METODI DI SINTESI DIRETTA NEI SISTEMI A CONTROREAZIONE

1 . INTRODUZIONE

1.1 Vantaggi e Svantaggi

Vantaggi:

- Procedura analitica (in un passo solo);
- Prestazioni ottenute predefinite (le specifiche ad anello chiuso sono note a priori);

Svantaggi:

- Si opera per cancellazione del processo (bisogna avere una conoscenza accurata di esso);
- Instabilità interna e/o realizzabilità dei controllori
- Si è costretti a scegliere dei modelli di comportamento in/out e z/out (necessità di tradurre le specifiche dal transitorio e dal regime permanente)

L' obiettivo che si pone è quello di trovare modelli prestabiliti per le funzioni di trasferimento ad anello chiuso W(z) in modo da soddisfare determinate specifiche e determinare da essi dei controllori che realizzano tali specifiche.
In particolare si distinguono 3 casi:

a) $\mathrm{W(s)} = \dfrac{y(s)}{y_d(s)}$ f.d.t uscita - uscita desiderata

b) $\mathrm{W_Z(s)} = \dfrac{y(s)}{z(s)}$ f.d.t uscita - disturbo

c) $\mathrm{W(s)} \wedge \mathrm{W_Z}(s)$ sintesi a più obiettivi

1.2 Applicazioni alle varie tipologie di sistemi a controreazione

Per il caso a) supponiamo il sistema a controreazione unitaria (cioè unitario il valore della fdt nel ramo di controreazione). Indichiamo con C(s) il controllore, con P(s) il processo da controllare.e con F(s) il prodotto C(s)P(s) cioè la fdt nel ramo principale della catena diretta.
Per ipotesi la W(s) viene fornita a priori (rappresenta le specifiche da realizzare) e da essa si ricava la F(s):

$$W(s)=\frac{F(s)}{1+F(s)} \rightarrow F(s)=\frac{W(s)}{1-W(s)}$$

E da questa segue che:

$$C(s)=\frac{1}{P(s)}\frac{W(s)}{1-W(s)}$$

Per il caso b) supponiamo il disturbo agente sull' uscita. Anche in questo caso la fdt disturbo-uscita è data e da essa, con procedimenti analoghi al caso precedente, si può ricavare l' espressione del controllore:

$$W_Z(s) = \frac{1}{1+F(s)} \to F(s) = \frac{1-W_Z(s)}{W_Z(s)} \to C(s) = \frac{1}{P(s)}\frac{1-W_Z(s)}{W_Z(s)}$$

Per il caso c) supponiamo che sia H(s) la fdt del ramo di controreazione (caso più generale possibile) e che quindi F(s)=P(s)C(s)H(s). Tramite semplici passaggi algebrici si ha:

$$W(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+F(s)} = \frac{1}{H(s)}\frac{F(s)}{1+F(s)} \to H(s) = \frac{F(s)}{W(s)[1+F(s)]}$$

Dalla $W_Z(s)$ si può ricavare la F(s):

$$W_Z(s) = \frac{1}{1+F(s)} \to F(s) = \frac{1-W_Z(s)}{W_Z(s)}$$

E quindi si ricavano le espressioni per H(s) e C(s) in funzione di W(s) e $W_Z(s)$:

$$C(s) = \frac{1}{P(s)H(s)}\frac{1-W_Z(s)}{W_Z(s)} = \frac{1}{P(s)}\frac{W(s)}{W_Z(s)}$$

1.3 Stabilità nella sintesi diretta

Il metodo di sintesi diretta del controllore non si può applicare se:

- P(s) è instabile o marginalmente stabile (quando sono presenti poli a parte reale positiva) Infatti in questo caso si ha cancellazione di poli a parte reale positiva con consegueente instabilità interna.

- P(s) è a fase non minima (quando sono presenti zeri a parte reale positiva)

1.4 Realizzabilità nella sintesi diretta

Supponiamo che

$$C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$$

$$P(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)}$$

$$W(s) = \frac{n_w(s)}{d_w(s)}$$

siano tutte funzioni razionali proprie o strettamente proprie. Indichiamo con il simbolo # il grado del polinomio che lo segue.Quindi:

$$\#d_c(s) - \#n_c(s) \geq 0$$

$$\#d_p(s) - \#n_p(s) \geq 0$$

$$\#d_w(s) - \#n_w(s) \geq 0$$

Poiché

$$C(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{W(s)}{1-W(s)} = \frac{d_p(s)}{n_p(s)} \frac{n_w(s)}{\left(d_w(s) - n_w(s)\right)}$$

segue che

$$\#d_c(s) = \#n_p(s) + \#d_w(s)$$
$$\#n_c(s) = \#d_p(s) + \#n_w(s)$$

Infine si ha che

$$\#n_p(s) + \#d_w(s) - \#d_p(s) - \#n_w(s) \geq 0 \rightarrow \#d_w(s) - \#n_w(s) \geq \#d_p(s) - \#n_p(s)$$

Cioè

L' eccesso poli zeri del modello ingresso-uscita deve essere maggiore o al più uguale all' eccesso poli zeri del processo.

Nel caso della scelta del modello disturbo-uscita esiste una limitazione ulteriore.
Sappiamo che:

$$C(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{1-W_z(s)}{W_z(s)}$$

Supponiamo che P(s) sia strettamente propria (cioè che il grado del denominatore sia strettamente maggiore del grado del numeratore)
Consideriamo il limite per s che tende all' infinito di C(s): se C(s) è strettamente propria tale limite tende a zero e invece se C(s) è propria tale limite tende ad un valore finito (si ha una forma indeterminata risolvibile).
Quindi per la realizzabilità di C(s) dovrà esssere

$$C(s) \text{ realizzabile } \Leftrightarrow \lim_{s \to \infty} C(s) < \infty$$

Calcoliamo questo limite:

$$\lim_{s\to\infty} C(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{P(s)}\lim_{s\to\infty}\frac{1-W_z(s)}{W_z(s)} = \infty \lim_{s\to\infty}\frac{1-W_z(s)}{W_z(s)} < \infty \Leftrightarrow \lim_{s\to\infty}\frac{1-W_z(s)}{W_z(s)} = 0 \Rightarrow \lim_{s\to\infty} W_z(s) = 1$$

Ciò vuol dire che i disturbi che lavorano ad alta frequenza devono continuare a passare.
Questa condizione si aggiunge a quella precedente per ottenere realizzabilità.

2. SCELTA DEL MODELLO INGRESSO-USCITA

2.1 Definizione delle specifiche

Studiamo ora la scelta del modello di comportamento, cioè come legare i valori delle specifiche sul transitorio e sul regime permanente alla particolare forma di W(s).
Si definiscono a tal proposito un insieme di specifiche, dette CANONICHE, che devono essere, in generale, soddisfatte:

a) Sistema di controllo almeno di tipo 1, cioè

$$W(0) = 1$$

b) Errore per ingressi a rampa limitato superiormente, cioè

$$|e_1| = \frac{1}{|k_P k_C|} = \frac{1}{|k_F|} \le e_{1,\max}$$

ed essendo il sistema di tipo 1 vuol dire che ha almeno un polo nell' origine e che quindi il guadagno k si calcola come:

$$k_F = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Il guadagno k_F è anche detto guadagno di velocità e si indica anche con k_V (vedi appendice A).
Nota: con il simbolo k_X si è indicato il guadagno del processo X.

c) La sovraelongazione nella risposta indiciale (cioè nella risposta ad ingresso a gradino in condizioni di riposo) deve essere limitata superiormente, cioè:

$$\hat{s} \le \hat{s}_{\max}$$

c) La banda passante deve essere circa uguale ad un valore desiderato, cioè:

$$B_3 \cong B_d$$

Per soddisfare queste specifiche si definiscono 3 modelli:

1) **modello del primo ordine** (eccesso poli-zeri = 1)

$$W_0(s) = \frac{1}{1+st}$$

2) **modello del secondo ordine** (eccesso poli-zeri = 2)

$$W_I(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2Vw_n s + w_n^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2V}{w_n}\right)s + \left(\frac{s}{w_n}\right)^2}$$

3) **modello del secondo ordine modificato**

$$W_{II}(s) = W_I(s)\frac{m(s+z)}{s+mz}$$

questo modello è uguale al secondo con l' aggiunta di una rete anticipatrice (essendo z > 0 e m > 0).

2.2 Modelli ingresso-uscita

2.2.1 Modello del primo ordine

$$W_0(s) = \frac{1}{1+st}$$

Il sistema è di tipo 1 infatti W(0) = 1.
Inoltre si ha che la funzione in catena diretta è

$$F(s) = \frac{W(s)}{1-W(s)} = \frac{\frac{1}{t}}{s}$$

cioè un integratore moltiplicato una costante. Il calcolo del guadagno di velocità si ottiene dal guadagno di F(s) che è proprio 1/τ
La condizione di errore per ingresso a rampa limitato superiormente è:

$$e_1 = \frac{1}{k_V} = t \le e_{1,\max}$$

E risulta soddisfatta per τ sufficientemente piccolo.
Dai diagrammi di Bode di $W_0(s)$ risulta che la banda passante è proprio 1/τ. Dalle specifiche risulta quindi che la banda desiderata deve proprio essere uguale a tale valore, cioè

$$B_3 = \frac{1}{t} \cong B_d$$

Quindi, combinando le due precedenti condizioni, τ deve essere scelto in modo tale da soddisfare la seguente condizione:

$$\frac{1}{B_d} \le e_{1,\max}$$

Se a questo punto tale condizione non è soddisfatta non si può applicare un modello del primo ordine per sooddisfare tutte le specifiche e si passa allo studio del modello del secondo ordine.

Nota: la sovraelongazione è sempre nulla per un contributo dovuto ad un solo polo e quindi la condizione di essere limitata superiormente da un valore prefissato positivo, è sempre verificata.

2.2.2 Modello del secondo ordine

$$W_I(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2Vw_n s + w_n^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2V}{w_n}\right)s + \left(\frac{s}{w_n}\right)^2}$$

Il calcolo di F(s) è immediato

$$F(s) = \frac{w_n^2}{s\left(s + 2Vw_n\right)}$$

Il guadagno di velocità è:

$$k_V = \frac{w_n}{2V} \rightarrow e_1 = \frac{2V}{w_n} \le e_{1,\max}$$

e questa condizione è soddisfatta per particolari valori di zita e di omega.
Il calcolo della sovraelongazione in risposta indiciale è:

$$\hat{s} = e^{-\frac{pV}{\left(1-V^2\right)^{\frac{1}{2}}}} = \hat{s}\left(V\right) \le \hat{s}_{\max}$$

cioè è una funzione di zita. La banda passante è:

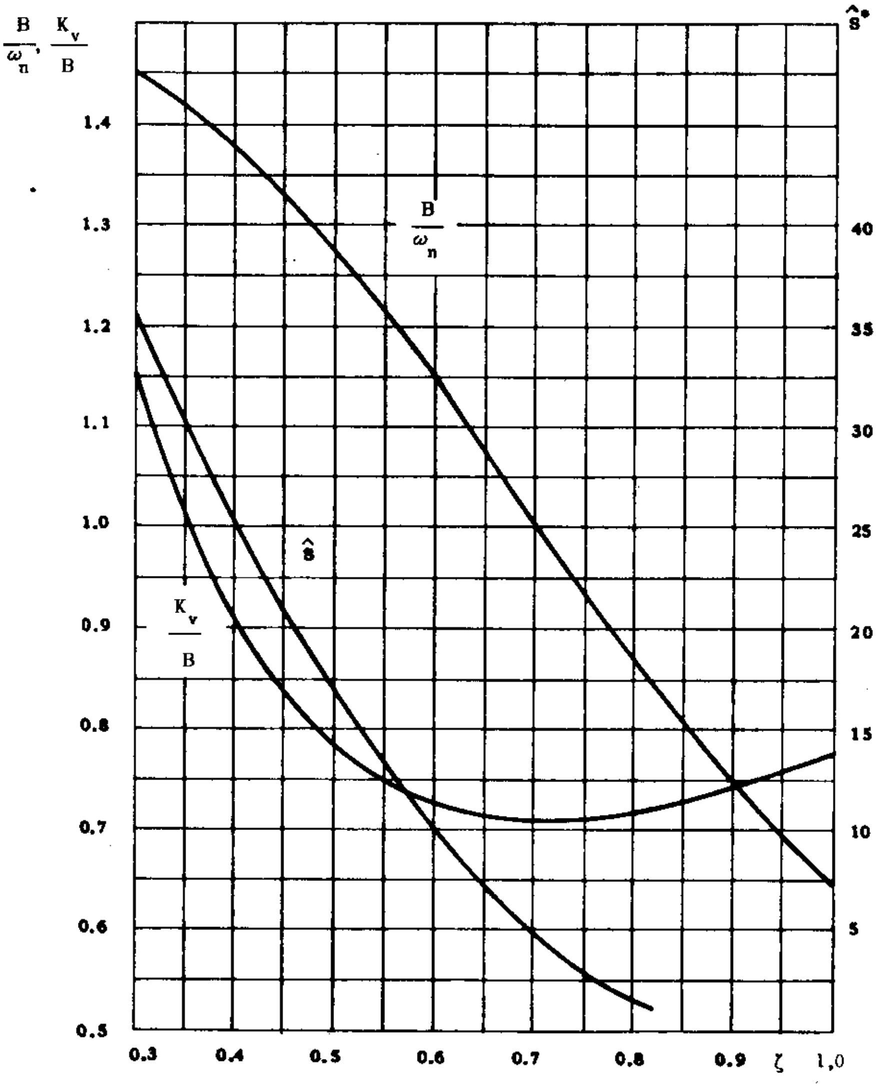
$$B_3 = w_n\sqrt{1 - 2V^2 + \sqrt{2 - 4V^2 + 4V^4}} = w_n f(V) \cong B_d$$

anch' essa funzione di zita.
Nella pratica si usa lavorare con il rapporto tra il guadagno di velocità e la banda passante, cioè

$$\frac{k_V}{B_3} = \frac{1}{V2f\left(V\right)}$$

essendo tale rapporto indipendente da omega e dipendente solo da zita.

In figura si riporta il grafico delle tre funzioni, assumendo per le ordinate della sovraelongazione valori percentuali (rispetto al valore di regime permanente, ad esempio al valore 5 corrisponde una sovraelongazione del 5% del valore di regime):



Dalla figura risulta evidente che con questo tipo di modello non è possibile soddisfare a tutte e tre le specifiche avendo a disposizione solo due parametri(zita e omega). Infatti la limitazione sulla sovraelongazione si traduce in una limitazione inferiore ai valori di zita e questa induce una limitazione superiore ai valori del rapporto k_V/B_3: se il valore di questo rapporto è troppo elevato occorre di norma ricorrere a strutture che consentano una maggiore libertà.
E' necessario, quindi, rilassare le specifiche introducendo una modifica a questo modello: ciò è oggetto del prossimo paragrafo.

2.2.3 Modello del secondo ordine modificato

Questo modello si ottiene introducendo una rete anticipatrice:

$$W_{II}(s) = W_I(s)\frac{m(s+z)}{s+mz}$$

essendo m > 1 e z > 0.

Le tre condizioni viste nel caso precedente diventano (dimostrazione omessa):

$$\begin{aligned}
&(\hat{s})_I \leq \frac{1}{m}\hat{s}_{\max} \\
&(B)_I = B_d \\
&\left(e_1\right)_I \leq e_{1,\max} + \frac{m-1}{mz}
\end{aligned}$$

Com m che vara da 1.0 a 1.2 (con il pedice I si indicano le specifiche nel caso di modello non modificato).Si fissa m con un valore compreso in questo intervallo; una volta fissato m si calcola dalla prima disuguaglianza il valore della sovraelongazione che la soddisfi; successivamente dai diagrammi della figura si ricava il valore di zita corrispondente e poi, grazie alla seconda disuguaglianza, il valore di ω_n a partire dalla specifica su B_d. Fissati zita e omega, il terzo dei diagrammi consente di calcolare il valore che compete a k_V: si tratta allora di introdurre questo valore nell' ultima delle disuguaglianze (ricordando che $e_1 = 1/k_V$) e si individua un opportuno valore di z che la rende soddisfatta.

2.2.4 Realizzabilità

Per quanto riguarda la realizzabilità tali modelli possono essere adottati solo nei casi in cui la differenza tra il numero dei poli e il numero degli zeri della funzione P(s) non è superiore a 2.
Il modo più semplice di affrontare questo problema è quello di aggiungere al modello adottato in fase di sintesi r poli concentrati in alta frequenza ω_0 essendo r tale che l' eccesso poli-zeri di W(s) sia almeno uguale a quello del processo. In definitiva la fdt ad anello chiuso è:

$$\hat{W}(s) = W(s)\frac{1}{\left(1+\dfrac{s}{w_0}\right)^r}$$

3. SCELTA DEL MODELLO DISTURBO-USCITA

Analizziamo brevemente il metodo di sintesi nel caso in cui come ingresso è posto un disturbo.
Tipicamente le specifiche sono di due tipi:

- ci deve essere **astatismo** cioè:

  $$\left[W_Z(s)\right]_{s=0} = 0$$

  ovvero un zero in s = 0.

- **attenuazione** sufficiente in un certo campo di frequenze

$$W_Z(s) = \frac{s}{1+sa}\frac{sa+w_0}{s+w_0} \Leftrightarrow \left|W_Z(jw)\right| \leq \frac{1}{a} \qquad \text{per } w \in \left[0, \frac{w_0}{a}\right]$$

questa ultima specifica viene realizzata affermando che il modulo della risposta in frequenza deve essere limitato superiormente da un certo valore in un certo campo di frequenze deducendo così sia

ω_0 che α. La condizione di astatismo si giustifica con il fatto che si desidera avere reiezione totale del disturbo.
La condizione di realizzabilità si realizza con la condizione

$$\lim_{s \to \infty} W_Z(s) = 1$$

cioè non possiamo attenuare i disturbi in alta frequenza.

Riferimenti:

- De Luca, Appunti dalle lezioni, Università di Roma La Sapienza
- Alberto Isidori, Sistemi di Controllo Vol. I, Ed. Siderea

APPENDICE A

La teoria dei sistemi di controllo ha origine dalla meccanica dei servomeccanismi.
La terminologia, quindi, è tipica della cinematica e della dinamica dei corpi rigidi.
In tal senso si usa caratterizzare il guadagno della funzione di trasferimento di un processo in base al numero di poli che tale funzione presenta.
In particolare:

nessun polo	$k_F = k_P$	**guadagno di posizione**
1 polo in s = 0	$k_F = k_V$	**guadagno di velocità**
2 poli in s = 0	$k_F = k_A$	**guadagno di accelerazione**

D' altronde un polo in catena diretta realizza un integratore, un doppio polo un doppio integratore e quindi se si assume come grandezza da controllare la posizione di un sistema meccanico risulta giustificata la terminologia adottata essendo la derivata prima la velocità e la derivata seconda l' accelerazione.

Documento realizzato da ta003191@libero.it
sito internet http://digilander.iol.it/frabrunel