Esercizi Svolti di Controlli Automatici

Per Diplomi Teledidattici

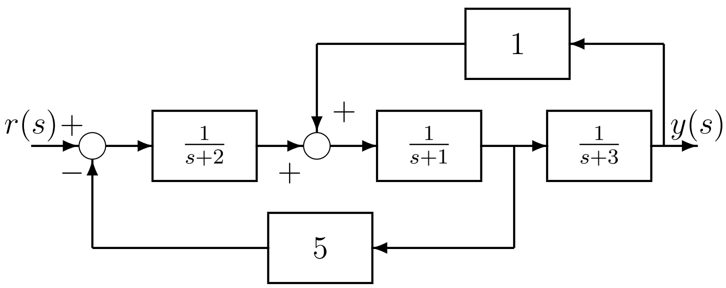
Gustavo Belforte
Giuseppe Calafiore
Marina Indri

Dipartimento di Automatica e Informatica
Politecnico di Torino

Giugno 2001

1 Esercizio

Sia dato il seguente schema a blocchi:



1. Determinare la funzione di trasferimento ingresso-uscita $y(s)/r(s)$
2. Determinare una terna di matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}^\mathbf{T}$ che descrivano, in variabili di stato, il sistema dato nel diagramma a blocchi.

1.1 Soluzione

Determiniamo la relazione ingresso uscita per via algebrica. Si denoti con y_1 l'uscita del blocco $1/(s+2)$ e con y_2 l'uscita del blocco $1/(s+1)$, dalla relazione al nodo di ingresso si ha

$$y_1 = \frac{1}{s+2}(r - 5y_2)$$

e dalla relazione al nodo di somma intermedio si ha

$$y_2 = \frac{1}{s+1}(y_1 + y) = \frac{1}{s+1}y_1 + \frac{1}{s+1}\frac{1}{s+3}y_2$$

Domanda 1

Sostituendo y_1 nella seconda equazione e semplificando si ottiene

$$y_2 = \frac{s+3}{s^3+6s^2+15s+19}r$$

da cui

$$y = \frac{1}{s+3}y_2 = \frac{1}{s^3+6s^2+15s+19}r.$$

Un approccio alternativo alla soluzione consiste invece nel manipolare direttamente lo schema a blocchi di partenza. Spostando il punto di presa di retroazione da y_2 a y si ottiene il diagramma modificato di figura 1(a). Semplificando l'anello di retroazione unitaria (positiva) superiore (si utilizza la nota formula $G/(1-G)$, dove G rappresenta il generico blocco in catena diretta) si ottiene lo schema di figura 1(b), che rappresenta un sistema a retroazione non unitaria negativa. Utilizzando la nota formula $G/(1+GH)$ dove G rappresenta il blocco in catena diretta e H il blocco in retroazione si ottiene quindi il risultato finale

$$y = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 15s + 19} r.$$

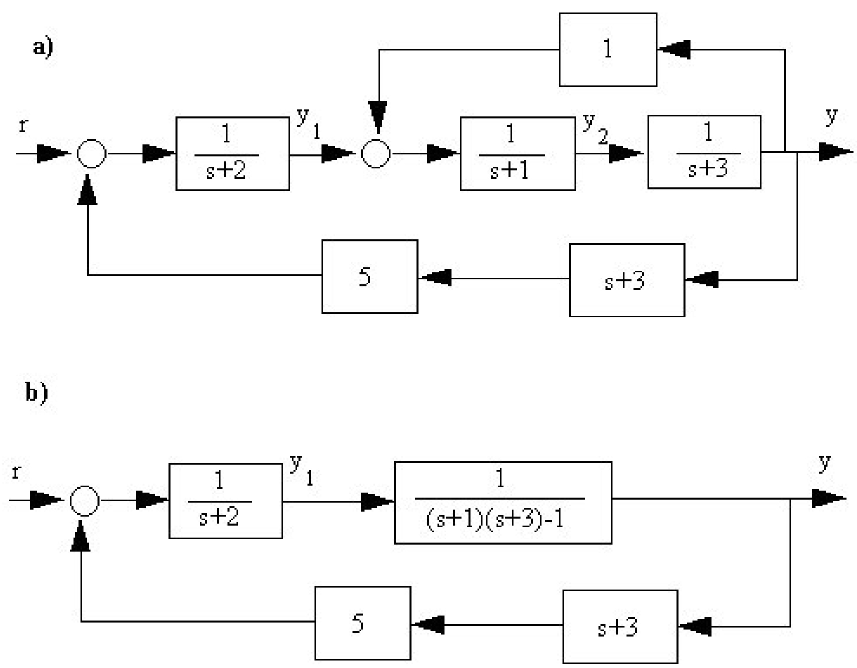


Figure 1: Schemi a blocchi modificati del sistema.

Domanda 2

Per una generica funzione di trasferimento del tipo

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

una particolare *realizzazione* in variabili di stato detta *forma canonica di controllo* è fornita dalle seguenti relazioni:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c^T} = [\mathbf{b_0};\ \mathbf{b_1};\ \mathbf{b_2};\ \cdots\ \mathbf{b_{n-1}}].$$

Applicate al problema in oggetto tali formule forniscono la seguente rappresentazione in variabili di stato della funzione di trasferimento del sistema:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -19 & -15 & -6 \end{bmatrix}; \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \mathbf{c^T} = [\mathbf{3};\ \mathbf{1};\ \mathbf{0}].$$

2 Esercizio

Si consideri il sistema molla-massa-smorzatore rappresentato in figura 2.

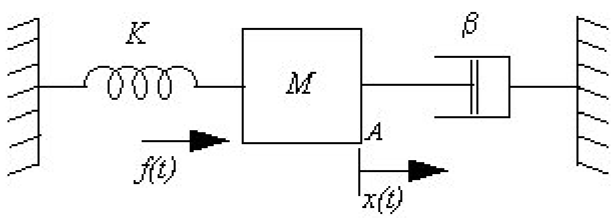


Figure 2: Sistema molla-massa-smorzatore.

Si assuma la forza $f(t)$ come ingresso e la posizione $x(t)$ del punto A come uscita.

1. Si calcoli la funzione di trasferimento ingresso-uscita del sistema.

2. Si calcoli quindi l'uscita $x(t)$, $t \geq 0$ che si ha in corrispondenza al segnale di ingresso $f(t)$ riportato in figura 3 quando si assegnano ai parametri i seguenti valori numerici: Massa $M = 1\ Kg$; Coefficiente d'attrito $\beta = 12\ N/(m/s)$; Costante di elasticità della molla $K = 20\ N/m$.

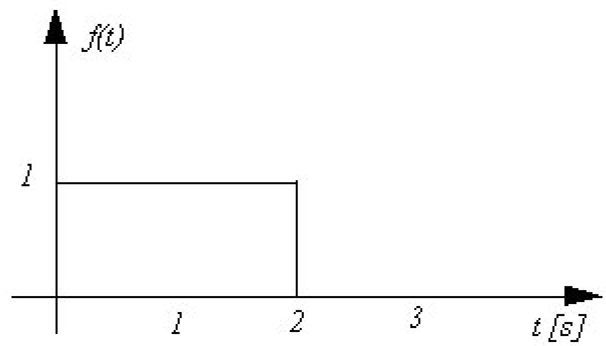


Figure 3: Andamento temporale del segnale di ingresso.

2.1 Soluzione

Domanda 1

Il sistema meccanico dato (traslatorio lineare) ha una sola massa per cui esso sarà completamente definito se si conoscono posizione e velocità di tale massa.

Preso come punto di riferimento della massa M il punto A di coordinata $x = x(t)$, scelta in modo tale che l'origine $x = 0$ sia in corrispondenza del punto di riposo del sistema, dalle equazioni della dinamica si ha

$$f(t) = M\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + Kx(t). \tag{1}$$

Questa equazione può essere trasformata secondo Laplace (il che implica assumere condizioni al contorno nulle) e risulta

$$f(s) = Ms^2x(s) + \beta sx(s) + Kx(s) = (Ms^2 + \beta s + K)x(s) \tag{2}$$

da cui la funzione di trasferimento $G(s) = x(s)/f(s)$ risulta

$$G(s) = \frac{x(s)}{f(s)} = \frac{1}{(Ms^2 + \beta s + K)}. \tag{3}$$

Per rispondere alla domanda si può anche mettere prima il sistema in variabili di stato e quindi trovare la funzione di trasferimento usando le formule che permettono di passare da una rappresentazione all'altra ($G(s) = \mathbf{c^T}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$). Per far ciò si osserva che posizione e velocità della massa M (cioè di un suo punto qualunque) sono una possibile scelta di variabili di stato del sistema. Ovviamente questa scelta non è *obbligata* ma è *conveniente*. Scelte dunque le variabili di stato $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}(t)$ dalla relazione (1) risulta

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{\beta}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}f(t) \end{array} \tag{4}$$

e scelta come uscita $y(t)$ del sistema la variabile posizione $x_1(t)$, il sistema può essere scritto nella forma matriciale

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{\beta}{M} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \mathbf{f(t)} \quad . \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{gathered} \tag{5}$$

Si può quindi calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = x(s)/f(s) = y(s)/f(s)$ con la relazione $G(s) = \mathbf{c^T(sI - A)^{-1}b}$.

$$\begin{aligned} G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K}{M} & s + \frac{\beta}{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s(s + \beta/M) + K/M} \begin{bmatrix} s + \frac{\beta}{M} & -\frac{K}{M} \\ 1 & s \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} = \\ = \frac{M}{Ms^2 + \beta s + K} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{\beta}{M} & 1 \\ -\frac{K}{M} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} = \\ = \frac{M}{Ms^2 + \beta s + K} \begin{bmatrix} (s + \frac{\beta}{M}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} = \\ = \frac{M}{Ms^2 + \beta s + K} \frac{1}{M} = \frac{1}{Ms^2 + \beta s + K} \end{aligned} \tag{6}$$

che risulta uguale alla relazione (3).

Da ultimo si potrebbe risolvere il problema passando al circuito equivalente elettrico del sistema meccanico dato. In tal caso bisogna far corrispondere al corpo rigido in traslazione un punto (A) connesso al riferimento di massa elettrica (*"terra"*) con una capacità di valore M. Il punto A va poi connesso con la massa elettrica anche attraverso un'induttanza di valore $1/K$ e una resistenza di valore $1/\beta$ che rappresentano rispettivamente la molla e lo smorzatore. Alla forza $f(t)$ in ingresso al sistema corrisponde, nell'equivalente elettrico, una corrente che entra nel punto A, mentre la tensione $v_A(t)$ rappresenta la velocità del punto A. Con tali assunzioni si ottiene il circuito riportato in figura 4.

Occorre ricordare che noi desideriamo, come uscita, la posizione $x(t)$ della massa e che questa è data, nell'equivalente elettrico, dall'integrale della tensione $v_A(t)$ che rappresenta la

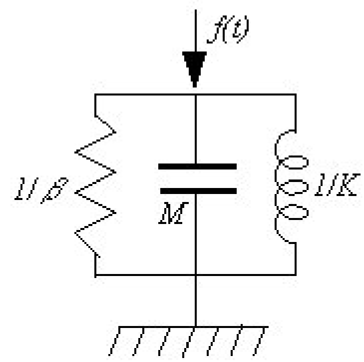


Figure 4: Equivalente elettrico del sistema meccanico di figura 1.

velocità della massa. Applicando al circuito elettrico le leggi fondamentali dell'elettrotecnica si trova

$$\begin{array}{rcl} v_A(t) & = & \frac{1}{\beta} i_R(t) \\ i_C(t) & = & M \frac{dv_A(t)}{dt} \\ v_A(t) & = & \frac{1}{K} \frac{di_L(t)}{dt} \\ f(t) & = & i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) \end{array} \tag{7}$$

dove con $i_R(t)$, $i_C(t)$ e $i_L(t)$ si sono indicate le correnti entranti nella resistenza, nel condensatore e nell'induttanza rispettivamente. Trasformando secondo Laplace le relazioni (7) si ottiene

$$\begin{array}{rcl} v_A(s) & = & \frac{1}{\beta} i_R(s) \\ i_C(s) & = & Msv_A(s) \\ v_A(s) & = & \frac{1}{K} s i_L(s) \\ f(s) & = & i_R(s) + i_C(s) + i_L(s) \end{array} \tag{8}$$

da cui

$$\begin{array}{rcl} i_R(s) & = & \beta v_A(s) \\ i_C(s) & = & Msv_A(s) \\ i_L(s) & = & \frac{K}{s} v_A(s) \\ f(s) & = & i_R(s) + i_C(s) + i_L(s) \quad = \quad (\beta + Ms + \frac{K}{s}) v_A(s) \end{array} \tag{9}$$

da cui si ha

$$\frac{v_A(s)}{f(s)} = \frac{s}{(Ms^2 + \beta s + K)} \tag{10}$$

che rappresenta la funzione di trasferimento tra la forza f(t) e la velocità della massa. Siccome la nostra uscita è invece la posizione $x(t)$ della massa che è data dall'integrale della tensione

$v_A(t)$ avremo

$$\frac{x(s)}{v_A(s)} = \frac{1}{s} \tag{11}$$

e quindi

$$G(s) = \frac{x(s)}{f(s)} = \frac{x(s)}{v_A(s)}\frac{v_A(s)}{f(s)} = \frac{1}{s}\frac{s}{(Ms^2 + \beta s + K)} = \frac{1}{(Ms^2 + \beta s + K)} \tag{12}$$

che risulta uguale alla relazione (3).

Anche per il circuito elettrico si può ricorrere alla descrizione in variabili di stato. In questo caso una scelta *conveniente* di variabili di stato è data dalla corrente nell'induttanza e dalla tensione sul condensatore. Scelte dunque come variabili di stato $z_1(t) = v_A(t)$ e $z_2(t) = i_L(t)$ (si sono indicate le variabili di stato con la lettera z per distinguerle dalle precedenti) dalle relazioni (7) risulta

$$\begin{array}{rclclcl} \dot{z}_1(t) & = & \frac{1}{M} i_C(t) & = & \frac{1}{M}(f(t) - i_L(t) - i_R(t)) & = & \frac{1}{M}(f(t) - z_2(t) - \beta z_1(t)) \\ \dot{z}_2(t) & = & K v_A(t) & = & K z_1(t) \end{array} \tag{13}$$

Per quanto riguarda l'uscita $y(t)$ del sistema, alla posizione $x(t)$ della massa corrisponde l'integrale della tensione $v_A(t) = z_1(t)$ che deve quindi essere espressa come combinazione lineare delle variabili di stato. Dalla seconda delle relazioni (13) risulta che

$$z_1(t) = \frac{1}{K}\dot{z}_2(t) \tag{14}$$

e qundi si avrà che

$$y(t) = \frac{1}{K} z_2(t). \tag{15}$$

Il sistema può dunque essere scritto nella forma matriciale

$$\begin{array}{c} \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{M} & -\frac{1}{M} \\ K & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{f(t)} \\ \\ y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix} \mathbf{z} \end{array} . \tag{16}$$

Si può quindi calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = x(s)/f(s) = y(s)/f(s)$ con la relazione $G(s) = \mathbf{c^T}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{\mathbf{-1}}\mathbf{b}$.

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{\beta}{M} & \frac{1}{M} \\ -K & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix} \frac{1}{s(s+\beta/M)+K/M} \begin{bmatrix} s & K \\ -\frac{1}{M} & s+\frac{\beta}{M} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{M}{Ms^2+\beta s+K} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -\frac{1}{M} \\ K & s+\frac{\beta}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{M}{Ms^2+\beta s+K} \begin{bmatrix} 1 & s+\frac{\beta}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{M}{Ms^2+\beta s+K} \frac{1}{M} = \frac{1}{Ms^2+\beta s+K}
\end{aligned} \tag{17}
$$

che risulta uguale alla relazione (3) e alla relazione (6).

Come considerazione finale si può osservare come sia le variabili di stato $\mathbf{x}$ che le $\mathbf{z}$ sono variabili fisiche e potrebbero quindi essere tutte misurate anche se non con la stessa facilità. Questo fatto tuttavia non ha nessuna rilevanza per il problema in questione.

Domanda 2

Per rispondere a questa domanda occorre ricordare che si può trovare l'andamento nel tempo dell'uscita di un sistema dinamico, quando in ingresso è applicato un ben determinato segnale, semplicemente antitrasformando il prodotto della funzione di trasferimento per la trasformata del segnale in ingresso. Infatti si ha

$$
x(t) = \mathcal{L}^{-1}[x(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)f(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)\mathcal{L}[f(t)]] \tag{18}
$$

dove con $\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$ e $\mathcal{L}[\cdot]$ si sono indicati rispettivamente gli operatori di antitrasformazione e trasformazione di Laplace.

Occorre quindi trovare la trasformata del segnale di ingresso $f(t)$; a questo proposito si può notare come il segnale $f(t)$ dato possa essere visto come la somma di due gradini di ampiezza unitaria, uno positivo in $t = 0$ e uno negativo ritardato in $t = 2$. In formule, indicando con $u(t)$ la funzione gradino, risulta

$$
f(t) = u(t) - u(t-2) \tag{19}
$$

che trasformata diventa

$$
f(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-2s} = \frac{1}{s}(1-e^{-2s}) \tag{20}
$$

e quindi, usando i valori numerici dati, si ha

$$
x(s) = G(s)f(s) = \frac{1}{(s^2+12s+20)}\frac{1}{s}(1-e^{-2s}) = \frac{(1-e^{-2s})}{s(s+2)(s+10)} \tag{21}
$$

che può essere scritta in forma di residui come

$$x(s) = (\frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s+10})(1 - e^{-2s}) \tag{22}$$

da cui

$$\begin{array}{rcll} x(t) & = & (R_1 + R_2e^{-2t} + R_3e^{-10t}) & \text{per } 0 \leq t < 2 \\ x(t) & = & (R_1 + R_2e^{-2t} + R_3e^{-10t}) - & \\ & & (R_1 + R_2e^{-2(t-2)} + R_3e^{-10(t-2)}) & \text{per } 2 \leq t \end{array} \tag{23}$$

e quindi

$$\begin{array}{rcll} x(t) & = & (R_1 + R_2e^{-2t} + R_3e^{-10t}) & \text{per } 0 \leq t < 2 \\ x(t) & = & R_2(e^{-2t} - e^{-2(t-2)}) + R_3(e^{-10t} - e^{-10(t-2)}) & \text{per } 2 \leq t \end{array} \tag{24}$$

o anche

$$\begin{array}{rcll} x(t) & = & (R_1 + R_2e^{-2t} + R_3e^{-10t}) & \text{per } 0 \leq t < 2 \\ x(t) & = & R_2(1 - e^4)e^{-2t} + R_3(1 - e^{20})e^{-10t} & \text{per } 2 \leq t \end{array} \tag{25}$$

I residui si ottengono come

$$\begin{array}{rclclclcl} R_1 & = & \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s(s+2)(s+10)} & = & \lim_{s\to 0} \frac{1}{(s+2)(s+10)} & = & \frac{1}{20} & = & 0,05 \\ R_2 & = & \lim_{s\to -2}(s+2)\frac{1}{s(s+2)(s+10)} & = & \lim_{s\to -2} \frac{1}{s(s+10)} & = & \frac{1}{-16} & = & -0,0625 \\ R_3 & = & \lim_{s\to -10}(s+10)\frac{1}{s(s+2)(s+10)} & = & \lim_{s\to -10} \frac{1}{s(s+2)} & = & \frac{1}{80} & = & 0,0125 \end{array} \tag{26}$$

L'andamento della funzione $x(t)$ per l'ingresso assegnato può essere ottenuto con la seguente serie di comandi MATLAB

```
n=[1];
d=[1 12 20];
t=linspace(0,5,250);
y=step(n,d,t);
yy=zeros(100,1);
yy=[yy;y(1:150)];
yyy=[y,yy,y-yy];
plot(t,yyy),grid
```

in cui `n` e `d` sono la rappresentazione vettoriale del numeratore e del denominatore mentre in `y` c'è la risposta al gradino. In `yy` è contenuta la risposta al gradino ritardata di 2 secondi mentre in `yyy`, rappresentato nel grafico di figura 5, le prime due colonne sono `y` e `yy`, l'ultima è la differenza delle prime due che è quindi la risposta richiesta. `yyy` ha 250 righe che corrispondono ai valori assunti dalle funzioni considerate in 250 istanti equispaziati su un orizzonte temporale di 5 secondi. Vi sono dunque 50 campioni per secondo.

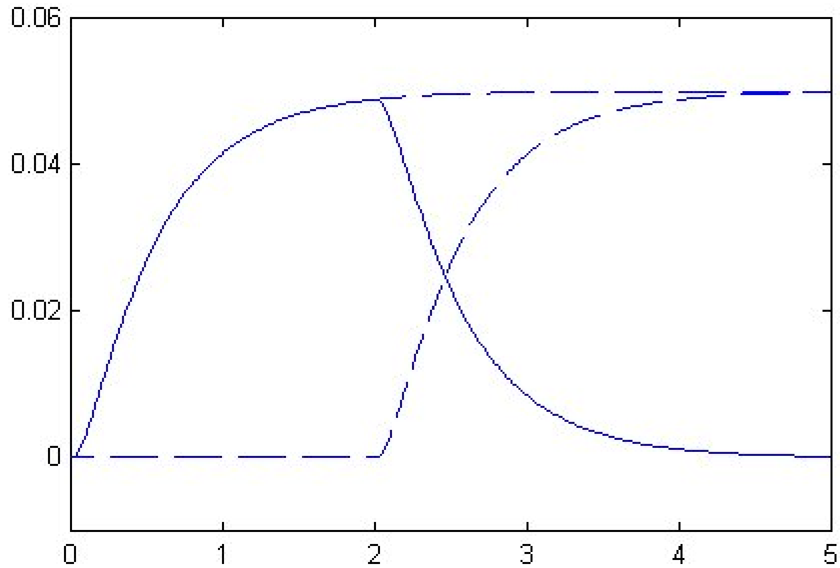


Figure 5: Uscita del sistema (linea continua) per l'andamento di ingresso mostrato in figura 2.

Possibili verifiche del procedimento e dei calcoli

Vengono qui riportate alcune considerazioni che si possono fare durante la risoluzione dell'esercizio per svolgere un verifica *"di massima"* e un controllo *"qualitativo e/o incrociato"* sulla correttezza dei risultati ottenuti. Tali considerazioni non sono da considerare esaustive di quanto può essere detto sull'esercizio in questione e non sono ordinate secondo alcun criterio di importanza o altro.

- Il sistema in questione è un sistema meccanico "passivo" e quindi sarà di per se stabile. Ciò vuol dire che gli autovalori del sistema (e quindi anche i poli della funzione di trasferimento) sono tutti a parte reale non positiva.

- Il sistema ha una sola massa e quindi è identificato perfettamente dalla conoscenza della posizione e della velocità di tale massa. Ciò significa che nelle rappresentazioni di stato ci sono due variabili di stato e la funzione di trasferimento deve essere del secondo ordine (polinomio di secondo grado al denominatore) a meno di una non completa controllabilità e osservabilità del sistema. Tuttavia, in questo caso semplice, la "comprensione fisica" del sistema ci dice che la forza $f(t)$ agisce direttamente sulla massa e quindi può determinare sia posizione che velocità della massa stessa e quindi il sistema è controllabile; mentre l'uscita è la posizione della massa stessa e quindi dalla sua conoscenza nel tempo si può ricavare il valore di posizione e velocità ai vari istanti e quindi il sistema è osservabile.

- Visto che con i valori numerici assegnati la funzione di trasferimento ha poli reali e distinti, la risposta al gradino deve avere tutti termini esponenziali e costanti, non oscillatori. Il grafico della risposta al gradino non avrà sovraelongazioni.

- La somma dei residui deve essere nulla perchè non c'è accoppiamento diretto tra ingresso e uscita: la funzione di trasferimento è razionale fratta propria (più poli che zeri) e la matrice D della rappresentazione in variabili di stato è nulla.

- La risposta al gradino deve avere un termine costante perchè la funzione di trasferimento non ha zeri nell'origine. Tale termine è quello che determina il valore dell'uscita a transitorio estinto ($t \to \infty$) ed è uguale al "guadagno in continua" della funzione di trasferimento e cioè il valore della funzione di trasferimento quando $s = 0$.

3 Esercizio

Sia data la seguente rappresentazione in variabili di stato di un sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

1. Determinare, se possibile, una retroazione degli stati tale per cui il sistema retroazionato abbia gli autovalori in: -1; -3; -5.

2. Costruire, se possibile, un osservatore degli stati che abbia gli autovalori in: -10; $-10 + j5$; $-10 - j5$.

3. Trovare la funzione di trasferimento del sistema dato.

4. Dire se il sistema è BIBO stabile.

3.1 Soluzione

Il sistema dato è rappresentato in forma simile alla forma canonica di Kalman di controllabilità, cioè le matrici caratteristiche del sistema $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ sono partizionate come

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_{22}} \end{bmatrix}; \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

dove

$$\mathbf{A_{11}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{A_{12}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{A_{22}} = \mathbf{-3}; \ \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La terza variabile di stato con il relativo autovalore in -3 è quindi non controllabile. Per verificare se il sistema è effettivamente in forma di Kalman bisogna verificare che il sistema ridotto $\mathbf{A_{11}}, \mathbf{b_1}$ sia completamente controllabile. La corrispondente matrice di controllabilità è $\mathbf{M_{11}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ed è di rango pieno per cui si può concludere che il sistema è effettivamente in forma di Kalman e che le due prime variabili di stato sono controllabili.

Domanda 1

Sia $\mathbf{x_1}$ il vettore ridotto di stato corrispondente agli stati completamente controllabili del sistema (in questo caso i primi due) e si consideri una retroazione del tipo $u_1 = -\mathbf{K_1 x_1}$. È possibile determinare la matrice di retroazione $\mathbf{K_1} = [\mathbf{k_1}; \ \mathbf{k_2}]$ tale da portare gli autovalori del sistema in -1; -3; -5 procedendo nel seguente modo.

1. Si collocano gli autovalori della parte controllabile in $\tilde{\lambda}_1 = -1$ e $\tilde{\lambda}_2 = -5$ lavorando sul sistema "ridotto" ($\mathbf{A_{11}}$, $\mathbf{b_1}$) e applicando una delle due seguenti procedure per il calcolo della retroazione $\mathbf{K_1}$:

   Primo metodo: applichiamo il principio di identità dei polinomi tra il polinomio caratteristico "desiderato" in catena chiusa (polinomio relativo alle radici da imporre in catena chiusa $\tilde{\lambda}_{1,2}$)

   $$p_{des}(s) = (s+1)(s+5) = s^2 + 6s + 5$$

   ed il polinomio caratteristico $p_c(s)$ della matrice in catena chiusa $\mathbf{A_{11c}}$

   $$\mathbf{A_{11c}} = \mathbf{A_{11}} - \mathbf{b_1 K_1} = \begin{bmatrix} -k_1 & 2-k_2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \ \rightarrow \ \mathbf{p_c(s) = s^2 + k_1 s + 2k_2 - 4}.$$

   Imponendo l'uguaglianza tra i coefficienti dei termini di pari grado si ottiene

   $$k_1 = 6; \ \ k_2 = 4,5; \ \ \text{quindi} \ \ \mathbf{K_1} = [\mathbf{6}; \ \mathbf{4,5}].$$

Secondo metodo: È possibile ricavare direttamente la matrice di retroazione $\mathbf{K_1}$ utilizzando il metodo seguente. Sia $p_{des}(s) = s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_0$ il polinomio caratteristico (relativo alla parte completamente controllabile) che si desidera imporre in anello chiuso e sia $p(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0$ il polinomio caratteristico di partenza (polinomio caratteristico di $\mathbf{A_{11}}$); m è la dimensione della parte completamente controllabile del sistema, cioè $\mathbf{A_{11}}$ è una matrice $m \times m$ (nel caso in esame $m = 2$). La matrice $\mathbf{K_1}$ si determina allora secondo la formula

$$\mathbf{K_1} = [\mathbf{a_0} - \mathbf{b_0};\ \mathbf{a_1} - \mathbf{b_1};\ \cdots;\ \mathbf{a_{m-1}} - \mathbf{b_{m-1}}]\mathbf{R},$$

dove $\mathbf{R}$ è una matrice calcolata come

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{g^T} \\ \mathbf{g^T A_{11}} \\ \vdots \\ \mathbf{g^T A_{11}^{(m-1)}} \end{bmatrix}, \tag{27}$$

essendo $\mathbf{g^T}$ l'ultima riga della inversa della matrice di controllabilità $\mathbf{M_{11}}$ relativa al sottosistema completamente controllabile $\mathbf{A_{11}}$, $\mathbf{b_1}$.

Nel caso in esame il polinomio caratteristico di partenza è dato da

$$p(s) = s^2 - 4;$$

quindi

$$\mathbf{K_1} = [\mathbf{5} + \mathbf{4};\ \mathbf{6} - \mathbf{0}]\mathbf{R}$$

dove $\mathbf{R}$ è determinata tramite la (27)

$$\mathbf{M_{11}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};\ \mathbf{M_{11}^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix};\ \rightarrow\ \mathbf{g^T} = [\mathbf{0};\ \mathbf{1/2}];\ \rightarrow\ \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui

$$\mathbf{K_1} = [\mathbf{9};\ \mathbf{6}]\mathbf{R} = [\mathbf{6};\ \mathbf{4,5}],$$

che coincide con quanto ottenuto tramite il primo metodo.

2. L'autovalore $\lambda_3 = -3$ non è spostabile tramite retroazione dello stato ed è quindi anche autovalore del sistema retroazionato, qualunque sia il guadagno di retroazione utilizzato. Il guadagno complessivo $\mathbf{K}$ è dato da

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K_1};\ \ \mathbf{K_2}]$$

dove $\mathbf{K_1}$ è il guadagno calcolato sul sottosistema controllabile e $\mathbf{K_2}$ è il guadagno di retroazione degli stati non controllabili. Da quanto detto segue che per qualsiasi valore di $\mathbf{K_2}$ si avranno gli autovalori della parte controllabile nelle posizioni desiderate (dipendono solo da $\mathbf{K_1}$) mentre gli autovalori relativi alla parte non controllabile restano invariati. $\mathbf{K_2}$ può quindi essere scelto a piacere e verrà in seguito usualmente posto pari a zero: $\mathbf{K_2} = \mathbf{0}$.

Si ottiene infine che tramite un controllo in retroazione del tipo $u = -\mathbf{Kx}$, dove $\mathbf{K} = [\mathbf{6};\ \mathbf{4,5};\ \mathbf{0}]$, gli autovalori del sistema retroazionato (avente matrice di stato $\mathbf{A_{cc}} = \mathbf{A} - \mathbf{bK}$) sono nelle posizioni desiderate -1; -3; -5.

Note al procedimento

- Se il sistema di partenza non è direttamente fornito in forma canonica di Kalman di controllo si presentano due casi: a) il sistema è completamente controllabile; b) il sistema non è completamente controllabile. Nel caso a) si procede come illustrato sopra considerando come sistema ridotto l'intero sistema. Nel caso b) occorre invece introdurre un cambiamento di base $\mathbf{x}^* = \mathbf{T^{-1}x}$ nello spazio di stato in modo da portare il sistema in forma canonica di Kalman. Si applica quindi il procedimento illustrato al sistema trasformato nella variabile di stato $\mathbf{x}^*$, ottenendo un guadagno di retroazione $\mathbf{K}^*$. Il guadagno di retroazione effettivo (retroazione sullo stato $\mathbf{x}$) si calcola quindi considerando che $u = \mathbf{K}^*\mathbf{x}^* = \mathbf{K}^*\mathbf{T^{-1}x}$, da cui

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^*\mathbf{T^{-1}}.$$

- Il guadagno di retroazione può essere calcolato direttamente tramite i comandi MATLAB `acker` oppure `place`. Riportiamo di seguito le istruzioni per il calcolo di $\mathbf{K}$ nel problema in oggetto utilizzando i comandi MATLAB:

```
% Introduzione dati relativi al sistema:
A=[0 2 1; 2 0 0; 0 0 -3];
B=[1 0 0]';
C=[1 0 0];

% Vettore contenente gli autovalori desiderati in catena chiusa:
pdes=[-1 -3 -5]';

% Calcolo di K con il comando acker:
Kacker=acker(A,B,pdes)
```

```
Warning: Matrix is singular to working precision.

Kacker =

   Inf   Inf   Inf
% Nota: siccome il sistema non e' completamente controllabile il comando
% acker fallisce, cioe' non riesce a trovare un risultato
% significativo.

% Calcolo di K con il comando place:
Kplace=place(A,B,pdes)
place: ndigits= 16
ans =
    6.0000    4.5000    1.0000

% Nota: il K fornito da MATLAB si riferisce ad una retroazione del tipo
% u=-Kx. Si noti inoltre che, per il particolare problema
% in questione, l'ultimo elemento di K puo' essere scelto a
% piacere ed e' in questo caso posto da MATLAB a 1.
```

- È sempre buona norma procedere ad una verifica del calcolo di $\mathbf{K}$ andando a calcolare gli autovalori della matrice del sistema retroazionato $\mathbf{A_{cc}} = \mathbf{A} - \mathbf{bK}$, che devono coincidere, a meno di errori di natura numerica, con quelli desiderati. Riportiamo di seguito i comandi MATLAB per tale verifica.

```
K=Kplace; % utilizzo il Kplace calcolato in precedenza.
Acc=A-B*K

Acc =

   -6.0000   -2.5000         0
    2.0000         0         0
         0         0   -3.0000

% Calcolo gli autovalori del sistema retroazionato:
eig(Acc)

ans =
```

```
-5.0000
-1.0000
-3.0000
```

Domanda 2

Costruiamo dapprima la matrice di osservabilità del sistema

$$\mathbf{S^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

il cui rango risulta essere pari a 3, quindi il sistema in esame è completamente osservabile, per cui è possibile posizionare gli autovalori dell'osservatore a piacere. In particolare si richiede di posizionare gli autovalori in $\tilde{\lambda}_1 = -10$; $\tilde{\lambda}_{2,3} = -10 \pm \jmath 5$ corrispondenti ad un polinomio caratteristico desiderato

$$p_{des}(s) = s^3 + 30s^2 + 325s + 1250;$$

il polinomio caratteristico del sistema di partenza è invece

$$p(s) = s^3 + 3s^2 - 4s - 12.$$

Anche nel caso del progetto dell'osservatore si propongono due metodi alternativi per il calcolo della matrice $\mathbf{L}$.

Il *primo metodo* si basa nuovamente sul principio di identità dei polinomi, applicato questa volta tra il polinomio desiderato $p_{des}(s)$ ed il polinomio caratteristico $p_{oss}(s)$ della matrice in catena chiusa dell'osservatore $\mathbf{A_{oss}} = \mathbf{A} + \mathbf{Lc^T}$. Nel caso in esame si ha $\mathbf{c^T} = [\mathbf{1};\ \mathbf{0};\ \mathbf{0}]$ e sia $\mathbf{L} = [\boldsymbol{\ell_1};\ \boldsymbol{\ell_2};\ \boldsymbol{\ell_3}]^\mathbf{T}$, allora

$$\mathbf{A_{oss}} = \begin{bmatrix} \ell_1 & 2 & 1 \\ 2+\ell_2 & 0 & 0 \\ \ell_3 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \ \rightarrow \ \mathbf{p_{oss}(s) = s^3 + (3-\boldsymbol{\ell_1})s^2 + (-3\boldsymbol{\ell_1} - 2\boldsymbol{\ell_2} - \boldsymbol{\ell_3} - 4)s + (-12 - 6\boldsymbol{\ell_2})}$$

Uguagliando i coefficienti dei termini di pari grado si ottiene il sistema

$$\begin{array}{rcl} -12 - 6\ell_2 & = & 1250 \\ -3\ell_1 - 2\ell_2 - \ell_3 - 4 & = & 325 \\ 3 - \ell_1 & = & 30 \end{array}$$

da cui si ottiene

$$\ell_1 = -27; \ \ \ell_2 = -210,3333; \ \ \ell_3 = 172,6667; \ \ \rightarrow \ \ \mathbf{L} = [\mathbf{-27};\ \mathbf{-210,3333};\ \mathbf{172,6667}]^\mathbf{T}.$$

Secondo metodo: Il secondo metodo proposto per il calcolo della matrice $\mathbf{L}$ dell'osservatore si basa sul *principio di dualità.* Tale metodo consiste sostanzialmente nel ricondurre il problema dato in un problema *duale* nel quale si deve progettare una matrice di retroazione degli stati $\mathbf{K_d}$ con uno dei metodi già discussi in precedenza. Ricordiamo che il *sistema duale* $(\mathbf{A_d}, \mathbf{b_d}, \mathbf{c_d^T})$ di un sistema $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c^T})$ è dato dalle relazioni $\mathbf{A_d} = \mathbf{A^T}$, $\mathbf{b_d} = \mathbf{c}$, $\mathbf{c_d^T} = \mathbf{b^T}$.

Calcoliamo quindi il guadagno di retroazione $\mathbf{K_d}$ per il sistema duale $(\mathbf{A_d}, \mathbf{b_d}, \mathbf{c_d^T})$ in modo da piazzare gli autovalori del sistema retroazionato in $\tilde{\lambda}_1 = -10$; $\tilde{\lambda}_{2,3} = -10 \pm \jmath 5$. A tal fine utilizziamo ad esempio il secondo metodo (o metodo diretto) per il calcolo del guadagno di retroazione:

$$\mathbf{K_d} = [\mathbf{1250} + \mathbf{12};\ \mathbf{325} + 4;\ \mathbf{30} - \mathbf{3}]\mathbf{R} = [\mathbf{1262};\ \mathbf{329};\ \mathbf{27}]\mathbf{R}$$

dove

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{g^T} \\ \mathbf{g^T A_d} \\ \vdots \\ \mathbf{g^T A_d^{n-1}} \end{bmatrix},$$

dove $\mathbf{g^T}$ è l'ultima riga della matrice $\mathbf{M_d^{-1}}$, essendo $\mathbf{M_d}$ la matrice di controllabilità del sistema duale, che coincide con la trasposta della matrice di osservabilità $\mathbf{S}$ del sistema originario, quindi

$$\mathbf{M_d^{-1}} = \mathbf{S^{T(-1)}} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & -1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{g^T} = [\mathbf{0};\ \mathbf{1/6};\ \mathbf{-1/3}]$$

da cui si ricava (ricordando che $\mathbf{A_d} = \mathbf{A^T}$)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{K_d} = [\mathbf{1262};\ \mathbf{329};\ \mathbf{27}]\mathbf{R} = [\mathbf{27};\ \mathbf{210.3333};\ \mathbf{-172.6667}].$$

Dalla teoria della dualità è infine noto che $\mathbf{L} = -\mathbf{K_d^T}$ quindi il guadagno dell'osservatore è dato da

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -27 \\ -210.3333 \\ 172.6667 \end{bmatrix},$$

che conferma quando calcolato tramite il primo metodo.

Verifichiamo infine il procedimento calcolando (eventualmente con l'ausilio di MATLAB) gli autovalori della matrice di sistema $\mathbf{A_{oss}}$ dell'osservatore progettato:

$$\mathbf{A_{oss}} = \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{c}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -27 & 2 & 1 \\ -208.3333 & 0 & 0 \\ 172.6667 & 0 & -3 \end{bmatrix};$$

```
Aoss=A+L*C;
eig(Aoss)
ans =

 -10.0000 + 5.0000i
 -10.0000 - 5.0000i
 -10.0000
```

Domanda 3

Per determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra l'ingresso u e l'uscita y applichiamo la nota formula

$$G(s) = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}.$$

Occorre dapprima calcolare l'inversa della matrice

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -2 & -1 \\ -2 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix}; \ \det(\mathbf{sI} - \mathbf{A}) = \mathbf{p(s)}$$

che è calcolabile tramite la formula della matrice aggiunta

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p(s)}}\mathrm{Adj}(\mathbf{sI} - \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p(s)}}\begin{bmatrix} s(s+3) & 2(s+3) & s \\ 2(s+3) & s(s+3) & 2 \\ 0 & 0 & s^2-4 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene infine

$$G(s) = \frac{s(s+3)}{p(s)} = \frac{s(s+3)}{s^3+3s^2-4s-12} = \frac{s}{s^2-4}.$$

Note:

1. Data la struttura delle matrici di ingresso e di uscita $\mathbf{b}, \mathbf{c^T}$ è in questo caso immediato notare che l'unico elemento di $\mathrm{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ utile ai fini del calcolo di $G(s)$ è quello in posizione $(1;1)$ per cui era possibile evitare il calcolo di tutta la matrice aggiunta e limitarsi a determinare solo l'elemento in posizione $(1;1)$. Considerazioni di questo genere sono utili ogni volta che siano presenti degli elementi nulli nelle matrici $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c^T}$.

2. La presenza di una "cancellazione zero-polo" cioè di una semplificazione tra numeratore e denominatore indica una situazione di non completa controllabilità/osservabilità.

3. Ricordando che la funzione di trasferimento di un generico sistema coincide con la funzione di trasferimento ottenuta dalla parte completamente controllabile e completamente osservabile del sistema, e considerando che il sistema dato è già fornito in forma di Kalman di controllabilità ed è completamente osservabile si ha che

   $$G(s) = \mathbf{c_1^T}(\mathbf{sI} - \mathbf{A_{11}})^{-\mathbf{1}}\mathbf{b_1};\ \mathbf{c_1^T} = [\mathbf{1};\ \mathbf{0}].$$

   Il vantaggio risiede in questo caso nel fatto che la matrice da invertire ha dimensioni (2×2) invece che (3×3).

4. La funzione di trasferimento $G(s)$ può essere immediatamente ricavata tramite il comando MATLAB `ss2tf` nel seguente modo.

```
[n,d]=ss2tf(A,B,C,0,1)
n =
     0     1     3     0

d =
     1     3    -4   -12
```

   dove n e d sono vettori MATLAB che contengono i coefficienti del numeratore e denominatore della funzione di trasferimento (digitare `help ss2tf` per maggiori dettagli sul comando). Per eliminare eventuali fattori comuni tra numeratore e denominatore si può utilizzare il comando `minreal` ottenendo la funzione di trasferimento in forma ridotta:

```
[n,d]=minreal(n,d)
n =
     0     1     0

d =
    1.0000    0.0000   -4.0000
```

Domanda 4

Un sistema è BIBO stabile se tutti i poli della funzione di trasferimento hanno parte reale strettamente negativa. Nel caso in esame si ha

$$G(s) = \frac{s}{s^2 - 4}$$

che ha poli in ± 2 quindi il sistema non è BIBO stabile.

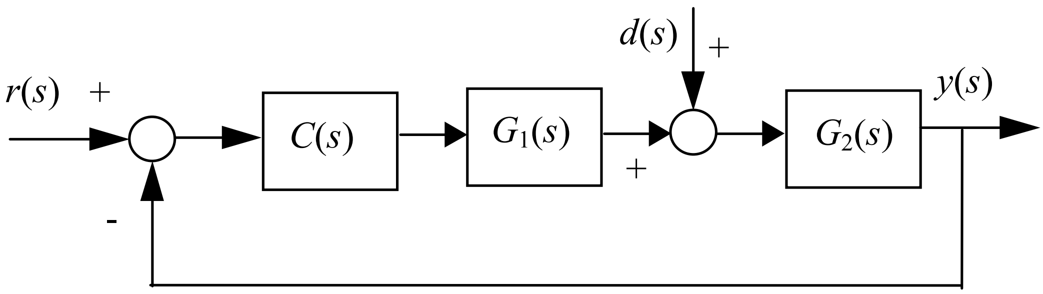
Analogamente, si dice che un sistema è BIBO stabile se gli autovalori della parte controllabile e osservabile del sistema sono a parte reale strettamente negativa. Nel caso in esame la matrice relativa alla parte controllabile e osservabile del sistema è data da

$$\mathbf{A_{11}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono ± 2 per cui si conclude nuovamente che il sistema non è stabile in senso BIBO.

4 Esercizio

È dato il seguente sistema di controllo



con

$$G_1(s) = \frac{1}{s(1+s/10)}; \qquad G_2(s) = \frac{0.1}{s(1+s/100)}$$

Il sistema retroazionato deve essere stabile e deve soddisfare contemporaneamente le seguenti specifiche:

- avere un errore di velocità $\leq 1\,\%$;
- avere una pulsazione di taglio ω_c pari a 0.8 rad/s.

Dire se ciò può essere ottenuto con uno, l'altro, con tutti e due o con nessuno dei compensatori $C_1(s)$ e $C_2(s)$ delle forme seguenti:

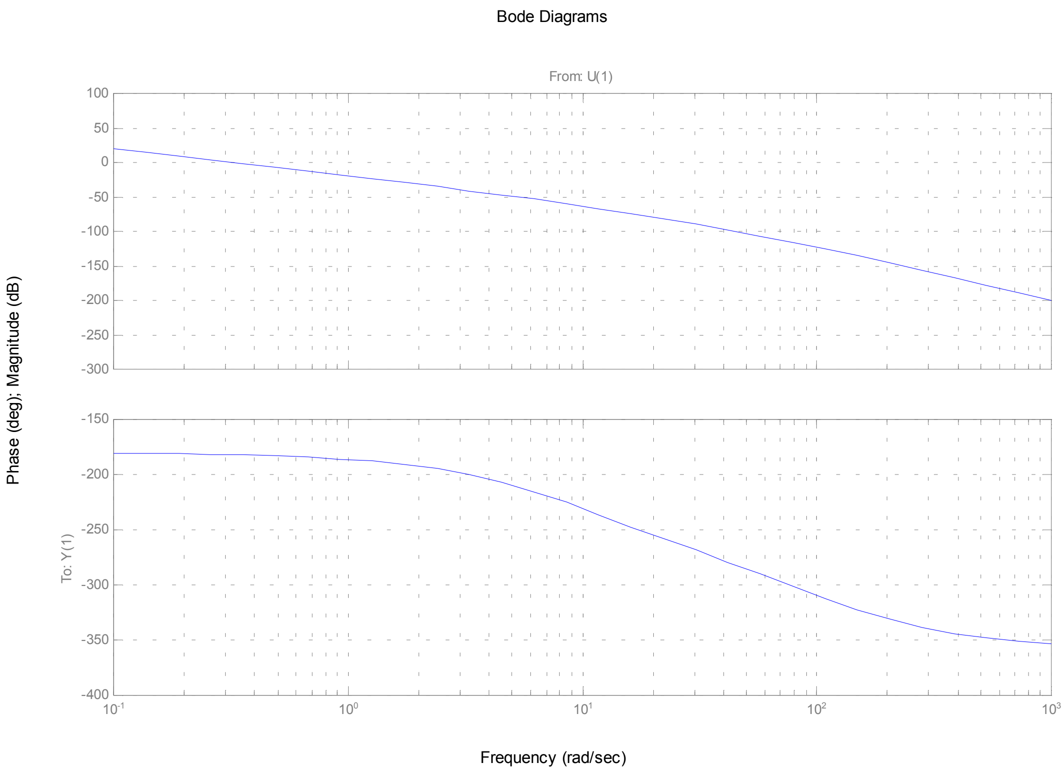
$$C_1(s) = \frac{1+s/(\alpha_1\omega_1)}{1+s/\omega_1}; \qquad C_2(s) = \frac{1+s/\omega_2}{1+s/(\alpha_2\omega_2)}$$

in cui siano dimensionati opportunamente i parametri $\alpha_1 > 1, \omega_1 > 0, \alpha_2 > 1, \omega_2 > 0$.
(Per la soluzione dell'esercizio sono accettabili i risultati, le precisioni e le conclusioni che si ottengono usando diagrammi di Bode approssimati, lineari a tratti).

4.1 Soluzione

Sia $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \dfrac{0.1}{s^2(1+s/10)(1+s/100)}$.

Poiché $G(s)$ è di tipo 2 (ovvero ha due poli nell'origine), l'errore di velocità è nullo, purché il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile.



In assenza di compensatore, la pulsazione di taglio ω_c può essere approssimativamente calcolata dall'andamento della $G(s)$ alle basse frequenze, imponendo:

$$\frac{0.1}{\omega_c^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_c \cong 0.316 \text{ rad/s}$$

(si può confrontare il valore approssimato con quello esatto, ricavabile dal diagramma di Bode determinato con Matlab, riportato in figura).
Il modulo di $G(s)$ nella pulsazione di taglio desiderata (pari a 0.8 rad/s) vale

$$|G(j0.8)| \cong \frac{0.1}{0.8^2} = 0.15625 = -16.12\,\mathrm{dB}$$

mentre la fase vale circa -185^o.[1]
Per soddisfare la specifica imposta, è necessario quindi inserire una rete anticipatrice (ovvero utilizzare un compensatore della forma $C_2(s)$), che faccia aumentare di 16.12 dB il modulo della funzione d'anello in 0.8 rad/s (per portare la pulsazione di taglio nel valore desiderato) e che contemporaneamente garantisca un recupero di fase di almeno 5^o per ottenere l'asintotica stabilità del sistema retroazionato. Il compensatore della forma $C_1(s)$ non è adatto allo scopo, poiché corrisponde ad una rete attenuatrice, che come tale non può comportare l'aumento del guadagno della funzione d'anello (ovvero della sua pulsazione di taglio), bensì soltanto una sua riduzione.

Per completezza, si riporta una possibile scelta per il compensatore $C_2(s)$ (anche se non strettamente richiesto dall'esercizio):

$$C_2(s) = \frac{1+8.75s}{1+\frac{8.75}{16}s}$$

corrispondente a $\alpha_2 = 16, \omega_2 = 0.114$ rad/s (ovvero a $m = 16, \tau = 8.75$, considerando la rete anticipatrice espressa come: $\frac{1+\tau s}{1+\frac{\tau}{m}s}$). Con tale compensatore si ottengono: $\omega_c = 0.8$ rad/s e margine di fase pari a circa 53^o.

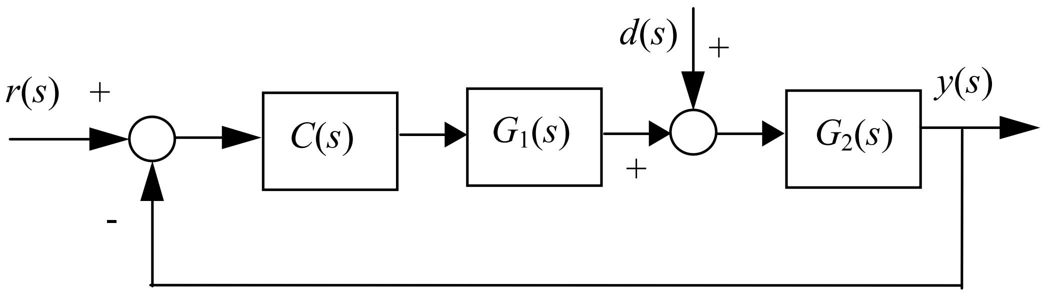
---

[1] La fase può essere valutata dal diagramma di Bode, ovvero calcolata come

$$\varphi(G(j0.8)) = -\mathrm{atan}\left(\frac{0.8}{10}\right) - \mathrm{atan}\left(\frac{0.8}{100}\right) - 180^o$$

5 Esercizio

È dato il seguente sistema di controllo



con

$$G_1(s) = \frac{5}{s(1+s/5)}; \qquad G_2(s) = \frac{1}{s(1+s/50)}$$

Il sistema retroazionato deve essere stabile e deve soddisfare contemporaneamente le seguenti specifiche:

- avere un errore di velocità ≤ 2 %;
- avere una pulsazione di taglio ω_c pari a 20 rad/s.

Dire se ciò può essere ottenuto con uno, l'altro, con tutti e due o con nessuno dei compensatori $C_1(s)$ e $C_2(s)$ delle forme seguenti:

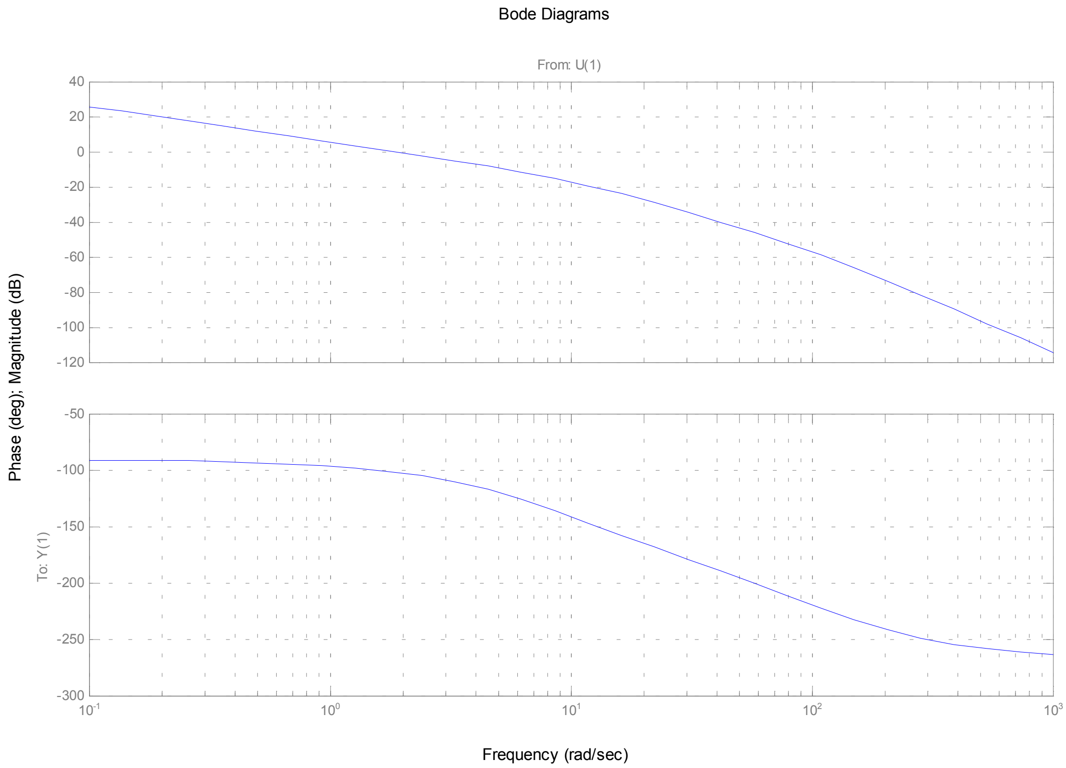
$$C_1(s) = \frac{1+s/(\alpha_1\omega_1)}{1+s/\omega_1}; \qquad C_2(s) = \frac{1+s/\omega_2}{1+s/(\alpha_2\omega_2)}$$

in cui siano dimensionati opportunamente i parametri $\alpha_1 > 1, \omega_1 > 0, \alpha_2 > 1, \omega_2 > 0$.
(Per la soluzione dell'esercizio sono accettabili i risultati, le precisioni e le conclusioni che si ottengono usando diagrammi di Bode approssimati, lineari a tratti).

5.1 Soluzione

Sia $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \dfrac{2}{s(1+s/10)(1+s/100)}$.

Poiché $G(s)$ è di tipo 1 (ovvero ha un polo nell'origine), l'errore di posizione è nullo, purché il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile.



In assenza di compensatore, la pulsazione di taglio ω_c può essere approssimativamente calcolata imponendo:

$$\frac{2}{\omega_c} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_c \cong 2 \text{ rad/s}$$

(si può confrontare il valore approssimato con quello esatto, ricavabile dal diagramma di Bode determinato con Matlab, riportato in figura).

Il modulo di $G(s)$ nella pulsazione di taglio desiderata (pari a 0.5 rad/s) vale

$$\left|G(j0.5)\right| \cong \frac{2}{0.5} = 4 = 12 \text{ dB}$$

mentre la fase vale circa –93°.

Per soddisfare le specifiche date, è necessario diminuire il modulo della funzione d'anello fino a portare la pulsazione di taglio dal valore attuale di 2 rad/s a quello desiderato di 0.5 rad/s; in corrispondenza di tale pulsazione, la fase della funzione d'anello è tale da garantire l'asintotica stabilità del sistema retroazionato, con un ottimo margine di fase.

Si può utilizzare allora un compensatore della forma $C_1(s)$, corrispondente ad una rete attenuatrice, scegliendo i parametri α_1, ω_1, in modo da garantire alla pulsazione di 0.5 rad/s una diminuzione del guadagno d'anello di 12 dB. Il compensatore $C_2(s)$ non è ovviamente adatto allo scopo, poiché corrisponde ad una rete anticipatrice, che comporta un aumento del guadagno (e quindi della pulsazione di taglio).

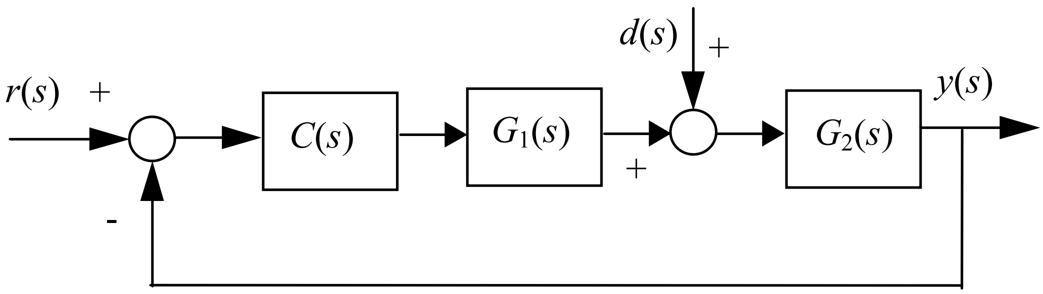
Per completezza, si riporta una possibile scelta per il compensatore $C_1(s)$ (anche se non strettamente richiesto dall'esercizio):

$$C_2(s) = \frac{1+25s}{1+100s}$$

corrispondente a $\alpha_2 = 4, \omega_2 = 0.01$ rad/s (ovvero a $m = 4, \tau = 100$, considerando la rete anticipatrice espressa come: $\dfrac{1+\frac{\tau}{m}s}{1+\tau s}$). Con tale compensatore si ottengono: $\omega_c = 0.5$ rad/s e margine di fase pari a circa 83°.

6 Esercizio

È dato il seguente sistema di controllo



con

$$G_1(s) = \frac{20}{s(1+s/10)}; \qquad G_2(s) = \frac{0.1}{(1+s/100)}$$

Il sistema retroazionato deve essere stabile e deve soddisfare contemporaneamente le seguenti specifiche:

- avere un errore di posizione $\leq 1\,\%$;
- avere una pulsazione di taglio ω_c pari a 0.5 rad/s.

Dire se ciò può essere ottenuto con uno, l'altro, con tutti e due o con nessuno dei compensatori $C_1(s)$ e $C_2(s)$ delle forme seguenti:

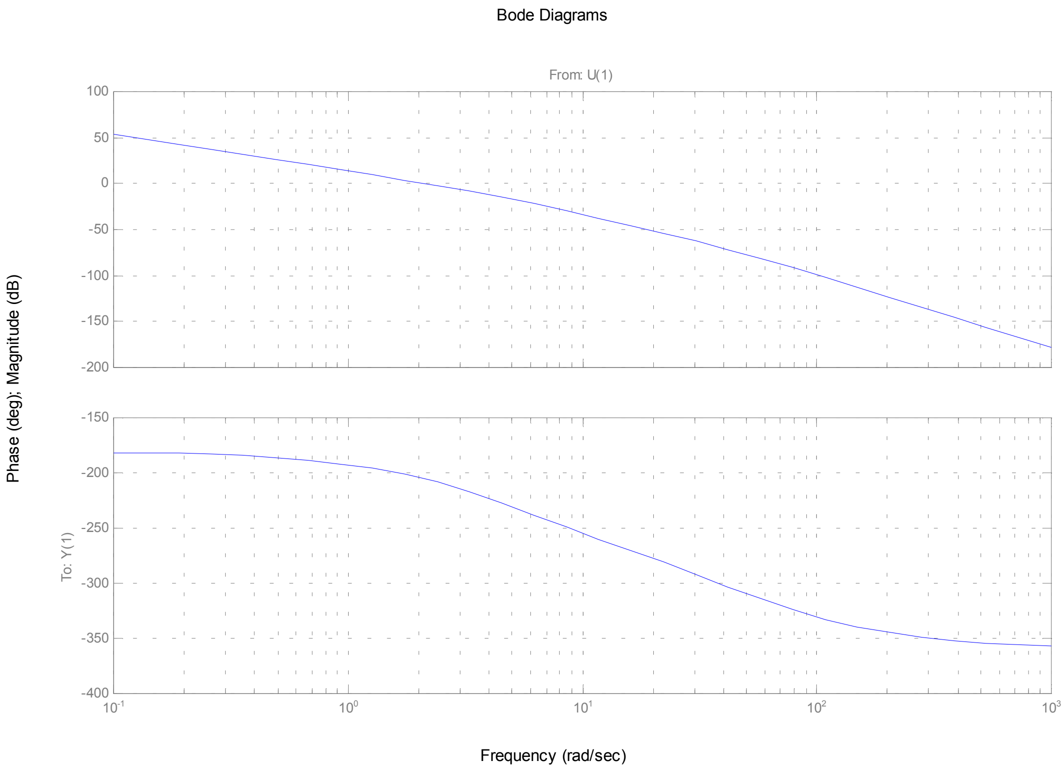
$$C_1(s) = \frac{1+s/(\alpha_1\omega_1)}{1+s/\omega_1}; \qquad C_2(s) = \frac{1+s/\omega_2}{1+s/(\alpha_2\omega_2)}$$

in cui siano dimensionati opportunamente i parametri $\alpha_1 > 1, \omega_1 > 0, \alpha_2 > 1, \omega_2 > 0$.
(Per la soluzione dell'esercizio sono accettabili i risultati, le precisioni e le conclusioni che si ottengono usando diagrammi di Bode approssimati, lineari a tratti).

6.1 Soluzione

Sia $G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \dfrac{5}{s^2(1+s/5)(1+s/50)}$.

Poiché $G(s)$ è di tipo 2 (ovvero ha due poli nell'origine), l'errore di velocità è nullo, purché il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile.



In assenza di compensatore, la pulsazione di taglio ω_c può essere approssimativamente calcolata dall'andamento della $G(s)$ alle basse frequenze, imponendo:

$$\frac{5}{\omega_c^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_c \cong 2.236 \text{ rad/s}$$

(si può confrontare il valore approssimato con quello esatto, ricavabile dal diagramma di Bode determinato con Matlab, riportato in figura).

Il modulo di $G(s)$ nella pulsazione di taglio desiderata (pari a 20 rad/s) vale

$$|G(j20)| \cong \frac{5}{20^2} \cdot \frac{1}{20/5} = 3.125 \cdot 10^{-3} = -50.1\,\text{dB}$$

mentre la fase vale circa -278°.

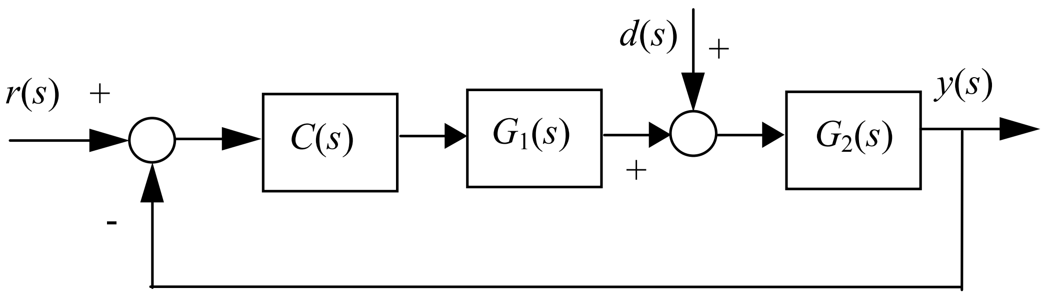
Per soddisfare le specifiche date, sarebbe necessario aumentare il modulo della funzione d'anello fino a portare la pulsazione di taglio dal valore attuale di 2.236 rad/s a quello desiderato di 20 rad/s, e contemporaneamente recuperare almeno 98° in corrispondenza di tale pulsazione, per garantire l'asintotica stabilità del sistema retroazionato.

Nessuno dei due compensatori proposti (né il loro contemporaneo utilizzo) può consentire il soddisfacimento della specifica data.

$C_1(s)$ corrisponde infatti ad una rete attenuatrice che, come tale, comporta una attenuazione del modulo della funzione d'anello (e quindi una diminuzione della pulsazione di taglio) e nessun recupero di fase.
$C_2(s)$ corrisponde ad una rete anticipatrice che da sola può comportare un recupero di fase pari al massimo a 90° (per $\alpha \to \infty$), ovvero insufficiente a garantire l'asintotica stabilità del sistema retroazionato.
(Per soddisfare le specifiche date dovrebbero essere inserite più reti anticipatrici, ed eventualmente un opportuno guadagno per portare la pulsazione di taglio esattamente nel valore richiesto).

7 Esercizio

È dato il seguente sistema di controllo



con

$$G_1(s) = \frac{80}{(s+16)}; \qquad G_2(s) = \frac{1}{(s+0.8)}$$

Determinare un compensatore $C(s)$ tale che il sistema retroazionato, oltre ad essere stabile, soddisfi alle seguenti specifiche:

- sia astatico rispetto al disturbo d costante,
- abbia un errore di velocità **esattamente uguale** a 1%,
- abbia un margine di fase $m_\varphi \geq 45^o$,
- la pulsazione di taglio ω_c sia tale che $7 \leq \omega_c \leq 8$ rad/s.

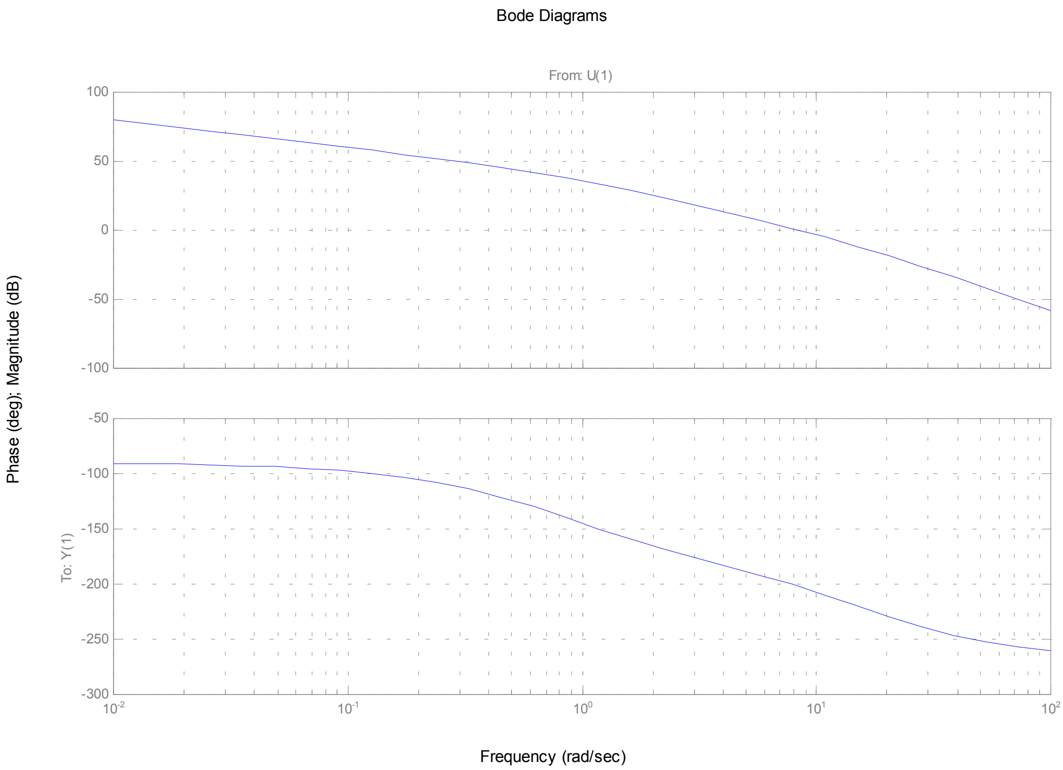
7.1 Soluzione

Affinché il sistema retroazionato sia astatico al disturbo d costante, è necessario inserire un polo nell'origine nel blocco $C(s)$, che si trova *a monte* del punto di ingresso del disturbo stesso.
Il sistema complessivo sul ramo diretto, $G(s) = C(s)\ G_1(s)\ G_2(s)$, diventa così di tipo 1 e, come tale, garantisce che il sistema retroazionato abbia errore di velocità finito (non nullo).

Affinché tale errore sia esattamente uguale a 1%, è necessario scegliere il guadagno K del compensatore in modo che $G(s)$ abbia guadagno stazionario pari a 100, ovvero deve valere:

$$\frac{80\,K}{16\cdot 0.8}=100 \qquad \text{da cui :} \qquad K=16.$$

Nella figura sottostante è riportato il diagramma di Bode (ottenuto con Matlab) della funzione d'anello risultante, data da: $\frac{16}{s}\cdot\frac{80}{s+16}\cdot\frac{1}{s+0.8}$. La pulsazione di taglio vale circa 8.4 rad/s, ed il sistema retroazionato risulterebbe instabile (la fase della funzione d'anello in 8.4 rad/s vale -200° circa).



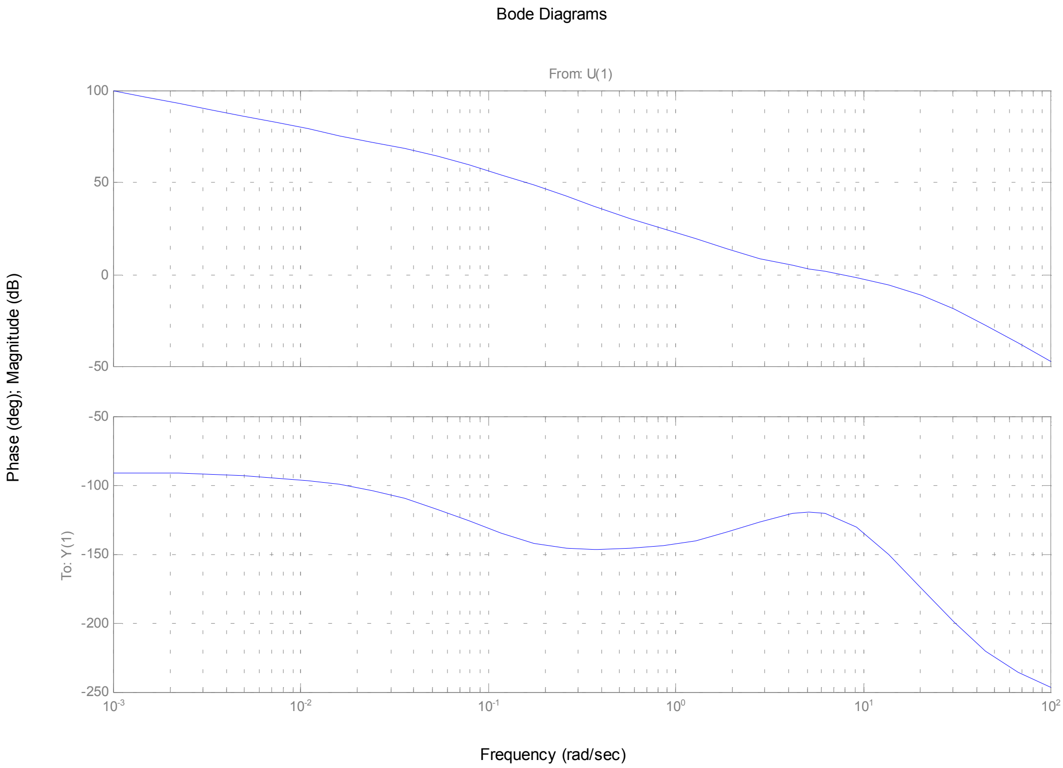
Per soddisfare le specifiche date su margine di fase e pulsazione di taglio, è necessario inserire una coppia di reti anticipatrici, per recuperare almeno 70^o attorno a 7.5 rad/s, ed una rete attenuatrice per abbassare il modulo della funzione d'anello ottenuta e riportare così ω_c fra 7 e 8 rad/s, come richiesto.
Una possibile scelta per le reti anticipatrici è data da:

$$C_a(s) = \frac{1+0.026s}{1+0.065s} \cdot \frac{1+0.3s}{1+0.06s}$$

Inserendo tali reti, la fase della funzione in 7.5 rad/s vale circa -120^o, mentre il modulo sale a circa 15 dB. La rete attenuatrice, scelta per abbassare il modulo di tale quantità, è data da:

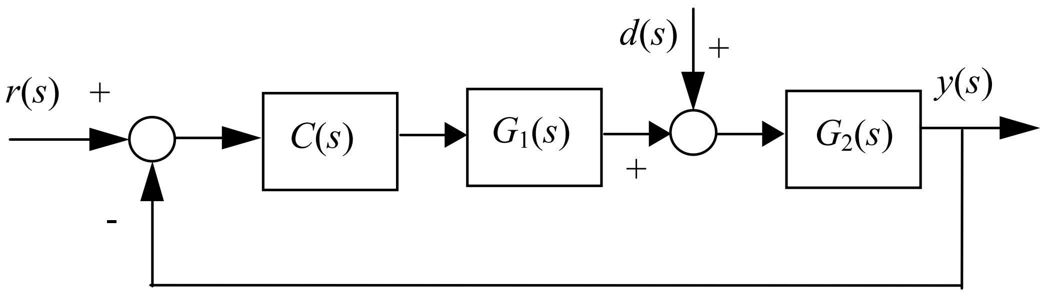
$$C_i(s) = \frac{1+2s}{1+11s}$$

Con l'inserimento di tale rete, tutte le specifiche vengono soddisfatte, ottenendo in particolare $\omega_c = 7.7$ rad/s e $m_\varphi = 55^o$, come si può ricavare dal diagramma di Bode della funzione d'anello complessiva risultante, riportato in figura.



8 Esercizio

È dato il seguente sistema di controllo



con

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+10)}; \qquad G_2(s) = \frac{25}{(s+0.5)}$$

Determinare un compensatore $C(s)$ tale che il sistema retroazionato, oltre ad essere stabile, soddisfi alle seguenti specifiche:

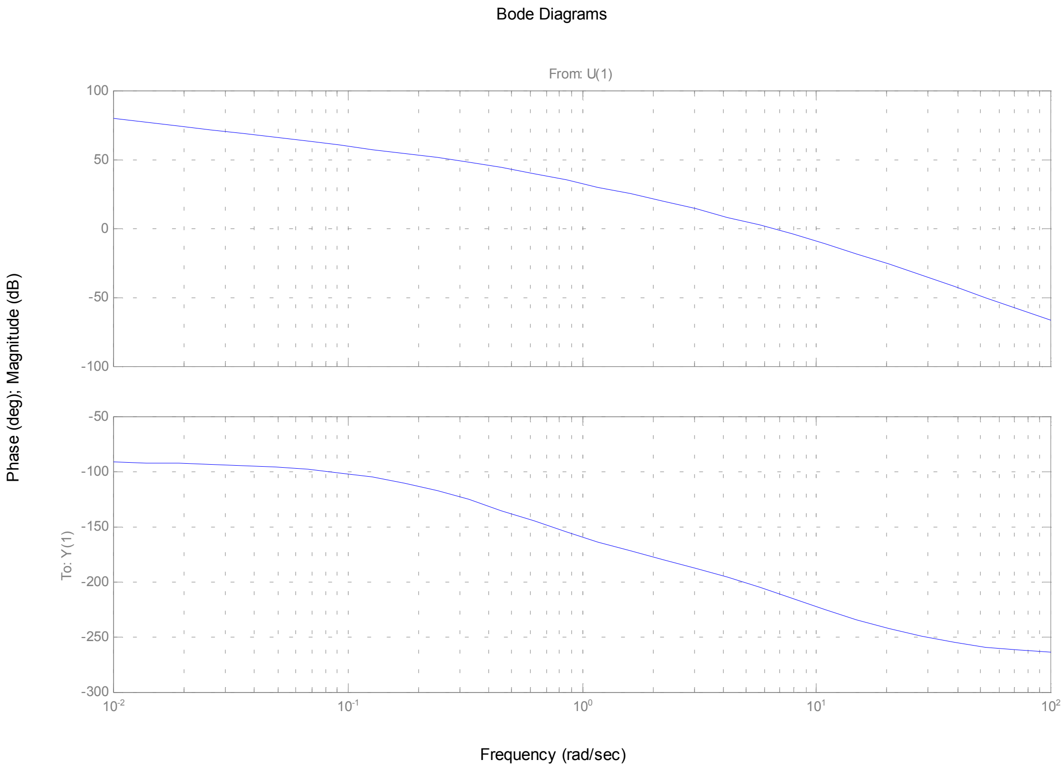
- sia astatico rispetto al disturbo d costante,
- abbia un errore di velocità minore o uguale a 1%,
- abbia un margine di fase $m_\varphi \geq 45^o$,
- la pulsazione di taglio ω_c sia tale che $3 \leq \omega_c \leq 4$ rad/s.

8.1 Soluzione

Affinché il sistema retroazionato sia astatico al disturbo d costante, è necessario inserire un polo nell'origine nel blocco $C(s)$, che si trova *a monte* del punto di ingresso del disturbo stesso.
Il sistema complessivo sul ramo diretto, $G(s) = C(s)\ G_1(s)\ G_2(s)$, diventa così di tipo 1 e, come tale, garantisce che il sistema retroazionato abbia errore di velocità finito (non nullo). Affinché tale errore sia minore o uguale a 1%, è necessario scegliere il guadagno K del compensatore in modo che $G(s)$ abbia guadagno stazionario almeno pari a 100, ovvero deve valere:

$$\frac{25\,K}{10 \cdot 0.5} \geq 100 \qquad \text{da cui :} \qquad K \geq 20.$$

Nella figura sottostante è riportato il diagramma di Bode (ottenuto con Matlab) della funzione d'anello risultante scegliendo per K il valore minimo ammesso (cioè 20), data da: $\frac{20}{s} \cdot \frac{1}{s+10} \cdot \frac{1}{s+0.5}$. La pulsazione di taglio vale circa 6.4 rad/s, ed il sistema retroazionato risulterebbe instabile (la fase della funzione d'anello in 6.4 rad/s vale -210^o circa).



Per soddisfare le specifiche date su margine di fase e pulsazione di taglio, è necessario inserire una coppia di reti anticipatrici, per recuperare almeno 55° attorno a 3.5 rad/s (ove attualmente la fase vale circa –190°), ed una rete attenuatrice per abbassare il modulo della funzione d'anello ottenuta e portare così ω_c fra 3 e 4 rad/s, come richiesto.

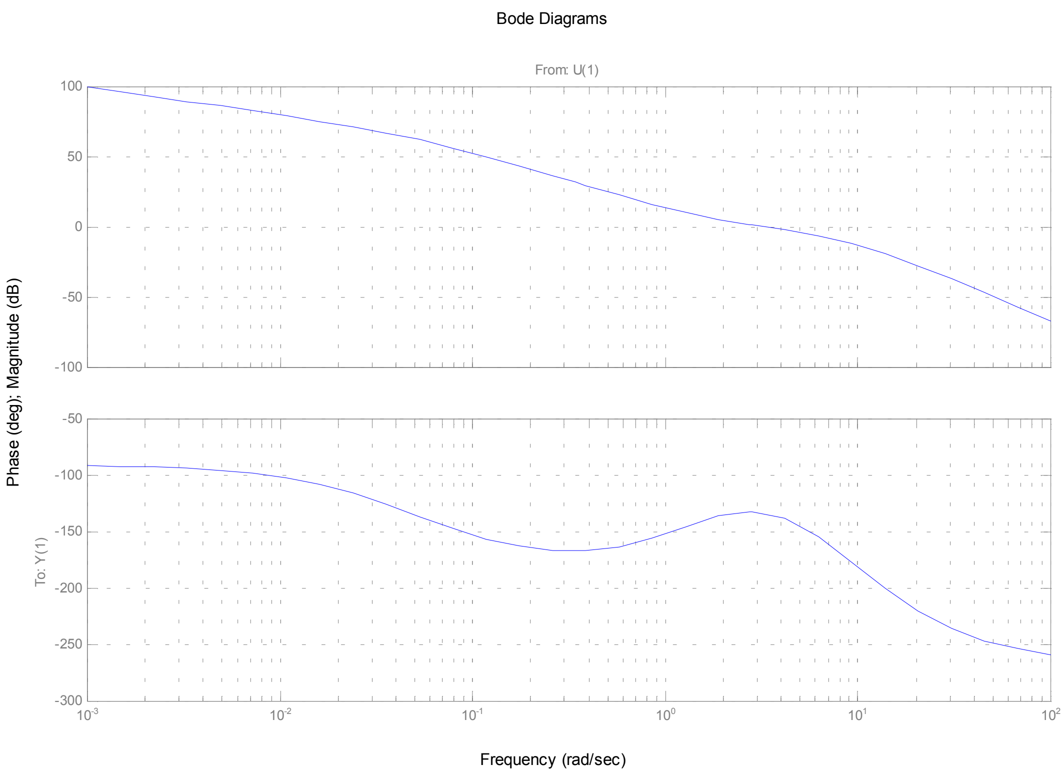
Una possibile scelta per le reti anticipatrici è data da:

$$C_a(s) = \frac{1+0.5s}{1+0.16s} \cdot \frac{1+0.6s}{1+0.15s}$$

Inserendo tali reti, la fase della funzione in 3.5 rad/s vale circa -123^{o}, mentre il modulo sale a circa 23 dB. La rete attenuatrice, scelta per abbassare il modulo di tale quantità, è data da:

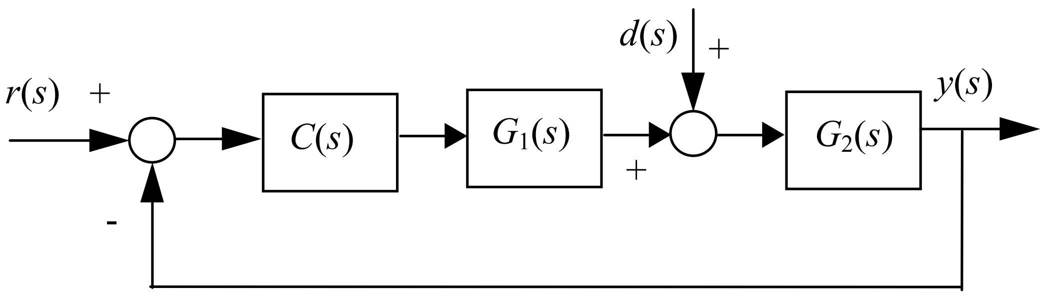
$$C_i(s) = \frac{1+1.4s}{1+20s}$$

Con l'inserimento di tale rete, tutte le specifiche vengono soddisfatte, ottenendo in particolare $\omega_c = 3.4$ rad/s e $m_\varphi = 46^{o}$, come si può ricavare dal diagramma di Bode della funzione d'anello complessiva risultante, riportato in figura.



9 Esercizio

È dato il seguente sistema di controllo



con

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+4)}; \qquad G_2(s) = \frac{5}{(s+0.2)}$$

Determinare un compensatore $C(s)$ tale che il sistema retroazionato, oltre ad essere stabile, soddisfi alle seguenti specifiche:

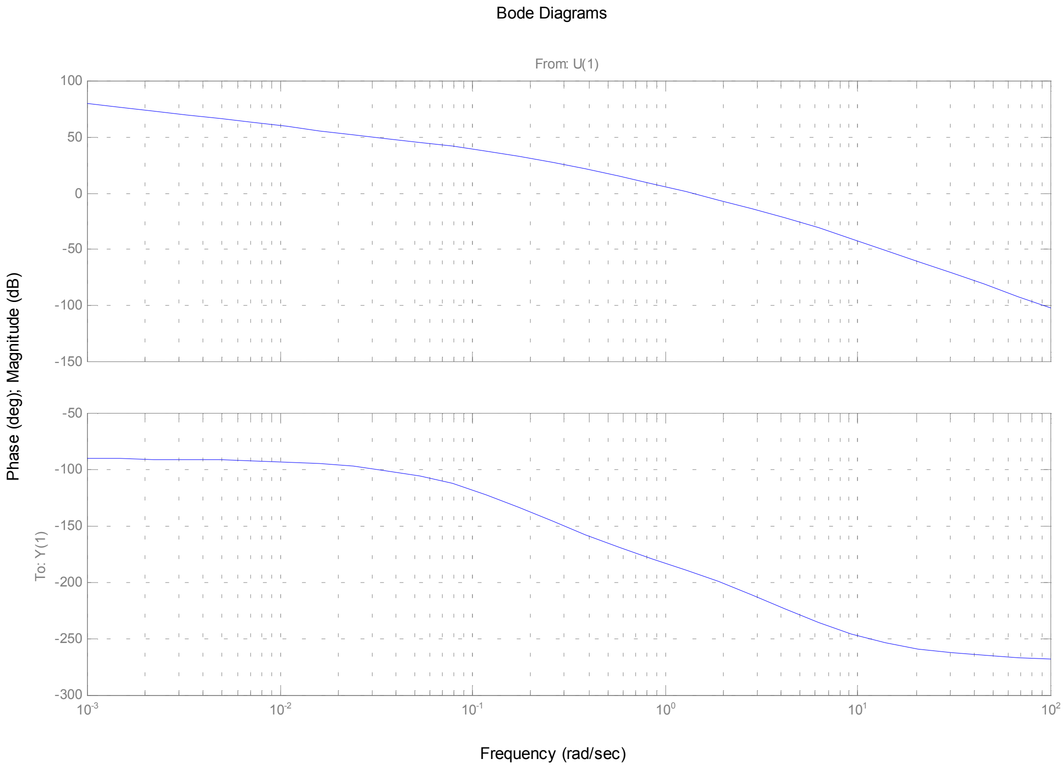
- sia astatico rispetto al disturbo d costante,
- abbia un errore di velocità minore o uguale a 10%,
- abbia un margine di fase $m_\varphi \geq 45^{o}$,
- la pulsazione di taglio ω_c sia tale che $0.1 \leq \omega_c \leq 0.2$ rad/s.

9.1 Soluzione

Il sistema retroazionato risulta già astatico al disturbo d costante, poiché il blocco $G_1(s)$, che si trova *a monte* del punto di ingresso del disturbo, ha un polo nell'origine.
Il sistema complessivo sul ramo diretto, $G(s) = C(s)\ G_1(s)\ G_2(s)$, è di tipo 1 e, come tale, garantisce che il sistema retroazionato abbia errore di velocità finito (non nullo). Affinché tale errore sia minore o uguale a 10%, è necessario scegliere il guadagno K del

compensatore in modo che $G(s)$ abbia guadagno stazionario almeno pari a 50, ovvero deve valere:

$$\frac{5\,K}{4\cdot 0.2}\geq 10 \qquad \text{da cui :} \qquad K\geq 1.6$$



Nella figura soprastante è riportato il diagramma di Bode (ottenuto con Matlab) della funzione d'anello risultante scegliendo per K il valore minimo ammesso (cioè 1.6), data da: $1.6\cdot\dfrac{1}{s(s+4)}\cdot\dfrac{5}{s+0.2}$. La pulsazione di taglio vale circa 1.4 rad/s, ed il sistema

retroazionato risulterebbe instabile (la fase della funzione d'anello in 1.4 rad/s vale -190^{o} circa).
Per soddisfare le specifiche date su margine di fase e pulsazione di taglio, è sufficiente inserire una o più reti attenuatrici, per abbassare la pulsazione di taglio fra 0.1 e 0.2 rad/s, ove la fase è tale da garantire il margine di fase richiesto. In particolare, poiché in 0.1 rad/s la fase vale circa -120^{o} ed il modulo circa 39 dB, inserendo ad esempio il seguente compensatore, corrispondente ad una coppia di reti attenuatrici:

$$C(s) = \frac{(1+70s)^2}{(1+700s)(1+600s)}$$

tutte le specifiche vengono soddisfatte, ottenendo in particolare $\omega_c = 0.1$ rad/s e $m_\varphi = 47^{o}$, come si può ricavare dal diagramma di Bode della funzione d'anello complessiva risultante, riportato in figura.