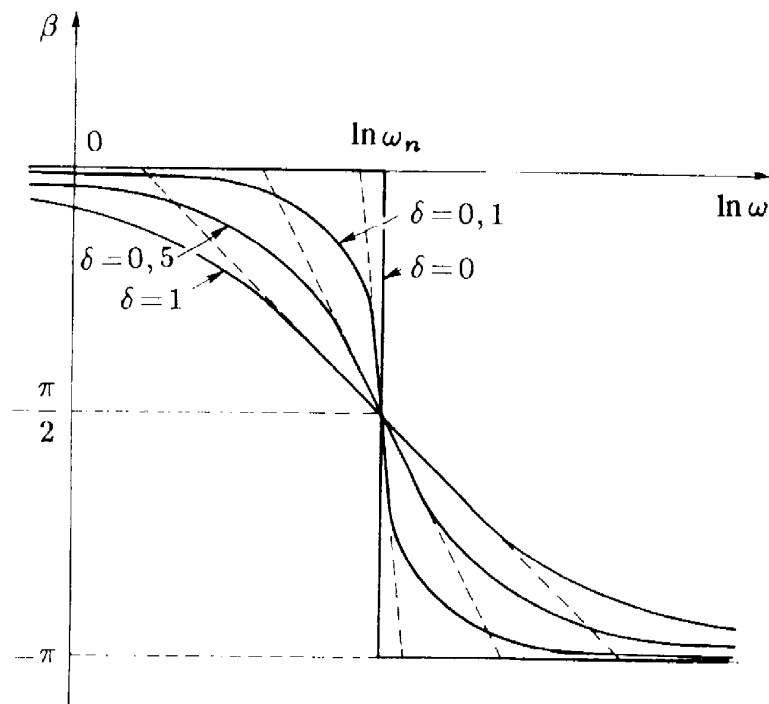
Si tratta, anche in questo caso, di una funzione di ω e di δ , per cui avremo una famiglia di curve al variare di δ . Supponendo sempre fissata la pulsazione naturale ω_n , calcoliamo $\arg G(j\omega)$ in alcuni punti notevoli:

$$\omega \ll \omega_n \rightarrow \arg G(j\omega) \cong -\operatorname{arctg} \frac{2\delta}{\frac{\omega}{\omega_n}} \cong 0^\circ$$

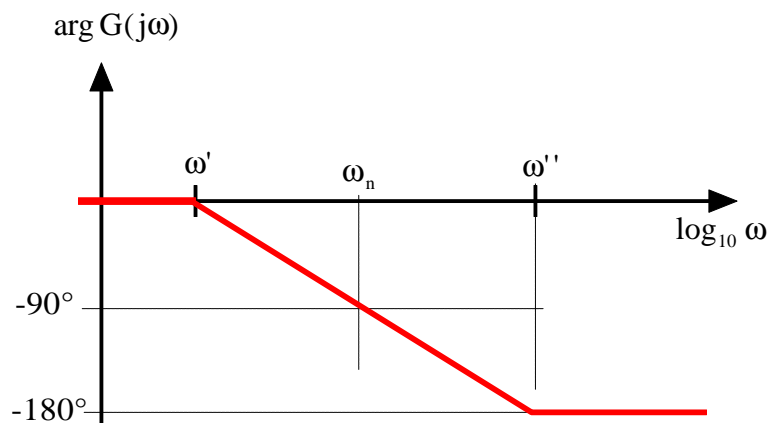
$$\omega \gg \omega_n \rightarrow \arg G(j\omega) \cong -\operatorname{arctg} \frac{2\delta}{\frac{\omega}{\omega_n}} \cong -180^\circ$$

$$\omega = \omega_n \rightarrow \arg G(j\omega_n) = -\operatorname{arctg} \frac{2\delta}{0} = -\operatorname{arctg} \infty = -90^\circ$$

Il corrispondente diagramma reale, al variare di δ , è fatto nel modo seguente:



Volendo approssimare questo diagramma con un andamento asintotico, basta osservare che, al diminuire di δ , le curve diventano più ripide nell'intorno della frequenza naturale, per cui si può tracciare un diagramma del tipo seguente:



La pendenza della tratto inclinato può essere ricavata con lo stesso procedimento seguito nel caso dei termini del primo ordine, ossia calcolando la pendenza della tangente al diagramma reale in corrispondenza di $\omega = \omega_n$. Seguendo questo procedimento, si trova che, per un assegnato valore di δ , la frequenza ω' in cui il tratto inclinato va ad intersecare l'asse delle ascisse è legata alla frequenza naturale dalla relazione $\frac{\omega_n}{\omega'} = (4.81)^\delta$. Usando questa semplice formula, diventa anche in questo caso immediato il tracciamento del diagramma asintotico.

Segno del coefficiente di smorzamento

Una osservazione importante è la seguente: mentre la pulsazione naturale ω_n è pari al modulo delle radici complesse coniugate, per cui è sempre positiva, il coefficiente di smorzamento δ può anche essere negativo, mentre noi lo abbiamo considerato positivo: per ottenere, allora, il diagramma di Bode corrispondente a $\delta < 0$, basta considerare che il diagramma dei moduli rimane invariato (a patto di considerare $|\delta|$), mentre quello delle fasi risulta ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

L'ultima funzione da analizzare è il termine di 2° grado posto a numeratore (corrispondente cioè a due zeri complessi coniugati), ossia la funzione $G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)$: ancora una volta, il procedimento è semplice, in quanto basta ribaltare, rispetto all'asse delle ascisse, i diagrammi (sia per i moduli sia per le fasi) ottenuti poco fa per la funzione $G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\delta}{\omega_n} \omega \right)^{-1}$.

Esempi vari

ESEMPIO

Vogliamo tracciare il diagramma di Bode della funzione

$$G(s) = \frac{k}{s(1+Ts)}$$

dove supponiamo che sia il guadagno k sia la costante di tempo T siano quantità positive.

Dato che il sistema non presenta poli a parte reale positiva, possiamo immediatamente ricavare la funzione di risposta armonica semplicemente ponendo $s=j\omega$:

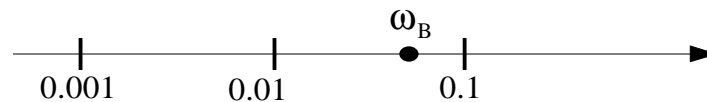
$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega} \frac{1}{(1+jT\omega)}$$

Questa funzione di risposta armonica è dunque data dal prodotto delle funzioni elementari $G_1(j\omega) = k$, $G_2(j\omega) = (j\omega)^{-1}$ e $G_3(j\omega) = (1+jT\omega)^{-1}$: il diagramma delle ampiezze di $G(j\omega)$ è allora il prodotto dei rispettivi diagrammi delle ampiezze, mentre il diagramma delle fasi si ottiene facendo la somma (algebraica, che cioè tenga conto dei termini a numeratore e di quelli a denominatore) dei rispettivi diagrammi delle fasi.

Cominciamo allora dal diagramma delle ampiezze: il modulo di $G(j\omega)$ è

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{k}{(j\omega)(1+jT\omega)} \right| = 20 \log_{10} \frac{k}{\omega \sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

Possiamo procedere nel modo seguente. In primo luogo, abbiamo una sola frequenza di break, $\omega_B = 1/T$, corrispondente alla costante di tempo T . Andiamo allora ad individuare tale frequenza sull'asse orizzontale, supponendo che si trovi come indicato nella figura seguente:

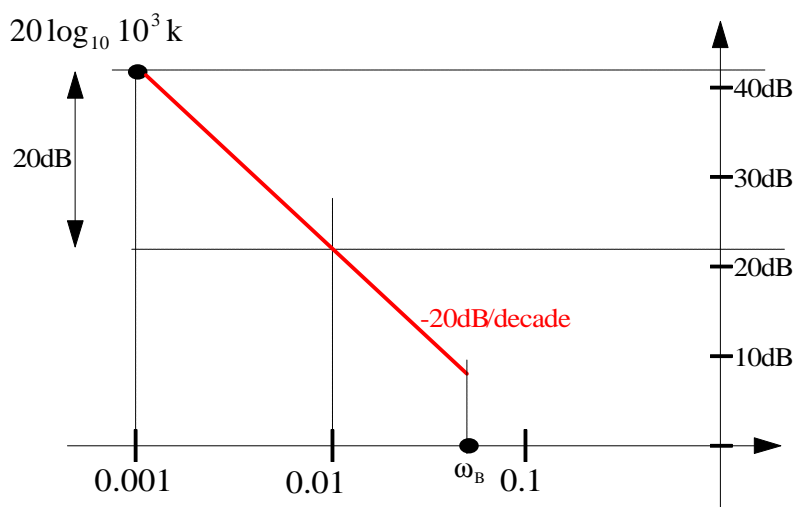


E' lecito assumere che, ponendoci una decade prima rispetto a ω_B (cioè in corrispondenza di $\omega_B/10$), il contributo del termine $(1+jT\omega)^{-1}$ sia trascurabile rispetto agli altri, per cui la funzione è approssimabile con $G(j\omega) \cong \frac{k}{j\omega}$; il corrispondente modulo (in dB) è allora

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \cong 20 \log_{10} \frac{k}{\omega}$$

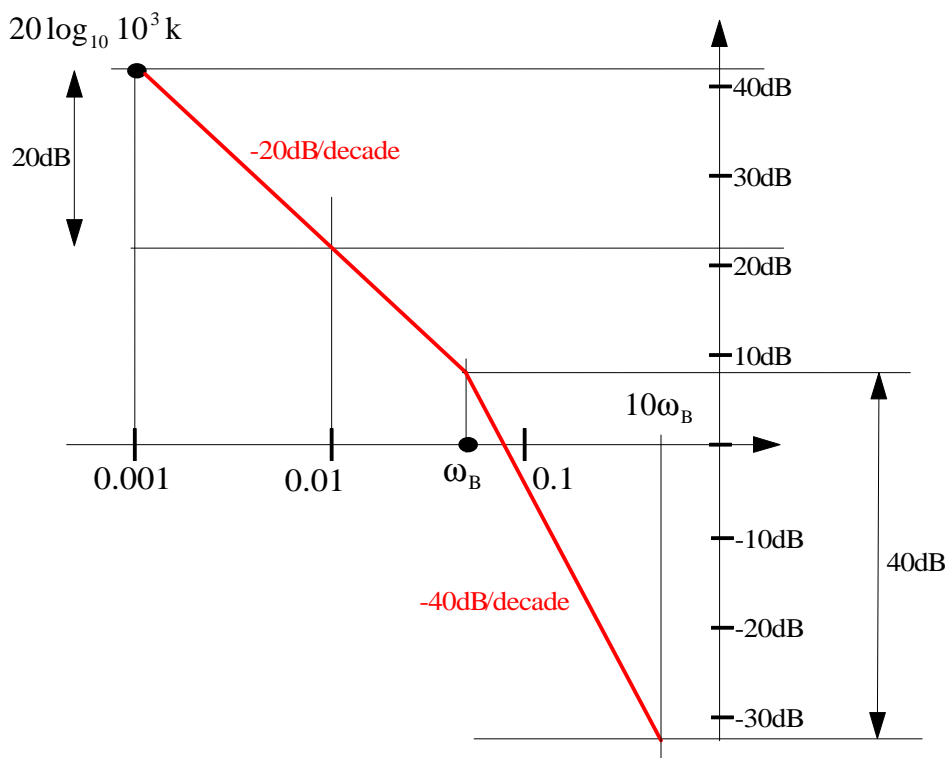
e si tratta chiaramente di una retta con pendenza negativa di 20 dB/decade. Per rappresentare questa retta, dato che ne conosciamo la pendenza, ci basta conoscere un punto da essa intercettato. Allora, con riferimento alla figura precedente, possiamo ad esempio calcolare il valore di $|G(j\omega)|_{dB}$ in corrispondenza di $\omega=0.001$: facendo i conti, si ottiene $G(j\omega) = \frac{k \cdot 10^3}{j}$, da cui

quindi deduciamo che $|G(j\omega)|_{dB} \Big|_{\omega=0.001} = 20 \log_{10} 10^3 k$. Dato che k si suppone noto, possiamo dunque individuare questo punto sul diagramma è mandare da esso una retta con pendenza negativa di 20dB/decade:



Questa retta approssima bene il diagramma reale fino alla frequenza di break, a partire dalla quale il contributo del termine $(1+jT\omega)^{-1}$ non può più essere trascurato. Per tenere conto di questo contributo, ci basta aumentare la pendenza da -20dB/decade a -40dB/decade (in quanto sappiamo che il diagramma

delle ampiezze di $(1+jT\omega)^{-1}$ è a sua volta una retta con pendenza -20dB/decade). Possiamo perciò concludere che il diagramma (asintotico) delle ampiezze di $G(j\omega)$ è fatto nel modo seguente:



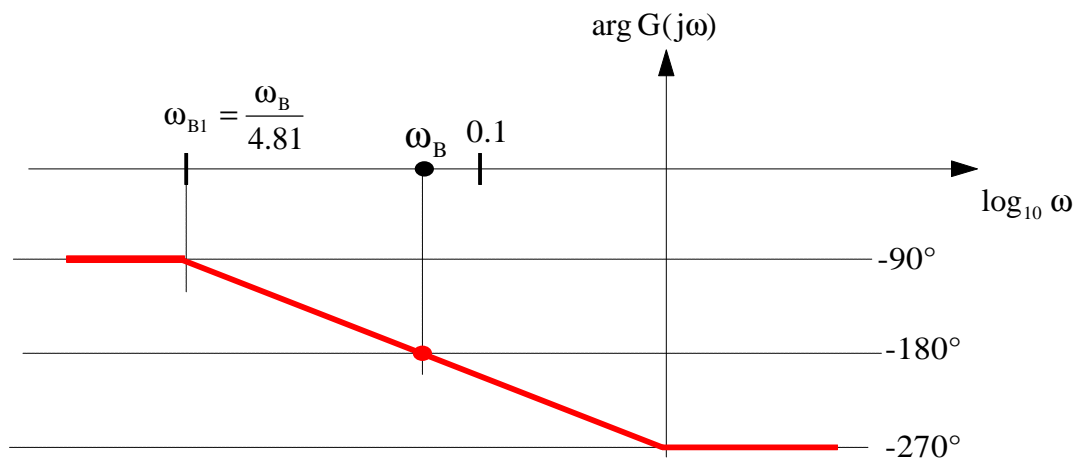
Passiamo adesso al diagramma degli argomenti: l'argomento di $G(j\omega)$ è

$$\arg G(j\omega) = \arg\left(\frac{k}{j\omega(1+jT\omega)}\right) = \arg(k) - \arg(j\omega) - \arg(1+jT\omega) = \arg(k) - \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega T)$$

Considerando che $k > 0$, risulta $\arg(k) = 0$, per cui concludiamo che

$$\arg G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg(\omega T)$$

Abbiamo dunque la funzione $-\arctg(\omega T)$ traslata di $\pi/2$ verso il basso, per cui il diagramma asintotico, usando la regola del 4.81 per ottenere la pulsazione ω_{B1} è fatto nel modo seguente:



ESEMPIO

Vogliamo tracciare il diagramma di Bode della funzione

$$G(s) = k \frac{1 - 0.1s}{s(1 + 0.5s)}$$

dove supponiamo sempre $k > 0$.

Dato che il sistema non presenta poli a parte reale positiva, possiamo immediatamente ricavare la funzione di risposta armonica semplicemente ponendo $s = j\omega$:

$$G(s) = k \frac{1 - j0.1\omega}{j\omega(1 + j0.5\omega)}$$

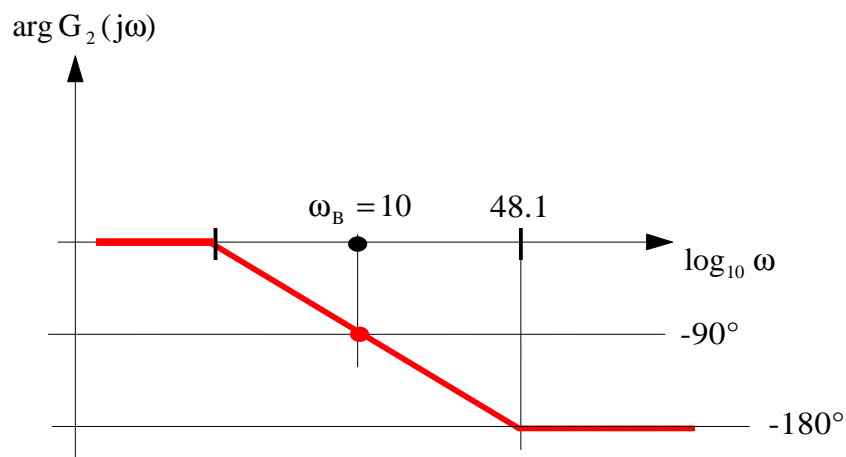
Questa funzione presenta una particolarità, rappresentata da uno zero a parte reale positiva (o, ciò che è lo stesso, una costante di tempo negativa a numeratore). Possiamo allora procedere nel modo seguente: moltiplicando numeratore e denominatore per la quantità $(1 + j0.1\omega)$, otteniamo

$$G(j\omega) = k \frac{1 - j0.1\omega}{j\omega(1 + j0.5\omega)} \frac{1 + j0.1\omega}{1 + j0.1\omega} = k \frac{1 + j0.1\omega}{j\omega(1 + j0.5\omega)} \frac{1 - j0.1\omega}{1 + j0.1\omega}$$

In tal modo, la $G(j\omega)$ risulta data dal prodotto di un termine $G_1(j\omega) = k \frac{1 + j0.1\omega}{j\omega(1 + j0.5\omega)}$ avente solo costanti di tempo positive e di un termine $G_2(j\omega) = \frac{1 - j0.1\omega}{1 + j0.1\omega}$ sul quale dobbiamo indagare.

Questo termine $G_2(j\omega)$ presenta una caratteristica fondamentale, che è quella di avere modulo unitario: ciò significa che il diagramma delle ampiezze di $G(j\omega)$, che si ottiene come prodotto dei diagrammi delle ampiezze di $G_1(j\omega)$ e $G_2(j\omega)$, coincide con il diagramma di $G_1(j\omega)$, in quanto il diagramma di $G_2(j\omega)$ è una retta coincidente con l'asse delle ascisse.

Per quanto riguarda, invece, il diagramma delle fasi, sarà la somma del diagramma delle fasi di $G_1(j\omega)$ (che sappiamo tracciare in quanto $G_1(j\omega)$ rientra tra le funzioni analizzate in precedenza) e di quello di $G_2(j\omega)$. Andiamo allora a vedere come è fatto il diagramma delle fasi di $G_2(j\omega)$:



In definitiva, quindi, il termine $G_2(j\omega) = \frac{1 - j0.1\omega}{1 + j0.1\omega}$ non modifica il modulo di $G_1(j\omega)$, mentre produce uno sfasamento. Per questo motivo, esso prende il nome di **fattore passa-tutto**: questo nome indica il fatto che, dato un sistema avente $G_1(j\omega)$ come funzione di risposta armonica e ponendo in ingresso a tale sistema un segnale sinusoidale $u(t) = A\sin(\omega t)$, di pulsazione qualsiasi, l'uscita del sistema è del tipo $y(t) = A\sin(\omega t - \varphi)$. Il sistema, cioè, non attenua e non amplifica, ma si limita solamente a sfasare l'ingresso di una quantità dipendente da ω .

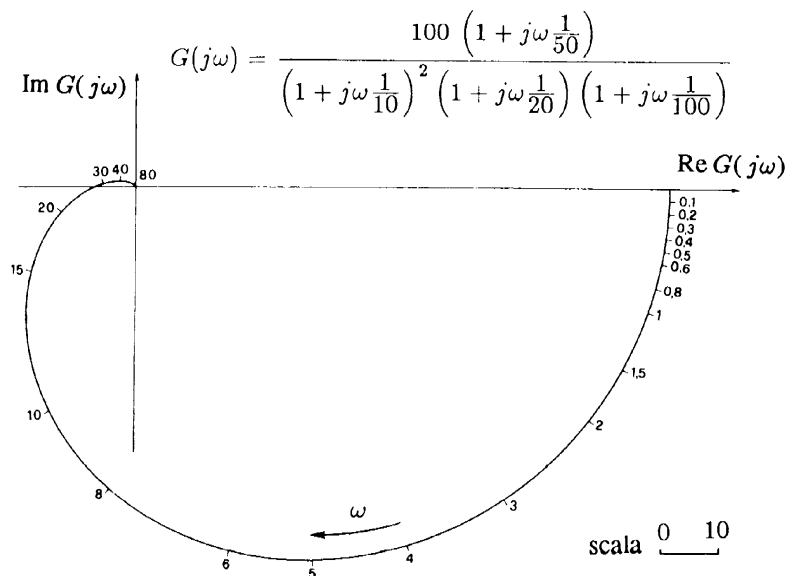
Diagrammi di Nyquist

INTRODUZIONE

Quando abbiamo introdotto la funzione di risposta armonica $G(j\omega)$, abbiamo detto che essa può essere graficamente rappresentata in almeno due modi: nei paragrafi precedenti ci siamo occupati della sua rappresentazione in termini di modulo e fase, descrivendo i *diagrammi di Bode*, mentre adesso vogliamo occuparci della rappresentazione in termini di parte reale e parte immaginaria, descrivendo i cosiddetti **diagrammi di Nyquist** (detti anche **diagrammi polari**):

$$G(j\omega) = \text{Re}\{G(j\omega)\} + j \text{Im}\{G(j\omega)\}$$

Un diagramma polare è dunque una rappresentazione del valore di $G(j\omega)$, in termini appunto di parte reale e parte immaginaria (cioè nel piano di Gauss), al variare della pulsazione ω . Un esempio di diagramma polare è riportato nella figura seguente:



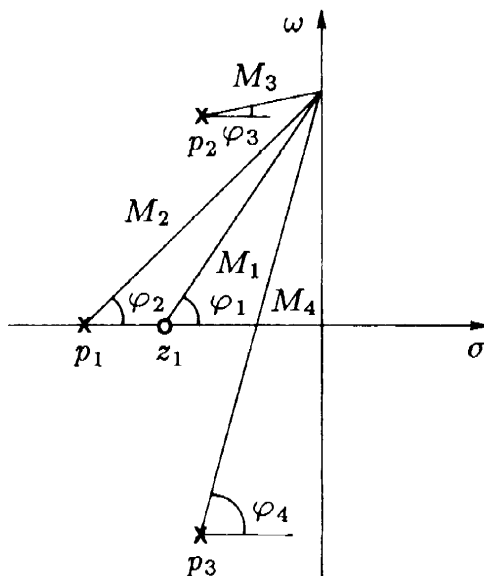
Un generico punto della curva rappresenta il valore della $G(j\omega)$ in corrispondenza di una precisa pulsazione ω (la curva è graduata in valori della pulsazione ω , nel senso che sono specificati su di essa i valori di ω corrispondenti ai vari punti, in numero sufficiente per una agevole interpolazione): questo consente una immediata determinazione dei valori di $\text{Re}\{G(j\omega)\}$ e $\text{Im}\{G(j\omega)\}$, da leggersi rispettivamente sull'asse orizzontale e su quello verticale.

E' importante osservare il legame tra i diagrammi polari e i diagrammi di Bode: poiché i valori del modulo $A(\omega)$ e dell'argomento $\varphi(\omega)$ sono facilmente determinabili sul diagramma polare in funzione della pulsazione, i diagrammi di Bode si possono facilmente dedurre dai diagrammi polari; meno agevole, ma comunque possibile, è invece la determinazione di $\text{Re}\{G(j\omega)\}$ e $\text{Im}\{G(j\omega)\}$ sui diagrammi di Bode, cioè la costruzione, a partire da questi, dei diagrammi polari.

I diagrammi polari sono di grande importanza per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione: su di essi, in particolare, si basa un fondamentale criterio di stabilità (il criterio di Nyquist) che verrà più avanti enunciato.

Fatte queste premesse, cominciamo ad esaminare due metodi pratici per la costruzione dei diagrammi polari:

- una prima situazione possibile è quella in cui si vuole rappresentare, sul diagramma polare, la funzione di risposta armonica relativa ad un sistema di cui è data la funzione di trasferimento $G(s)$: in questo caso, una volta effettuata la sostituzione $s=j\omega$, il diagramma polare di $G(j\omega)$ si può tracciare per punti, separando le parti reale e immaginaria di $G(j\omega)$ e determinandone i valori corrispondenti a vari valori di ω ;
- una seconda situazione possibile è invece quella in cui è assegnata direttamente la mappa dei poli e degli zeri nel piano complesso ed è fissato un valore di ω : la risposta armonica corrispondente a tale valore di ω si può facilmente determinare elaborando i dati di una costruzione grafica. Per esempio, supponiamo che la mappa assegnata sia quella indicata nella figura seguente:



La corrispondente funzione di risposta armonica ha la seguente espressione:

$$G(j\omega) = k \frac{j\omega - z_1}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)} = k \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)}$$

dove i valori dei moduli e degli angoli corrispondono, rispettivamente, a distanze ed angoli facilmente determinabili per via grafica.

Dalla costruzione grafica della figura precedente si può passare ad un punto del diagramma polare eseguendo prodotti e quozienti di valori determinati graficamente e una somma algebrica di angoli. La costruzione si può ovviamente ripetere per diversi valori numerici di ω .

REGOLE PER IL TRACCIAMENTO DEI DIAGRAMMI POLARI

In molti casi, in particolare quando i diagrammi polari si impiegano per analizzare la stabilità dei sistemi in retroazione, è sufficiente la conoscenza dell'andamento qualitativo del diagramma nel suo complesso, potendosi limitare la conoscenza più precisa a porzioni di esso in posizioni determinanti.

Per il tracciamento qualitativo dei diagrammi polari risultano utili alcune regole pratiche, che ci accingiamo ad enunciare.

Per enunciare queste regole, utilizziamo la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema in esame espressa nelle seguenti due forme:

$$G(s) = \frac{k_1}{(s)^\mu} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^{n-\mu} + a_{n-1} s^{n-\mu-1} + \dots + a_\mu} = \frac{k}{(s)^\mu} \frac{\prod_{j=1}^p (1 + T_j s) \prod_{h=1}^q \left(1 + \frac{s^2}{\omega_{mh}^2} + \frac{2\delta_h}{\omega_{mh}} s\right)}{\prod_{i=1}^v (1 + T_i s) \prod_{k=1}^w \left(1 + \frac{s^2}{\omega_{mk}^2} + \frac{2\delta_k}{\omega_{mk}} s\right)}$$

In entrambe le forme, come si osserva, abbiamo posto in evidenza gli eventuali poli nell'origine (supposti in numero pari a μ).

La corrispondente funzione di risposta armonica si ottiene ponendo $s=j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{k_1}{(j\omega)^\mu} \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^{n-\mu} + a_{n-1} (j\omega)^{n-\mu-1} + \dots + a_\mu} = \frac{k}{(j\omega)^\mu} \frac{\prod_{j=1}^p (1 + jT_j \omega) \prod_{h=1}^q \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{mh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{mh}} \omega\right)}{\prod_{i=1}^v (1 + jT_i \omega) \prod_{k=1}^w \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{mk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{mk}} \omega\right)}$$

Comportamento alle basse frequenze

Per tracciare il diagramma polare di una generica funzione di risposta armonica $G(j\omega)$, ci interessiamo per il momento solo ai valori di ω compresi nell'intervallo $(0, +\infty)$, mentre in seguito considereremo l'intervallo $(-\infty, 0)$.

Nell'ambito dell'intervallo $(0, +\infty)$, cominciamo a valutare l'**andamento alle basse frequenze**, ossia l'andamento di $G(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0^+$: facciamo riferimento alla $G(j\omega)$ espressa nella forma

$$G(j\omega) = \frac{k_1}{(j\omega)^\mu} \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^{n-\mu} + a_{n-1} (j\omega)^{n-\mu-1} + \dots + a_\mu}$$

E' chiaro che, se ω diventa molto piccolo (a limite 0^+), tutte le potenze di $j\omega$, sia a numeratore sia a denominatore, rappresentano dei termini trascurabili rispetto ai termini costanti b_0 e a_μ , per cui possiamo sicuramente affermare che la funzione è approssimabile con

$$G(j\omega) \cong \frac{k_1}{(j\omega)^\mu} \frac{b_0}{a_\mu}$$

Questa è dunque la funzione con cui, in linea del tutto generale, si approssima il comportamento di $G(j\omega)$ per ω tendente a 0^+ . E' chiaro che l'andamento di questa funzione dipende dal valore di μ , ossia dal numero di poli nell'origine, ossia dal tipo del sistema. Le possibilità sono ovviamente due:

- il caso più semplice è quello in cui $\mu=0$, ossia il sistema è di **tipo 0**: in questo caso, la funzione (che non presenta poli nell'origine) è

$$G(j\omega) \cong k_1 \frac{b_0}{a_\mu}$$

ed è evidentemente costante (e reale) con la frequenza: questo fatto indica che il diagramma polare parte da un punto dell'asse reale di valore $k_1 b_0/a_\mu$. In questo punto, la fase della funzione è

$$\arg G(j\omega) = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) = \begin{cases} 0 & k_1 \frac{b_0}{a_\mu} > 0 \\ \pi & k_1 \frac{b_0}{a_\mu} < 0 \end{cases}$$

- l'altra possibilità è quella in cui $\mu > 0$, ossia il sistema presenta almeno un polo nell'origine: in questo caso, la funzione non è più costante con la pulsazione e possiamo esprimere il suo argomento come

$$\arg G(j\omega) = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) + \arg \left(\frac{1}{(j\omega)^\mu} \right) = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) - \mu \frac{\pi}{2}$$

Se poniamo

$$\varphi = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) = \begin{cases} 0 & k_1 \frac{b_0}{a_\mu} > 0 \\ \pi & k_1 \frac{b_0}{a_\mu} < 0 \end{cases}$$

possiamo scrivere che

$$\arg G(j\omega) = \varphi - \mu \frac{\pi}{2}$$

da cui deduciamo che la fase di $G(j\omega)$, per $\omega \rightarrow 0^+$, dipende sia dal segno della costante $k_1 \frac{b_0}{a_\mu}$ sia dal numero μ di poli nell'origine.

Per quanto riguarda il modulo, invece, è ovvio che $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left| \frac{k_1 b_0}{(j\omega)^\mu a_\mu} \right| = \infty$.

Possiamo dunque riepilogare nel modo seguente il comportamento di $G(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0^+$: se il sistema è di tipo 0, il modulo è $\left| k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right|$ mentre la fase è nulla o pari a π a seconda che il termine

$k_1 \frac{b_0}{a_\mu}$ sia positivo o negativo; se il sistema è di tipo almeno pari ad 1, invece, il modulo è ∞ , mentre la

fase è $\varphi - \mu \frac{\pi}{2}$, dove $\varphi = \arg\left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu}\right)$.

Questo è dunque quello che succede per $\omega \rightarrow 0^+$. Adesso vediamo cosa succede per valori di ω piccoli ma comunque non nulli. Facciamo ancora riferimento alla funzione di risposta armonica espressa nella forma

$$G(j\omega) = \frac{k_1}{(j\omega)^\mu} \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_\mu}$$

In questo caso, anziché trascurare tutte le potenze del termine $j\omega$, è lecito trascurare solo quelle di grado maggiore o uguale a 2, per cui possiamo scrivere che

$$G(j\omega) \cong \frac{k_1}{(j\omega)^\mu} \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_1 j\omega + a_\mu}$$

Consideriamo dapprima il caso di sistema di **tipo 0**, per cui scriviamo che

$$G(j\omega) = k_1 \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_1 j\omega + a_\mu}$$

Abbiamo visto prima che, se il sistema è di tipo 0, il diagramma parte da un punto dell'asse reale. Allora, al fine di capire se il diagramma parte da tale punto con fase positiva o negativa, calcoliamo la fase di $G(j\omega)$ espressa in quest'ultima forma:

$$\arg G(j\omega) = \arg\left(k_1 \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_1 j\omega + a_\mu}\right) = \arg\left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \frac{\frac{b_1}{b_0} j\omega + 1}{\frac{a_1}{a_\mu} j\omega + 1}\right) = \arg\left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu}\right) + \arg\left(\frac{\frac{b_1}{b_0} j\omega + 1}{\frac{a_1}{a_\mu} j\omega + 1}\right)$$

Ponendo sempre $\varphi = \arg\left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu}\right)$, abbiamo che

$$\arg G(j\omega) = \varphi + \arg\left(\frac{b_1}{b_0} j\omega + 1\right) - \arg\left(\frac{a_1}{a_\mu} j\omega + 1\right) = \varphi + \arctg\left(\frac{b_1}{b_0} \omega\right) - \arctg\left(\frac{a_1}{a_\mu} \omega\right)$$

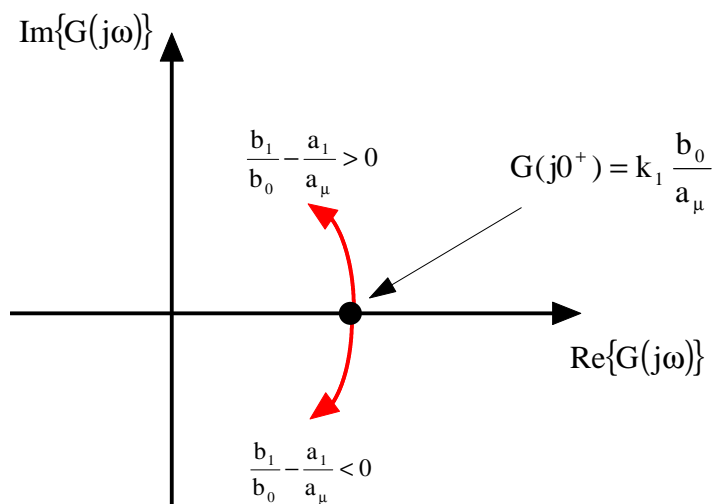
Dato che stiamo ragionando per valori molto piccoli di ω , possiamo confondere la tangente con l'angolo, per cui concludiamo che

$$\arg G(j\omega) \cong \varphi + \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_\mu}\right) \omega$$

In base a questa formula, se supponiamo $k_1 \frac{b_0}{a_\mu} > 0$, ossia $\varphi=0$, tutto viene a dipendere dal segno della quantità $\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_\mu}$:

- se $\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_\mu} > 0$, allora $\arg G(j\omega) > 0$, ossia il diagramma parte con fase positiva (ossia lascia l'asse reale ruotando in senso orario);
- se $\frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_\mu} < 0$, allora $\arg G(j\omega) < 0$, ossia il diagramma parte con fase negativa (ossia lascia l'asse reale ruotando in senso antiorario).

Nella figura seguente sono sintetizzate queste conclusioni:



La figura fa riferimento, ovviamente, al caso in cui $k_1 \frac{b_0}{a_\mu} > 0$.

Passiamo adesso al caso di sistema di **tipo 1**, per il quale la funzione di risposta armonica, sempre per valori piccoli ma non nulli di $j\omega$, può essere approssimata con

$$G(j\omega) \cong \frac{k_1}{j\omega} \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_1 j\omega + a_\mu}$$

Abbiamo visto prima che, se il sistema è di tipo maggiore di 0, il modulo di $G(j\omega)$ è infinito per $\omega \rightarrow 0^+$, ossia il diagramma parte da un punto all'infinito. Vogliamo allora capire, nel caso di sistema di tipo 1, in che modo parte il diagramma: dimostreremo che esso parte seguendo un asintoto verticale avente una precisa ascissa.

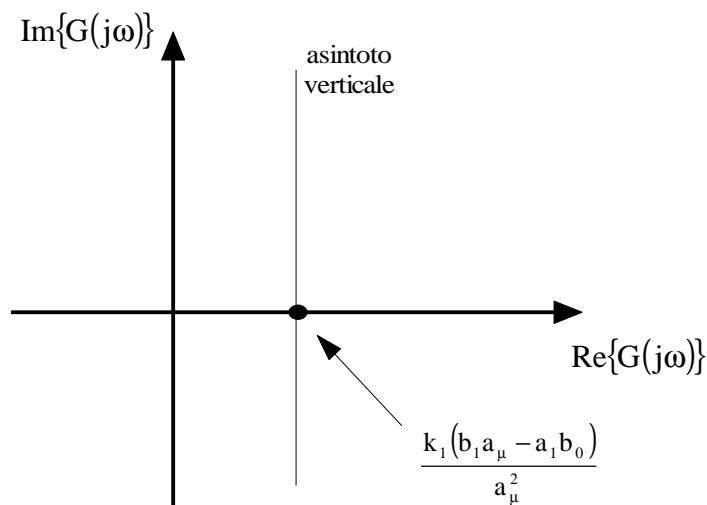
Conviene intanto razionalizzare l'espressione di $G(j\omega)$ nel modo seguente:

$$G(j\omega) = \frac{k_1}{j\omega} \frac{b_1 j\omega + b_0}{a_1 j\omega + a_\mu} \frac{a_\mu - a_1 j\omega}{a_\mu - a_1 j\omega} = \frac{k_1}{j\omega} \frac{(b_0 + b_1 j\omega)(a_\mu - a_1 j\omega)}{a_\mu^2 + a_1^2 \omega^2} = \frac{k_1}{j\omega} \frac{a_1 b_1 \omega^2 + (b_1 a_\mu - a_1 b_0)j\omega + b_0 a_\mu}{a_\mu^2 + a_1^2 \omega^2}$$

Adesso, dato sempre che stiamo considerando valori piccoli di ω , possiamo trascurare, sia a numeratore sia a denominatore, i termini in ω^2 , per cui

$$G(j\omega) \cong \frac{k_1 (b_1 a_\mu - a_1 b_0) j\omega + b_0 a_\mu}{j\omega a_\mu^2} = \frac{k_1 (b_1 a_\mu - a_1 b_0)}{a_\mu^2} - j \frac{k_1 b_0 a_\mu}{\omega a_\mu^2}$$

Abbiamo in tal modo separato la parte reale e la parte immaginaria di $G(j\omega)$: si osserva allora che, mentre la parte reale è costante con ω , il coefficiente della parte immaginaria è inversamente proporzionale ad ω , il che significa che, per $\omega \rightarrow 0$, risulta $\text{Im}\{G(j\omega)\} \rightarrow \infty$. Abbiamo dunque un **asintoto verticale**:



Questa figura fa chiaramente riferimento al caso in cui $\frac{k_1 (b_1 a_\mu - a_1 b_0)}{a_\mu^2} > 0$, ma può anche risultare $\frac{k_1 (b_1 a_\mu - a_1 b_0)}{a_\mu^2} < 0$.

Comportamento alle alte frequenze

Studiamo adesso il comportamento della generica funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ alle **alte frequenze**, ossia per $\omega \rightarrow \infty$.

Consideriamo ancora la funzione $G(j\omega)$ espressa nella forma

$$G(j\omega) = \frac{k_1}{(j\omega)^\mu} \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_\mu}$$

Alle alte frequenze, prevalgono sicuramente il termine in ω^m a numeratore e quello in $\omega^{n-\mu}$ a denominatore, per cui

$$G(j\omega) \cong \frac{k_1}{(j\omega)^\mu} \frac{b_m (j\omega)^m}{a_n (j\omega)^{n-\mu}} = k_1 \frac{b_m (j\omega)^m}{a_n (j\omega)^n}$$

Portando i termini in $j\omega$ tutti a denominatore, abbiamo dunque che, alle alte frequenze, la funzione $G(j\omega)$ è esprimibile nella forma

$$G(j\omega) \cong k_1 \frac{b_m}{a_n (j\omega)^{n-m}}$$

Il caso più semplice che si può presentare è quello in cui $n=m$ (corrispondente ad un sistema avente un ugual numero di poli e di zeri): in questo caso, risulta evidentemente $G(j\omega) \cong k_1 \frac{b_m}{a_n}$, per cui il modulo e la fase di $G(j\omega)$ risultano essere

$$|G(j\omega)| = \left| k_1 \frac{b_m}{a_n} \right|$$

$$\arg G(j\omega) = \arg \left(k_1 \frac{b_m}{a_n} \right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k_1 \frac{b_m}{a_n} > 0 \\ \pi & \text{se } k_1 \frac{b_m}{a_n} < 0 \end{cases}$$

In questo caso, dunque, il diagramma per $\omega \rightarrow \infty$ ha modulo finito pari a $\left| k_1 \frac{b_m}{a_n} \right|$ e fase nulla o pari a π a seconda che $k_1 \frac{b_m}{a_n}$ sia un quantità positiva o negativa.

L'altro caso è quello in cui $m < n$ (corrispondente ad un **sistema passa-basso**, avente cioè un numero di poli maggiore rispetto al numero di zeri): in questo caso, risulta

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left| k_1 \frac{b_m}{a_n (j\omega)^{n-m}} \right| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[\arg \left(k_1 \frac{b_m}{a_n (j\omega)^{n-m}} \right) \right] = \underbrace{\arg \left(k_1 \frac{b_m}{a_n} \right)}_{\varphi} + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[\arg \left(\frac{1}{(j\omega)^{n-m}} \right) \right] = \varphi - \left[(n-m) \frac{\pi}{2} \right]$$

Queste formule dicono che, per un sistema passa-basso, il diagramma polare tende all'origine (dato che il modulo di $G(j\omega)$ tende a 0) con fase $\varphi - \left[(n-m) \frac{\pi}{2} \right]$, ossia tangente ad uno degli assi coordinati.

Comportamento alle frequenze intermedie

Abbiamo dunque analizzato il comportamento di $G(j\omega)$ sia alle basse frequenze ($\omega \rightarrow 0^+$) sia alle alte frequenze ($\omega \rightarrow +\infty$). Resta da determinare l'andamento di $G(j\omega)$ per frequenze intermedie comprese tra questi due estremi. In effetti, però, al contrario dei casi considerati prima, si possono trarre ben poche conclusioni analitiche a proposito di tale andamento: *la determinazione precisa*

dell'andamento di $G(j\omega)$ per frequenze intermedie può essere fatta solo calcolando tale funzione (in particolare la sua parte reale e la sua parte immaginaria) per diversi valori di ω (per ottenere un numero elevato di punti, è necessario l'ausilio del calcolatore).

In base a questo, diventa importante conoscere il valore di $G(j\omega)$ in alcuni punti notevoli. Per esempio, può essere importante individuare le eventuali intersezioni di $G(j\omega)$ con gli assi coordinati:

- per individuare eventuali intersezioni di $G(j\omega)$ con l'asse immaginario, è necessario risolvere l'equazione $\text{Re}\{G(j\omega)\}=0$: se esiste un valore ω_1 della pulsazione in corrispondenza del quale quella condizione è verificata, il corrispondente valore della funzione di risposta armonica sarà $G(j\omega_1) = j\text{Im}\{G(j\omega_1)\}$ e potrà essere riportato sul diagramma;
- in modo del tutto analogo, per individuare eventuali intersezioni di $G(j\omega)$ con l'asse reale, è necessario risolvere l'equazione $\text{Im}\{G(j\omega)\}=0$: se esiste un valore ω_2 della pulsazione in corrispondenza del quale quella condizione è verificata, il corrispondente valore della funzione di risposta armonica sarà $G(j\omega_2) = \text{Re}\{G(j\omega_2)\}$.

Caso particolare di 2 poli complessi coniugati: asintoto obliquo

Consideriamo adesso un caso particolare di funzione di risposta armonica: supponiamo che la funzione di trasferimento del sistema in esame abbia espressione

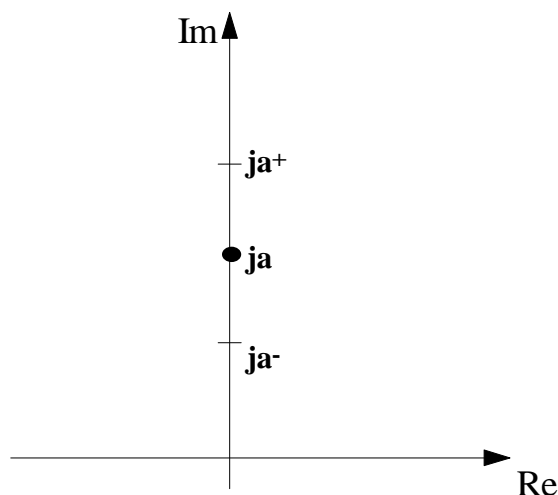
$$G(s) = k \frac{N(s)}{D(s)} = k \frac{N(s)}{(s^2 + a^2)D_1(s)}$$

La caratteristica di $G(s)$ è evidentemente quella di avere due poli complessi coniugati che sono, in particolare, immaginari puri: infatti, il termine $s^2 + a^2$ corrisponde ai due

poli $p_{1/2} = \pm ja$. Se allora poniamo $G_1(s) = k \frac{N(s)}{D_1(s)}$, possiamo scrivere che

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{(s + ja)(s - ja)}$$

Siamo interessati a calcolare la fase della funzione $G(s)$ nell'intorno di uno di questi due poli, ad esempio nell'intorno di $p_1 = ja$. Calcoliamo allora tale fase in ja^+ (cioè leggermente al di sopra di ja) e in ja^- (cioè leggermente al di sotto di ja):



Cominciamo dal punto ja^+ :

$$\begin{aligned} \arg G(ja^+) &= \arg \left[\left(\frac{G_1(s)}{(s+ja)(s-ja)} \right)_{s=ja^+} \right] = \arg[G_1(ja^+)] - \arg[(s+ja)_{s=ja^+}] - \arg[(s-ja)_{s=ja^+}] = \\ &= \arg[G_1(ja^+)] - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \arg[G_1(ja^+)] - \pi \end{aligned}$$

Passiamo al punto ja^- :

$$\begin{aligned} \arg G(ja^-) &= \arg \left[\left(\frac{G_1(s)}{(s+ja)(s-ja)} \right)_{s=ja^-} \right] = \arg[G_1(ja^-)] - \arg[(s+ja)_{s=ja^-}] - \arg[(s-ja)_{s=ja^-}] = \\ &= \arg[G_1(ja^-)] + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \arg[G_1(ja^-)] \end{aligned}$$

A questo punto, dato che $G_1(s)$ non presenta singolarità in $+ja$, è ovvio che $\arg G_1(ja^-) = \arg G_1(ja^+)$. In base a questo, deduciamo che

$$\boxed{\arg G(ja^-) = \arg G(ja^+) - \pi}$$

Questa espressione dice che spostandoci da $s=ja^-$ e $s=ja^+$, ossia da $w=a^+$ ad $w=a^-$, la fase di $G(jw)$ ruota di -180° : questo fatto indica la presenza di un **asintoto obliquo**.

Diagramma per $w\hat{I} (-\infty, 0^-)$

Mentre nei paragrafi precedenti abbiamo determinato l'andamento del diagramma polare di $G(j\omega)$ per ω che varia nell'intervallo $(0^+, +\infty)$, vogliamo adesso ricavare l'andamento del diagramma polare di $G(j\omega)$ per ω che varia nell'intervallo $(-\infty, 0^-)$.

Per ottenere tale andamento, basta fare la seguente considerazione: in base ad una nota proprietà della trasformata di Laplace in base alla quale $G(s^*) = G^*(s)$, possiamo scrivere che $\boxed{G(-j\omega) = G^*(j\omega)}$ e

questa relazione dice che il diagramma per $\omega \in (-\infty, 0^-)$ si ottiene semplicemente ribaltando rispetto all'asse delle ascisse il diagramma ottenuto per $\omega \in (0^+, +\infty)$.

ESEMPIO

Vogliamo tracciare il diagramma polare delle seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)(s+0.25)(s+2)}$$

Osservando che non ci sono poli nell'origine, deduciamo che il sistema è di tipo 0. Osservando inoltre che il grado del numeratore (=0) è inferiore a quello del denominatore (=3), deduciamo anche che si tratta di un sistema di tipo passa-basso.

La prima operazione analitica da compiere è quella di mettere in evidenza, sia in corrispondenza dei poli sia in corrispondenza degli eventuali zeri, le costanti di tempo:

$$G(s) = \frac{20}{0.5(1+s)(1+4s)(1+0.5s)} = \frac{40}{(1+s)(1+4s)(1+0.5s)}$$

La seconda operazione consiste nel sostituire $s=j\omega$ al fine di ottenere la funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{40}{(1+j\omega)(1+j4\omega)(1+j0.5\omega)}$$

Studiamo il comportamento alle basse frequenze, in modo da individuare il punto di partenza del diagramma relativo all'intervallo $\omega \in (0^+, +\infty)$, e il comportamento alle alte frequenze, in modo da individuare il punto di arrivo del diagramma sempre relativo allo stesso intervallo.

Cominciamo dal comportamento alle basse frequenze, ossia per $\omega \rightarrow 0^+$: abbiamo visto prima, a livello del tutto generale, che $G(j\omega)$, per $\omega \rightarrow 0^+$, può essere approssimata trascurando (sia a numeratore sia a denominatore) i termini in $j\omega$. Nel nostro caso, quindi, $G(j\omega)$ può essere approssimata con

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 40$$

In base a questa espressione, deduciamo che il diagramma, come ci aspettavamo, parte dal punto $(40,0)$ situato sull'asse reale. Inoltre, dato che $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 40 > 0$, deduciamo che il diagramma parte da tale punto con fase nulla, ossia tangente all'asse reale.

Passiamo al comportamento alle alte frequenze, ossia per $\omega \rightarrow +\infty$: dato che $m < n$ (sistema passa-basso), abbiamo che

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg G(j\omega) = \varphi - (n - m) \frac{\pi}{2} = 0 - (3 - 0) \frac{\pi}{2} = -3 \frac{\pi}{2}$$

dove $\varphi = \arg\left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu}\right) = 0$ è la fase di $G(j\omega)$ calcolata prima per $\omega \rightarrow 0^+$.

Deduciamo dunque che il diagramma termina nell'origine con fase $-3\pi/2$, ossia tangente all'asse verticale.

A questo punto, possiamo per esempio determinare eventuali intersezioni della $G(j\omega)$ con gli assi coordinati. A tal fine, conviene esprimere $G(j\omega)$ separando la parte reale e la parte immaginaria: possiamo allora scrivere, eseguendo semplicemente una razionalizzazione del denominatore, che

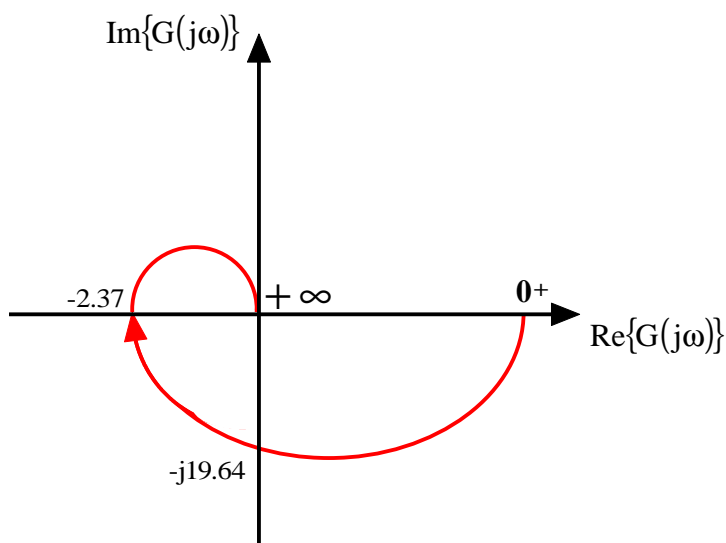
$$G(j\omega) = \frac{40}{(1+j\omega)(1+j4\omega)(1+j0.5\omega)} = \dots = \frac{40}{(1-6.5\omega^2) + j\omega(5.5-2\omega^2)}$$

A questo punto, dobbiamo verificare se le due equazioni $\text{Re}\{G(j\omega)\} = 0$ e $\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0$ ammettono una soluzione:

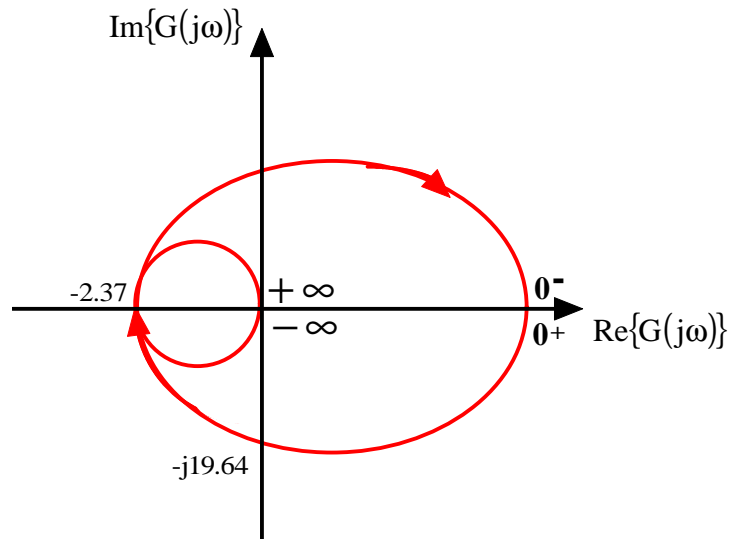
$$\text{Re}\{G(j\omega)\} = 0 \rightarrow 1 - 6.5\omega^2 = 0 \rightarrow \omega_1 = \sqrt{1/6.5} = 0.15 \rightarrow G(j\omega_1) = -j19.64$$

$$\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0 \rightarrow \omega(5.5 - 2\omega^2) = 0 \rightarrow 5.5 - 2\omega^2 = 0 \rightarrow \omega_2 = \sqrt{5.5/2} = 1.66 \rightarrow G(j\omega_2) = -2.37$$

Abbiamo dunque trovato che le intersezioni con gli assi coordinati sono nei punti $(0, -j19.64)$ e $(-2.37, 0)$. Siamo allora in grado di tracciare il diagramma polare relativo all'intervallo $\omega \in (0^+, +\infty)$:



A questo punto, il diagramma relativo all'intervallo $\omega \in (-\infty, 0^-)$ si ottiene semplicemente ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, quello appena ottenuto, per cui concludiamo che il diagramma polare (qualitativo) della funzione $G(j\omega)$ considerata è fatto nel modo seguente:



E' importante sottolineare che quello appena ricavato è il diagramma polare tipico di una funzione $G(j\omega)$ priva di zeri e con 3 poli reali negativi.

ESEMPIO

Vogliamo tracciare il diagramma polare delle seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{k}{s(1+0.2s)(1+0.05s)} \quad k>0$$

Abbiamo a che fare con un sistema passa-basso di tipo 1 (cioè con 1 polo nell'origine) e di 3° ordine (cioè con 3 poli).

Dato che sono state già messe in evidenza le costanti di tempo, possiamo immediatamente porre $s=j\omega$ al fine di ottenere la funzione di risposta armonica:

$$G(s) = \frac{k}{j\omega} \frac{1}{(1+j0.2\omega)(1+j0.05\omega)}$$

Cominciamo dal comportamento alle basse frequenze, ossia per $\omega \rightarrow 0^+$. Essendo il sistema di tipo 1, sappiamo che è presente un asintoto verticale, il quale individua l'andamento del diagramma per $\omega \rightarrow 0^+$ (in quanto $\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \infty$): l'ascissa di tale asintoto è data da

$$\sigma_a = \frac{k(b_1 a_\mu - a_1 b_0)}{a_\mu^2} = \dots = k \left(\sum_{i=1, \dots, m} z_i - \sum_{k=1, \dots, n} p_k \right) = -k \cdot 0.25$$

Per quanto riguarda, invece, la fase con cui il diagramma parte dall'infinito, sappiamo che essa è data dalla formula

$$\arg G(j\omega) = \varphi - \mu \frac{\pi}{2} = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Passiamo adesso al comportamento alle alte frequenze, ossia per $\omega \rightarrow +\infty$: dato che $m=0 < n=3$ (sistema passa-basso), abbiamo che

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg G(j\omega) = \varphi - (n - m) \frac{\pi}{2} = 0 - (3 - 0) \frac{\pi}{2} = -3 \frac{\pi}{2}$$

dove abbiamo posto ancora una volta $\varphi = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) = 0$.

Deduciamo dunque che il diagramma termina nell'origine con fase $-3\pi/2$, ossia tangente all'asse verticale.

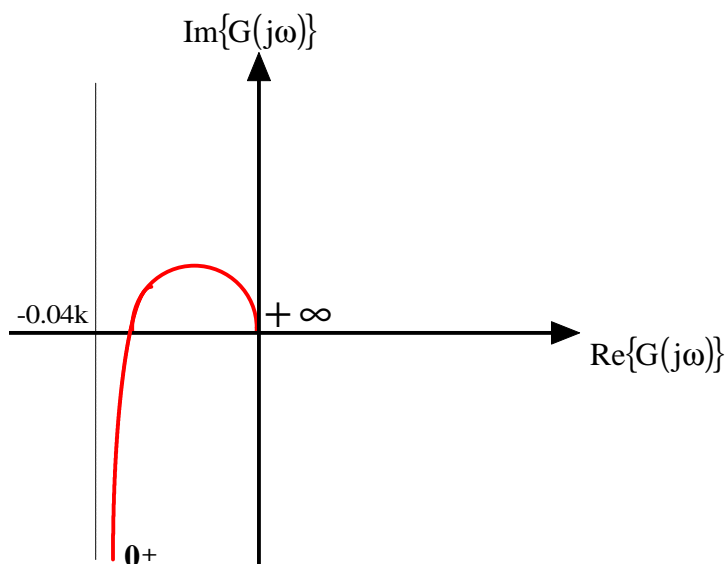
A questo punto, possiamo determinare eventuali intersezioni della $G(j\omega)$ con gli assi coordinati. Separando allora la parte reale e la parte immaginaria nell'espressione di $G(j\omega)$, abbiamo che

$$G(j\omega) = \frac{k}{-0.25\omega^2 + j\omega(1 - 0.01\omega^2)}$$

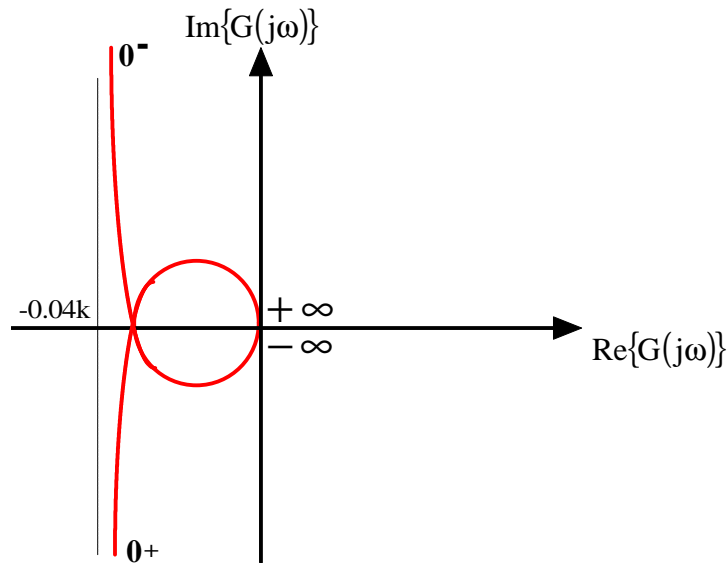
Da qui deduciamo che la parte reale non si annulla mai, per cui non ci sono intersezioni con l'asse immaginario, mentre l'intersezione con l'asse reale si ottiene risolvendo l'equazione $\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0$:

$$\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0 \rightarrow \omega(1 - 0.01\omega^2) = 0 \rightarrow 1 - 0.01\omega^2 = 0 \rightarrow \omega_1 = 10 \rightarrow G(j\omega_1) = -0.04k$$

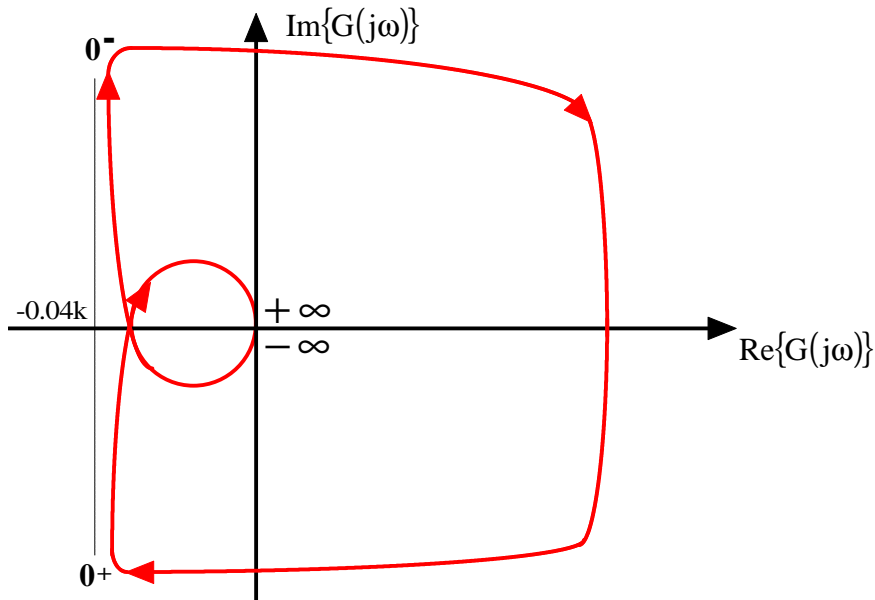
Siamo a questo punto in grado di tracciare il diagramma polare relativo all'intervallo $\omega \in (0^+, +\infty)$:



Ribaltando questo diagramma, otteniamo il diagramma relativo all'intervallo $\omega \in (-\infty, 0^-)$:



Non abbiamo ancora finito, in quanto dobbiamo “chiudere” la curva, ossia disegnare il diagramma relativo all’intervallo $(0^-, 0^+)$:



E’ abbastanza intuitivo, ma può anche essere dimostrato analiticamente, che la “**curva di chiusura**” del diagramma sia una *curva all’infinito*. Tale curva di chiusura ha sempre verso di percorrenza orario e può essere facilmente dedotta seguendo una regola fondamentale: *partendo dal punto del diagramma polare corrispondente a 0^- , si devono compiere tanti mezzi giri (cioè tante rotazioni di \mathbf{p}), in senso orario e fino al punto corrispondente a 0^+ , quanti sono i poli nell’origine.*

Nel nostro caso, abbiamo 1 solo polo nell’origine e quindi la chiusura avviene mediante una curva (che può essere tranquillamente approssimata mediante una semicirconferenza) corrispondente ad 1 solo mezzo giro, in senso orario, da 0^- a 0^+ .

ESEMPIO

Vogliamo tracciare il diagramma polare delle seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{k}{s^2(1+Ts)} \quad k>0, T>0$$

Abbiamo a che fare con un sistema passa-basso di tipo 2 (cioè con 2 poli nell'origine) e con ordine 3.

Dato che sono state già messe in evidenza le costanti di tempo, possiamo immediatamente porre $s=j\omega$ al fine di ottenere la funzione di risposta armonica:

$$G(s) = -\frac{k}{\omega^2} \frac{1}{(1+jT\omega)}$$

Cominciamo dal comportamento alle basse frequenze, ossia per $\omega \rightarrow 0^+$. Essendo il sistema di tipo 2, risulta che

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| &= \infty \\ \arg G(j\omega) &= \varphi - \mu \frac{\pi}{2} = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) - 2 \frac{\pi}{2} = 0 - \pi = -\pi \end{aligned}$$

per cui il diagramma tende all' ∞ con fase $-\infty$.

Passiamo adesso al comportamento alle alte frequenze, ossia per $\omega \rightarrow +\infty$: dato che $m < n$ (sistema passa-basso), abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg G(j\omega) &= \varphi - (n - m) \frac{\pi}{2} = 0 - (3 - 0) \frac{\pi}{2} = -3 \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\text{dove } \varphi = \arg \left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu} \right) = 0.$$

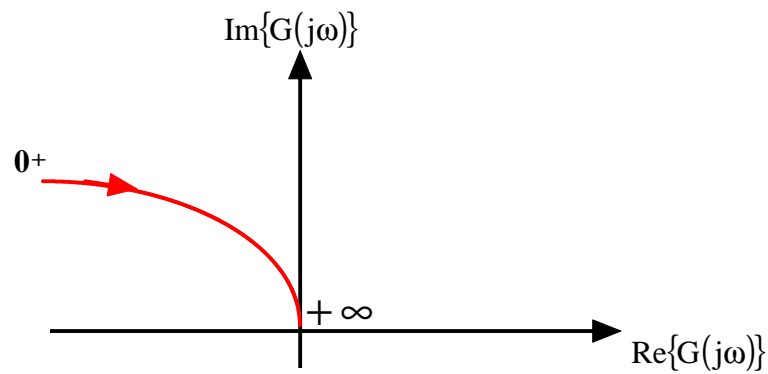
Deduciamo dunque che il diagramma termina nell'origine con fase $-3\pi/2$, ossia tangente all'asse verticale.

A questo punto, possiamo determinare eventuali intersezioni della $G(j\omega)$ con gli assi coordinati. Separando allora la parte reale e la parte immaginaria nell'espressione di $G(j\omega)$, abbiamo che

$$G(s) = -\frac{k}{\omega^2 + jT\omega^3}$$

e da qui si osserva che non ci sono intersezioni.

Siamo a questo punto in grado di tracciare il diagramma polare relativo all'intervallo $\omega \in (0^+, +\infty)$:



Questo diagramma va completato tracciando prima l'andamento per $\omega \in (-\infty, 0^-)$, simmetrico rispetto all'asse reale, e poi la curva chiusura all'infinito: riguardo quest'ultima, essendoci due poli nell'origine, sarà fatta da una circonferenza (corrispondente a 2 mezzi giri, cioè a due rotazioni di π) che "va" in verso orario dal punto corrispondente a 0^- al punto corrispondente a 0^+ .

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: <http://users.iol.it/sandry>
succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>