CONTROLLI AUTOMATICI

INTRODUZIONE

"*Controllare*": far raggiungere ad un qualunque dispositivi un obiettivo desiderato diverso da quello che il dispositivo stesso sta raggiungendo nel suo funzionamento normale

"*Sistema*": dispositivo fisico (motore, macchina, ecc.), economico, ecc.

Controllo → passivo
Controllo → attivo

usiamo il significato attivo di controllo:
controllare = modificare un sistema

"*Controllo automatico*": l'intervento di modifica di un sistema è fatto da macchine

MANIPOLAZIONI

La realizzazione di una qualunque azione atta a modificare in modo predeterminato (non casuale) il mondo fisico richiede 2 tipi di interventi:

1) "*Manipolazione materiale*": manipolazione delle grandezze fisiche necessarie per realizzare i cambiamenti desiderati

↓

azione che fa raggiungere, in prima persona, l'obiettivo desiderato al sistema
(tutti i componenti che lavorano ad alta potenza: motori, amplificatori, convertitoti, ecc.)

2) "*Manipolazioni simboliche*": manipolazione delle informazioni che definiscono le modalità con le quali devono essere manipolate le grandezze fisiche sopradette

↓

tutte quelle azioni di aiuto alle manipolazioni materiali
(componenti a bassa potenza: registratori, filtri, comparatori, trasduttori, ecc.)

STORIA DEI CONTROLLI AUTOMATICI

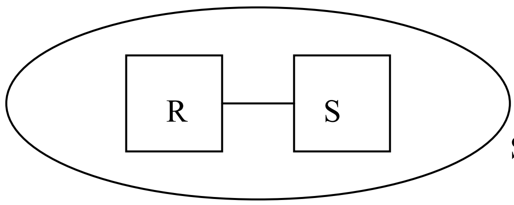
- era *pre-industriale*: fino al 1700 → nessun tipo di controlli automatici (eccezione vela, ruota idraulica, mulino)

- era *industriale*: dal 1700 al 1960 → presenti manipolazioni materiali
manipolazioni simboliche solo semplici

- era *dell'automazione*: dopo 1960 → macchina controllate da altre macchina
presenti entrambi i tipi di manipolazioni

INTERVENTI

1) da *STRUTTURISTA*: se il sistema non raggiunge l'obiettivo desiderato si modifica la sua struttura interna per fargli raggiungere l'obiettivo
2) da *CONTROLLISTA*: non si cambia mai la struttura del sistema (si agisce dall'esterno) aggiungo al sistema altri dispositivi (REGOLATORI) che lo aiutano a raggiungere l'obiettivo



Sistema di controllo (S + R)

S = sistema da controllare o carico (manipolazione materiale)
R = regolatore (manipolazione simbolica)

- Vogliamo che il sistema raggiunga l'obiettivo nonostante eventuali condizioni mutate nel sistema (variazioni non previste durante la fase di progetto)

- Permettiamo che l'obiettivo desiderato non venga raggiunto istantaneamente ma lasciamo al sistema un certo periodo di tempo (se ne ha bisogno) per raggiungere l'obiettivo

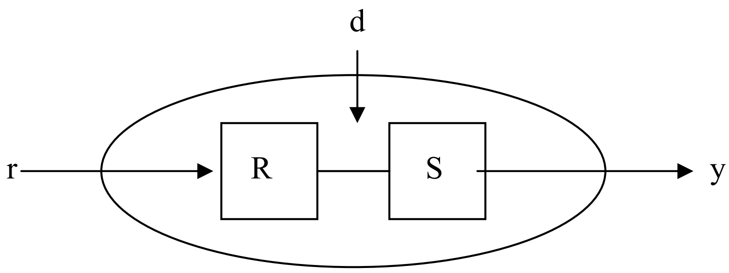
SISTEMI

1) SISTEMI ALGEBRICI O STATICI: non hanno bisogno del periodo di tempo e raggiungono l'obiettivo istantaneamente
2) SISTEMI DINAMICI: hanno bisogno del "periodo di adattamento"

↓

TRANSITORIO

- il RIFERIMENTO è la sollecitazione che si dà dall'esterno per ottenere un certo obiettivo (INGRESSI) → r
- il DISTURBO è una variabile di ingresso non nota → d
- l' USCITA è la verifica del raggiungimento degli obiettivi voluti → y

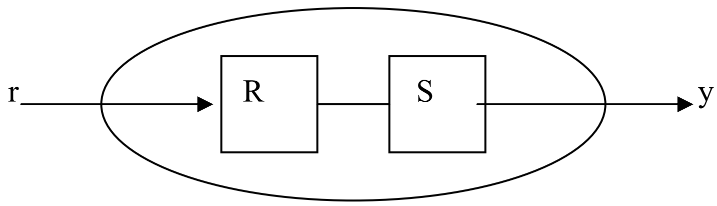


⇨ bisogna imporre che a regime
$y = y^* = r$ (nonostante i disturbi)

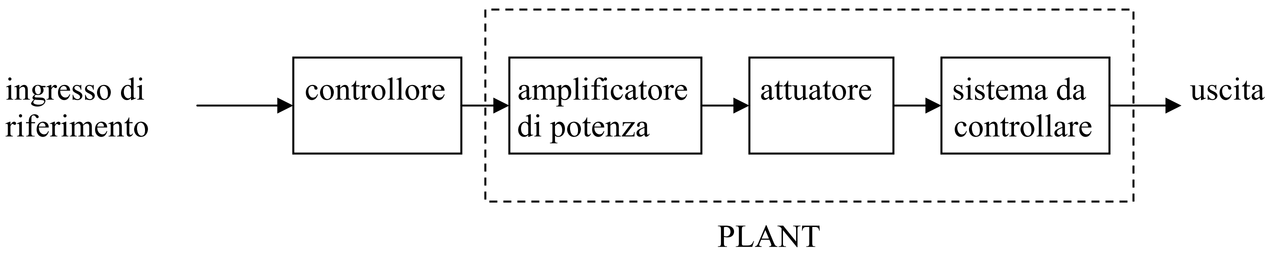
SISTEMI DI CONTROLLO
- IN CATENA APERTA
- IN RETROAZIONE

Sistemi di controllo in catena aperta

Il regolatore e il sistema da controllare sono messi in serie



per un sistema ad un solo ingresso e ad una sola uscita la realizzazione delle manipolazioni simboliche (realizzata dal controllore) che impongono all'uscita di raggiungere il valore desiderato si basa esclusivamente su conoscenze a priori, cioè sull'ingresso di riferimento e sul modello del sistema (costituito dall'amplificatore, dall'attuatore e dal sistema da controllare)

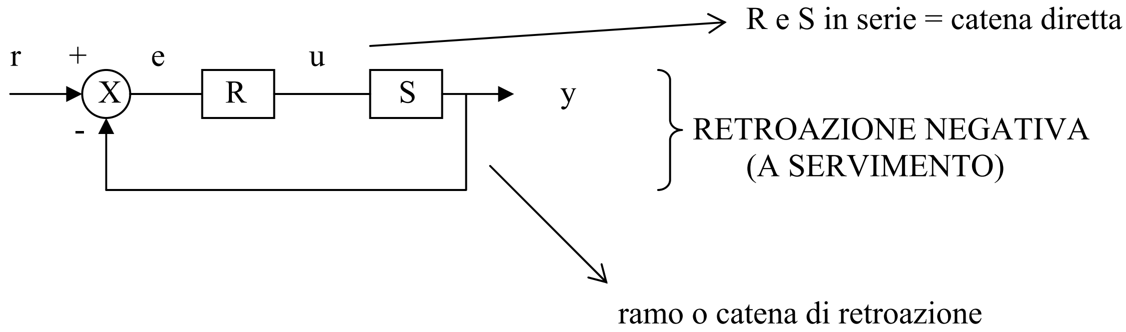


Vantaggi : - semplicità
- limpidezza

Svantaggi : - non permette la compensazione dei disturbi
(perché il regolatore è progettato a priori e quindi non può prevedere i disturbi)
↓
controllo predittivo

⇨ il controllo in catena aperta si può impiegare solo se si conosce molto bene il comportamento del sistema (cioè il suo modello) e si è sicuri che non intervengano disturbi rilevanti

Sistema di controllo in catena chiusa (in retroazione)



l'uscita viene prelevata e confrontata con il riferimento *r* dal comparatore

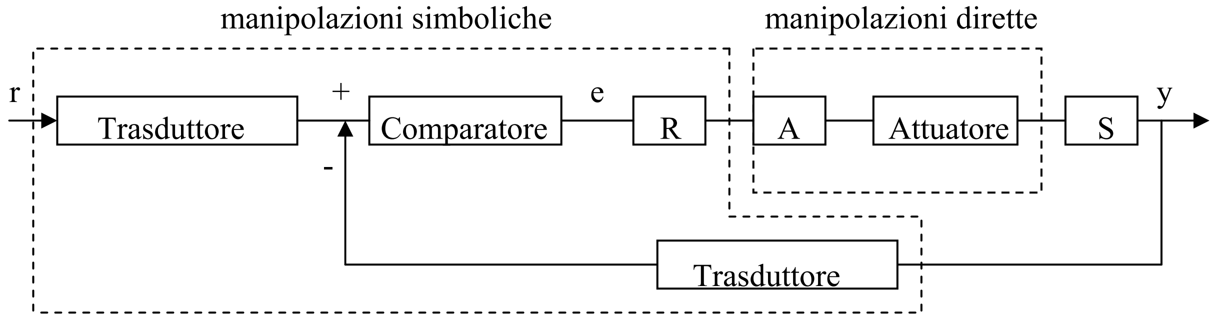
il risultato del confronto è un segnale chiamato errore *e*, ed è il segnale con cui viene sollecitato il regolatore

la realizzazione delle manipolazione simboliche che impongono all'uscita di raggiungere il valore desiderato si basa anche sulla differenza (effettuata dal comparatore) tra il valore della grandezza di riferimento e la misura della variabile controllata: il controllore cerca di realizzare l'uscita desiderata tenendo conto del comportamento effettivo del sistema e non solo di quello teorico

- retroazione negativa : tende a eliminare gli scostamenti presenti tra la variabile di riferimento e quella controllata
  viene generato un controllo che tende a contrastare le cause che provocano gli scostamenti stessi, realizzando un effetto stabilizzante (controllo esplorativo)
- retroazione positiva : darebbe luogo ad un effetto destabilizzante, in quanto fa allontanare invece che avvicinare all'obiettivo desiderato (di regola non è usata)

il regolatore serve per:

- alcuni sistemi senza retroazione per la loro struttura non riescono, dati certi riferimenti, a realizzarli in regime (li realizzano con un certo errore)
- serve per gestire il transitorio
  a) il transitorio è la fase più delicata perché le grandezze in gioco possono raggiungere dei livelli non consentiti dal costruttore e il regolatore deve fare in modo che ciò non avvenga
  b) il regolatore deve fare in modo che il transitorio duri un tempo sufficientemente basso, e il sistema sia sufficientemente pronto
  (velocità di risposta buona)



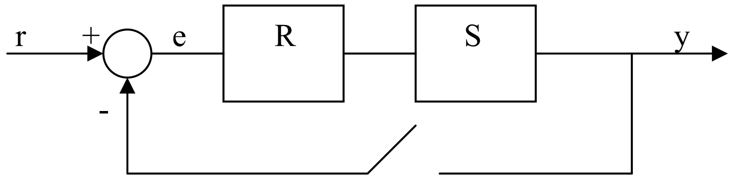
Trasduttore T: converte segnali di vario tipo in segnali elettrici
(il comparatore può agire solo su segnali elettrici)

Amplificazione A: amplifica i segnali troppo piccoli per essere percepiti dall'attuatore
(guadagno di potenza)

Attuatore: motore o ciò che compie la manipolazione materiale

In entrambi i casi (catena chiusa o aperta), la grandezza generata dal controllore consiste in un segnale a bassa potenza il quale va ad agire su di un amplificatore il cui compito è quello di fornire all'attuatore la potenza necessaria per effettuare le manipolazioni materiali richieste

⇨ Nella realtà si usa un oggetto sia in catena aperta sia in retroazione:



interruttore

quando l'interruttore è chiuso → catena chiusa
quando l'interruttore è aperto → catena aperta

→ all'inizio del processo si usa il sistema di controllo in catena aperta e nella fase finale si usa la retroazione

CATENA APERTA →	non controlla l'uscita
A SERVIMENTO →	tiene monitorata solo l'uscita
CONTROLLO DI PROCESSO →	tiene monitorate anche altre grandezze (anche se la retroazione è sempre solo sull'uscita)

ESEMPI SISTEMI IN CATENA APERTA

I sistemi di controllo in catena aperta sono usati per gli automatismi più semplici e per i quali non c'è pericolo che eventuali errori producano conseguenze irreparabili.

- Es. macchine distributrici di cibi e bevande

ESEMPI SISTEMI IN CATENA CHIUSA

- (fig. 1.7) servo di posizione
  l'ingresso di riferimento è realizzato dal potenziometro di sinistra mentre il potenziometro di destra svolge la funzione di dispositivo di misura della rotazione dell'albero.
  Il motore elettrico a collettore svolge la funzione di attuatore mentre il sistema la cui posizione rappresenta la grandezza controllata è costituito dal carico avente un'inerzia J e soggetto a un attrito B

- (fig. 1.5) servo di temperatura
  la termocoppia funge da dispositivo di trasduzione di temperatura, mentre l'amplificatore operazionale funge da comparatore; quanto alle manipolazioni materiali, il relè funge da amplificatore, il termoventilatore da attuatore (con guadagno di potenza) mentre l'ambiente da riscaldare (carico) costituisce il sistema la cui temperatura rappresenta la grandezza controllata

- (fig 1.6) servo di livello
  il galleggiante svolge sia la funzione di misuratore del livello del recipiente sia quello di comparatore (essendo il livello di riferimento quello in corrispondenza del quale il relè si chiude).
  Il relè funge da amplificatore, l'elettrovalvola da attuatore mentre il liquido contenuto nel recipiente costituisce il sistema controllato ed il livello del liquido stesso costituisce la grandezza controllata

- (fig 1.8) sistema automatico di controllo con compensazione diretta dei disturbi
  servo di livello più complesso: al comparatore non arriva solo il segnale del livello voluto e il segnale di retroazione, ma arrivano anche i segnali relativi alla portata in uscita e alla portata in ingresso
  il flusso di entrata è sottoposto a 2 tipi diversi di controllo:
  - il primo, secondo lo schema classico del controllo in retroazione, agisce in modo che venga annullata la differenza tra uscita (livello) effettiva e uscita desiderata
  - il secondo agisce in modo che venga annullata la differenza tra la portata del condotto di ingresso e quella del condotto di uscita

SCHEMA PROGETTAZIONE SISTEMA DI CONTROLLO

modellistica
del sistema

$\downarrow$

analisi delle
caratteristiche
del sistema
da controllare

$\downarrow$

sintesi del
regolatore

MODELLISTICA

MODELLO = sistema astratto ed orientato (relazione ingresso-uscita)

$\Rightarrow$ ai controllisti serve fare un modello di un sistema, che consiste nel darne una descrizione in un qualche linguaggio, in quanto non possiamo svolgere l'analisi sul sistema stesso

$\downarrow$

- lingua italiana
- grafici
- linguaggio matematico
- ecc.

MODELLO MATEMATICO = descrizione astratta di un sistema orientato fatta con un linguaggio matematico

Ad uno stesso sistema fisico si possono associare diversi sistemi astratti ed orientati ciascuno dei quali descrive in maniera univoca un particolare aspetto del sistema (una particolare caratteristica *ingresso-uscita*)

$\downarrow$

quando si scelgono le grandezze di ingresso e di uscita si *orienta* il sistema:
si individuano le grandezze (uscite) che caratterizzano il particolare aspetto del sistema a cui si è interessati, e le grandezze (ingressi) dei quali si vuole valutare l'influenza sullo stesso aspetto del sistema

COSTRUZIONE DEI MODELLI

Il modo concettualmente più semplice di associare un sistema astratto ed orientato ad un altro sistema fisico o concettuale, consiste nel prendere in esame tutte le coppie ingresso-uscita, cioè tutti i possibili andamenti nel tempo delle grandezze ed i corrispondenti andamenti nel tempo delle grandezze di uscita
Un sistema astratto ed orientato può essere descritto fissando un istante t_0 e considerando (per tutti i $t > t_0$) un possibile andamento nel tempo dell'ingresso e il corrispondente andamento dell'uscita

come individuare tutte le possibili coppie (potenzialmente infinite) ingresso-uscita?

↓

il procedimento usato a tale scopo è detto *IDENTIFICAZIONE* e dà come risultato un modello matematico del sistema stesso

PROCESSI DI IDENTIFICAZIONE:
composti di 2 parti fondamentali

1) identificazione strutturale
2) processo di identificazione

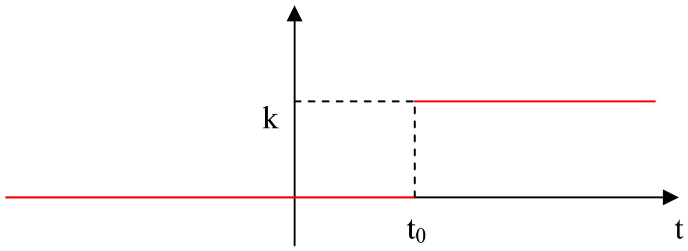
1) IDENTIFICAZIONE STRUTTURALE

non è detto che si riesca a fare un modello di un sistema generale:
con l'identificazione strutturale faccio delle ipotesi, sulle proprietà strutturali di cui si può ritenere goda il sistema, in modo da inserirlo in una determinata categoria e non analizzarlo in via del tutto generale

→ si mettono in ingresso al sistema ei segnali determinati, chiamati *segnali di saggio* o *segnali canonici*

SEGNALI DI SAGGIO (INGRESSI NOTEVOLI)

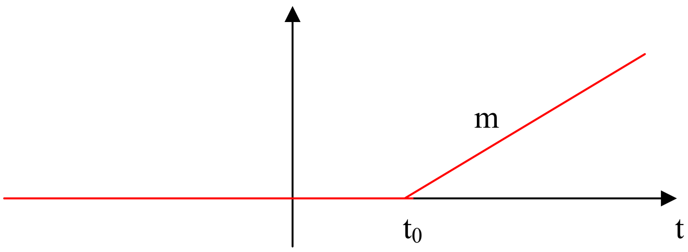
- INGRESSO A GRADINO
  segnale nullo fino ad un certo istante t_0 e poi costante



segnale a gradino unitario: $\begin{cases} t_0 = 0 \\ k = 1 \end{cases}$

- INGRESSO A RAMPA

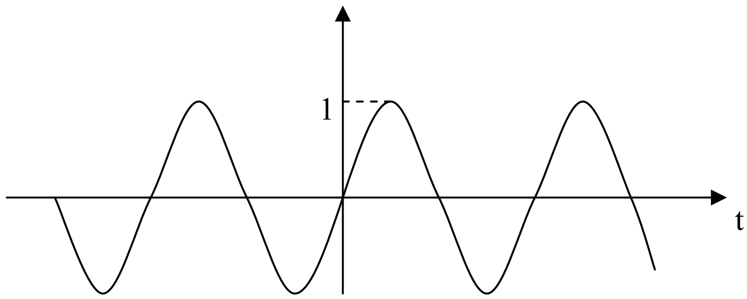
segnale nullo fino ad un certo istante t_0 che poi varia linearmente con il tempo con pendenza *m*



segnale a rampa unitaria: $\begin{cases} t_0 = 0 \\ m = 1 \end{cases}$

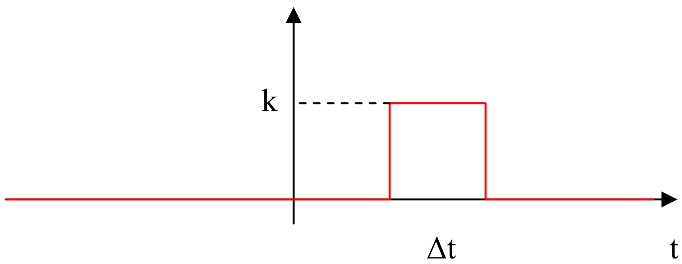
- INGRESSO SINUSOIDALE

$\begin{cases} \text{ampiezza} = 1 \\ \text{fase} = 0 \end{cases}$



- INGRESSO IMPULSO

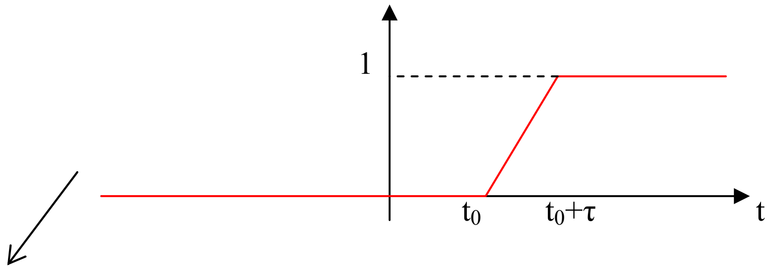
segnale nullo in tutto l'asse dei tempi tranne in un intervallo dove è costante



Impulso di Dirac: $\begin{cases} \text{area unitaria} & k = 1/\Delta t \\ \text{ampiezza infinita} & \\ \text{durata nulla} & \Delta t \rightarrow 0 \end{cases}$

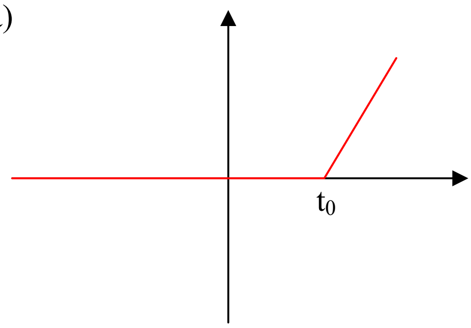
Proprietà dell'impulso di Dirac: derivata del gradino unitario

dim



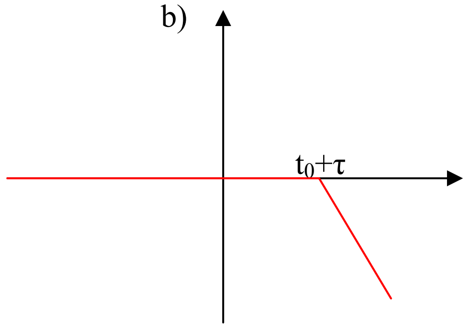
somma di due rampe:

a)



pendenza $1/\tau$

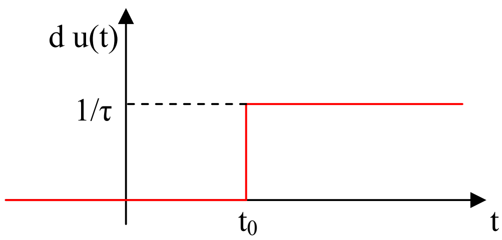
b)



pendenza $-1/\tau$

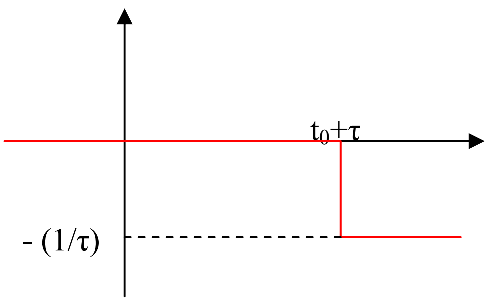
a) $u(t) = (1/\tau)\, t$

$$\frac{d\,u(t)}{dt} = 1/\tau$$

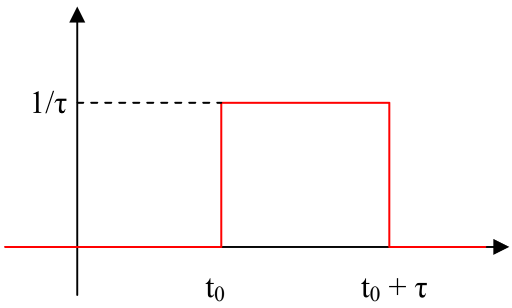


b) $u(t) = -\,(1/\tau)$

$$\frac{d\,u(t)}{dt} = -\,(1/\tau)$$



sommo a) + b)
(sommando i due gradini, derivate delle rispettive rampe, ottengo un gradino unitario)



facendo tendere $\tau \to 0$
ottengo l'impulso di Dirac come derivata della funzione iniziale, somma di due rampe

⇒ una tale funzione è nulla dappertutto, fatta eccezione per il punto in cui si annulla il suo argomento, punto in cui diventa infinita in modo tale che il suo integrale (esteso ad un intervallo contenente questo punto) risulti finito ed uguale a uno, soddisfando quindi la def:

$$\int_{t1}^{t2} \delta(t - t_0)\, f(t)\, dt = f(t_0) \qquad \text{per } f(t) = 1$$

CARATTERISTICHE STRUTTURALI DI UN SISTEMA

1) sistemi il cui modello è CAUSALE o non
2) sistemi il cui modello è a TEMPO CONTINUO o TEMPO DISCTRETO
3) sistemi il cui modello è SISO o MIMO
4) sistemi il cui modello è ALGEBRICO o DINAMICO
5) sistemi il cui modello è A PARAMETRI CONCENTRATI o DISTRIBUITI
6) sistemi il cui modello è LINEARE o non
7) sistemi il cui modello è STAZIONARIO o non
8) sistemi il cui modello è IU o ISU

1) causale: fisicamente realizzabile
(l'uscita in un certo istante dipende dall'ingresso in quel istante o in istanti passati)
non causale: fisicamente non realizzabile
(l'uscita può dipendere anche dall'ingresso in istanti futuri)

2) i modelli hanno come variabile indipendente il tempo:
continuo: dominio del tempo $\mathbb{R}$
discreto: dominio del tempo $\mathbb{C}$

3) mimo: mono imput e mono output
siso: multi imput e multi output

4) algebrici: l’uscita in un istante dipende solo dall’ingresso in quel istante (es. sistema resistivo)
dinamici: l’uscita in un istante dipende dall’ingresso in quel istante e negli istanti passati (es. sistema induttivo)

5) parametri concentrati: sistema in cui un parametro è costante in tutti i punti del sistema e quindi si può pensare concentrato in un unico punto (es. resistenza)
parametri distribuiti: sistema in cui un parametro non è costante in tutti i punti del sistema stesso (es. calore in una barra di ferro accanto ad un fornellino)

6) lineari: sistemi che godono della legge di sovrapposizione degli effetti

$$x_1 \rightarrow y_1$$

$$x_2 \rightarrow y_2$$

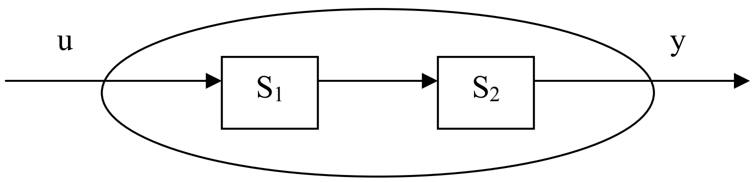
$$x_1+x_2 \rightarrow y_1+y_2$$

7) stazionari: sistemi che godono della legge di traslazione nel tempo delle cause e degli effetti:
quando una causa u(t) dà luogo ad un effetto y(t), la stessa causa traslata nel tempo di un intervallo Δt, dà luogo ad un effetto $y(t + \Delta t)$, cioè uguale al precedente salvo una traslazione nel tempo

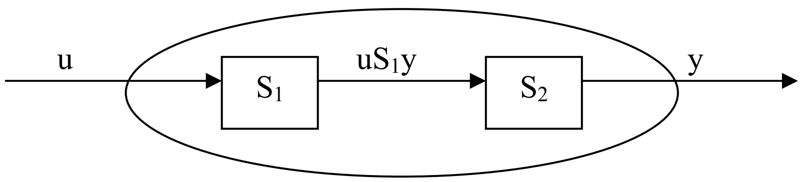
$$u(t) \rightarrow y(t)$$

$$u(t + \Delta t) \rightarrow y(t + \Delta t)$$

8) iu : sistemi ingresso-uscita



isu: sistemi ingresso-stati-uscita



2) IDENTIFICAZIONE

identificare un sistema vuol dire individuare tutte le coppie ingresso-uscita che definiscono uno dei sistemi astratti ed orientati che si possono associare al sistema stesso

- il primo passo consiste nell'assumere a priori che il sistema da identificare abbia alcune proprietà strutturali: in tal modo è possibile restringere la classe di sistemi a cui si può supporre appartenga il sistema dato (*identificazione strutturale*)

- il secondo passo il processo viene completato individuando opportune procedure in grado di generare le coppie ingresso-uscita che definiscono il sistema astratto orientato che interessa (*identificazione*)

1) IDENTIFICAZIONE PARAMETRICA

2) IDENTIFICAZIONE NON PARAMETRICA

1) identificazione parametrica: relazione tra ingresso e uscita in cui compaiono anche dei parametri
2) identificazione non parametrica: relazione tra ingresso e uscita in cui non compaiono dei parametri

<u>IDENTIFICAZIONE PARAMETRICA</u>

si divide in:

a) identificazione parametrica **A SCATOLA NERA**

b) identificazione parametrica **A SCATOLA GRIGIA** (per indagine diretta)

a) IDENTIFICAZIONE PARAMETRICA A SCATOLA NERA

- si applica ai sistemi con struttura interna complessa (quando è difficile descrivere l'interrelazione fra le varie parti interne)

$\downarrow$

- è inutile aprire il sistema e studiarne la parti interne lo consideriamo come una scatola e ci serviamo solo dell'identificazione struttura

- si suppone che le procedure per mezzo delle quali si possono ricavare le coppie ingresso-uscita che definiscono il sistema astratto ed orientato che interessa, siano fornite da relazioni matematiche parametrizzate ipotizzate a priori

$\downarrow$

$\downarrow$

- in base ai risultati dell'identificazione strutturale scriviamo una o più eq. con parametri da determinarsi

- se il sistema è di tipo IU (ingresso-uscita) nelle eq. compaiono soltanto le variabili di ingresso e di uscita
- se il sistema è di tipo ISU (ingresso-stato-uscita) nelle eq. accanto a queste variabili compaiono anche delle variabili ausiliarie dette *variabili di stato*

- una volta scritte le eq. del modello, fornisco lo stesso ingresso al sistema vero e al modello e vedo come rispondono:
  se le uscite sono dello stesso tipo allora il modello va bene, altrimenti ho sbagliato qualcosa nell'identificazione strutturale, provo a variare 1 delle caratteristiche che ho ipotizzato rifaccio l'identificazione parametrica

- se le uscite del modello e del sistema reale sono dello stesso tipo, devo determinare i parametri in modo da minimizzare la differenza fra i risultati

• Es. dato un sistema con le seguenti caratteristiche:

· fisicamente realizzabile		
· a tempo continuo		
· siso	→	1 eq. ingresso-uscita
· dinamico	→	eq. differenziale
· a parametri concentrati	→	derivate ordinarie
· lineare	→	derivate lineari nel tempo
· non stazionario	→	coefficienti dipendenti dal tempo

supponiamo ordine massimo di derivazione = 2

$\longrightarrow$ $$a(t) \cdot \frac{d^2 y_m(t)}{dt} + b(t) \cdot \frac{dy_m(t)}{dt} + c(t) \cdot y_m(t) = u(t)$$

decido l'ingresso, lo sostituisco al posto di u(t) e mi ricavo $y_m(t)$
fornisco al sistema reale lo stesso ingresso e controllo l'uscita y(t)

$\longrightarrow$ se $y_m(t)$ e y(t) sono simili, l'identificazione è stata condotta correttamente
i parametri si determinano minimizzando il funzionale (funzione di funzione) di $y_m(t)$ e y(t)

b) IDENTIFICAZIONE PARAMETRICA A SCATOLA GRIGIA

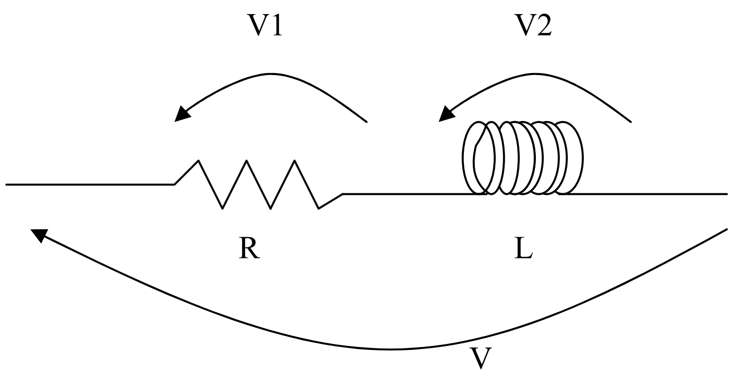
- si applica ai sistemi con struttura interna semplice o complessa quando si riescono a ricavare le interrelazioni tra i vari sottosistemi

- si suppone che le relazioni parametrizzate dalle quali si possono ricavare le coppie ingresso-uscita che definiscono il sistema astratto ed orientato siano ottenibili tenendo conto dei legami fisici esistenti tra le diverse parti del sistema

- il modello del sistema si trova scrivendo i modelli dei singoli componenti e le relazioni che legano i vari sottosistemi

- i modelli dei singoli componenti si trovano a scatola nera o andando a studiarne la struttura interna, oppure sono modelli di base di cui è già nota la relazione (ricavata una volta per tutte con scatola nera)

• Es. dato il seguente sistema:



apro il sistema:

- sottosistema resistenza → $V1 = R \cdot I1$
- sottosistema induttanza → $V2 = L \cdot (d\,I2/dt)$
- relazione: serie → $V = V1 + V2$ $I1 = I2 = I$

IDENTIFICAZIONE NON PARAMETRICA

- il risultato è un modello costituito da relazioni tra ingressi e uscite (non necessariamente equazioni), in cui non sono presenti parametri da determinarsi

- questi modelli forniscono l’uscita del sistema per qualsiasi ingresso, con una relazione in cui è presente la risposta del sistema ad un ingresso particolare

- non è necessario specificare a priori l’ordine del sistema e per questo motivo la definizione della classe di appartenenza fa riferimento soltanto alle caratteristiche di linearità e di stazionarietà

- il grosso inconveniente dei modelli non parametrici è dato dalla necessità di sollecitare il sistema di cui si vuole il modello con ingressi di tipo molto particolare

uscita

$$\boxed{y(t) = \int_0^t u(t)\ g(t-\tau)\ d\tau}$$

funzionale ingresso risposta del sistema all’impulso di Dirac

integrale di DUHAMEL o integrale di convoluzione

SISTEMI TRATTATI

- fisicamente realizzabili
- tempo continuo
- siso
- parametri concentrati
- lineari
- dinamici
- stazionari

MODELLI A PARAMETRI CONCENTRATI

1) MODELLI DI TIPO INGRESSO-USCITA

i sistemi dinamici, stazionari e lineari continui si possono rappresentare, nella forma IU, mediante sistemi di equazioni differenziali del tipo:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = u(t)$$

$$\text{condizioni iniziali} \quad \begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

dove y = vettore (mx1) delle variabili di uscita

u = vettore (rx1) delle variabili di ingresso

a_i = coefficienti costanti che rappresentano i parametri del sistema

2) MODELLI DI TIPO INGRESSO-STATO-USCITA

i sistemi dinamici, stazionari e lineari continui di tipo ISU si possono rappresentare mediante sistemi di equazioni differenziali del primo ordine e sistemi di equazioni algebriche e cioè nella forma:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C^T x(t) \end{cases}$$

dove x = vettore (nx1) delle variabili di stato

u = vettore (rx1) delle variabili di ingresso

y = vettore (mx1) delle variabili di uscita

A, B, C = matrici di dimensioni opportune i cui elementi costituiscono i parametri del sistema

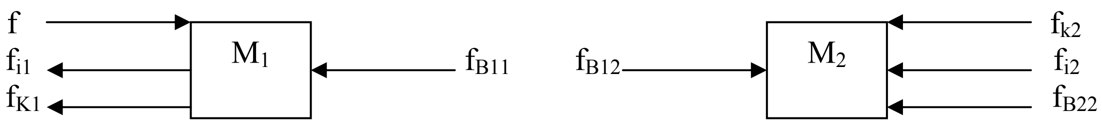
• Es. (fig. 2.2 pag. 68)
identificazione per indagine diretta

Hp: 1) se vogliamo rappresentare il sistema con un modello a parametri concentrati bisogna ipotizzare che:
- i due corpi sono rigidi
(questo permette di considerare la massa concentrata nel baricentro)
- le masse delle molle sono considerate trascurabili
(in quanto non si può considerare che esse siano corpi rigidi con la massa concentrata nel baricentro)

2) se vogliamo supporre che il sistema sia lineare bisogna limitarne il funzionamento ai soli casi in cui si hanno variazioni relativamente piccole delle grandezze in gioco
- le velocità sono piccole
(si può trascurare l'attrito dell'aria)
- l'attrito viscoso nell'ammortizzatore è sempre trascurabile in quanto prossimo all'unità
- l'attrito volvente è sempre modesto per qualunque velocità e quindi è trascurabile

Determinazione dei modelli dei singoli componenti

- carrelli $f = m\,(d^2x/dt)$
- molle $f = kx$
- ammortizzatori $f = B\,(dx/dt)$



il bilancio delle forze che agiscono su ciascuna massa è dato dalla somma scalare degli scalari che le rappresentano:

$f_{i1} + f_{k1} + f + f_{B11} = 0$ $\quad\quad$ $f_{i2} + f_{k2} + f_{B12} + f_{B22} = 0$

scomponendo le varie forze, si ottiene:

$$\begin{cases} f - K_1x_1 - B_1(dx_1/dt) - M_1\,(dv_1/dt) = 0 \\ - K_2x_2 + B_1(dx_1/dt) - B_2v_2 - M_2\,(dv_2/dt) = 0 \end{cases}$$

ponendo

$$\begin{cases} dx_1/dt = v_1 \\ dx_2/dt = v_2 \end{cases}$$

ed esplicitandosi le due accelerazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} dv_1/dt = -(K_1/M_1)\, x_1 - (B_1/M_1)\, v_1 + (B_1/M_1)\, v_2 + (1/M_1)\, f \\ dv_2/dt = -(K_2/M_2)\, x_2 + (B_1/M_2)\, v_1 - [(B_1 + B_2)/M_2]\, v_2 \end{cases}$$

ci riconduciamo alla forma per i sistemi lineari (ISU):

$$\begin{cases} dx(t)/dt = A\, x(t) + B\, u(t) \\ x_1 = C^T\, x(t) \end{cases}$$

dove x(t) è un vettore di dimensioni (n x 1)
che rappresenta le variabili di stato

$$x(t) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{vmatrix}$$

x(t) rappresenta le variabili di uscita

u(t) rappresenta le variabili di ingresso

A, B e C^T sono matrici di dimensioni opportune e i loro elementi costituiscono i parametri del sistema

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K_1/M_1 & 0 & -B_1/M_1 & 0 \\ 0 & -K_2/M_2 & B_1/M_2 & -(B_1+B_2)/M_2 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M_1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad C^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

SOLUZIONE DELLE EQ. DIFFERENZIALI LINEARI

TEOREMA DI CAUCHY-LIPSCHITZ
(per l'esistenza e l'unicità della soluzione di una equazione differenziale)

L'equazione differenziale ammette un'unica soluzione y(t) che, per un dato t_0 e per ogni ennupla y_0, $y_0^{(1)}$, …, $y_0^{(n-1)}$, soddisfa le condizioni iniziali se valgono le seguenti condizioni:

1) per ogni ennupla y_0, $y_0^{(1)}$, …, $y_0^{(n-1)}$ la funzione $f(y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)})$ è continua a tratti per tutti i valori di t verificanti la condizione $t \geq t_0$

2) per tutti i valori di t verificanti la disuguaglianza $t \geq t_0$ che non sono punti di discontinuità della funzione $f(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$ e per ogni coppia di ennuple $w_1 = \{ y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(n-1)}\}$ e $w_2 = \{y_2, y_2^{(1)}, \dots, y_2^{(n-1)}\}$ è soddisfatta la condizione di Lipschitz :

$$\| f(t, w_1) - f(t, w_2) \| \leq m(t) \| w_1 - w_2 \|$$

nella quale m(t) è una funzione limitata continua a tratti e $\| \ \|$ è una qualunque norma

Spesso le equazioni differenziali appaiono sotto forma di sistemi di equazioni differenziali del primo ordine normalizzati, cioè sistemi in cui tutte le equazioni sono risolte rispetto alla derivata prima (equazioni differenziali vettoriali del primo ordine):

$x'(t) = f(t, x(t))$
$y = g(t, x)$

$x = x_0$

dove x, x_0 e f sono vettori di ordine n
y e g sono vettori di ordine m
t è uno scalare

TEOREMA DI CAUCHY-LIPSCHITZ
(per l'esistenza e l'unicità della soluzione di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine)

L'equazione differenziale vettoriale ammette un'unica soluzione x(t) che, per un dato t_0 e per ogni x_0, soddisfa la condizione iniziale $x = x_0$ se valgono le seguenti condizioni:

1) per ogni x la funzione vettoriale f(t, x) è continua a tratti per tutti i $t \geq t_0$

2) per tutti i $t \geq t_0$ che non sono punti di discontinuità della funzione f(t,x) e per ogni coppia di vettori x_1 e x_2 è soddisfatta la condizione di Lipschitz:

$$\| f(t,x_1) - f(t, x_2) \| \leq m(t) \| x_1 - x_2 \|$$

⇨ la lipschitzianità di una funzione rispetto ad una data variabile impone che, in un certo intervallo, i rapporti incrementali della funzione rispetto a questa variabile restino limitati. Ciò significa che la condizione di Lipschitz è un po' meno restrittiva della differenziabilità ed un po' più restrittiva della continuità

LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Un' eq. differenziale di ordine n si dice lineare quando non è di grado superiore al primo nei confronti della funzione incognita e delle sue n derivate

La forma più generale che può assumere è:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t)\, y(t) = u(t)$$

quanto ai sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine essi possono essere scritti nella forma:

$x' = A(t)\, x + B(t)\, u$
$y = C(t)\, x$

$x(t_0) = x_0$

dove al solito i vettori x e x_0 sono di ordine n
il vettore u è di ordine r
il vettore y è di ordine m
A(t), B(t), C(t) sono matrici di dimensioni opportune

⇨ Nel caso di equazioni o sistemi di equazioni lineari la condizione di Cauchy-Lipschitz è senz'altro soddisfatta se gli ingressi sono funzioni continue a tratti

CASO NON STAZIONARIO

SOLUZIONE DI UN'EQ. DIFFERENZIALE DI ORDINE QUALUNQUE

L'equazione differenziale lineare di ordine n gode delle seguenti proprietà:

1) se $y(t)$ è una soluzione anche $cy(t)$ è una soluzione della stessa eq.

2) se due funzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono soluzioni dell'eq. omogenea associata anche una combinazione lineare $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ è soluzione della stessa eq

3) se $y_p(t)$ è una soluzione dell'eq. non omogenea e $y_k(t)$ è una soluzione dell'eq. omogenea associata, la funzione $y_p(t) + cy_k(t)$ è soluzione dell'eq. non omogenea

Come conseguenza di queste proprietà, si può verificare che

I_{gnf} (integrale particolare) dell'equazione omogenea associata è dato dalla combinazione lineare di n integrali particolari linearmente indipendenti dell'eq. stessa

I_{gf} (integrale generale) dell'eq. non omogenea è dato dalla somma dell'integrale generale I_{gnf} dell'eq. omogenea e di un qualunque integrale particolare I_{pf} dell'eq. non omogenea

$$I_{gf} = I_{gnf} + I_{pf}$$

L'integrale generale dell'eq. generale dell'equazione non omogenea che soddisfa a date condizioni iniziali si ottiene assegnando opportuni valori alle costanti che compaiono nell'integrale generale I_{gnf} dell'omogenea associata (tali valori variano a seconda dell'integrale particolare I_{pf} che si è scelto)

• caso particolare
I_{pf} scelto con condizioni iniziali tutte nulle (I_{pf0})

$$I_{gf} = I_{gnf} + I_{pf0}$$

poiché t = 0, risulta $I_{pf0} = 0$
i valori che vengono ad assumere le costanti che compaiono in I_{gnf} in corrispondenza a date condizioni iniziali sono gli stessi che si otterrebbero considerando nulla l'azione forzante

$\Longrightarrow$ proprietà di scomposizione della risposta:

la risposta di un sistema dinamico lineare forzato rappresentato da un'eq. differenziale lineare non omogenea si può esprimere come la somma della *risposta con ingresso zero* (evoluzione libera), cioè della risposta del sistema non forzato a partire da condizioni iniziali date, e dalla *risposta a stato zero*, cioè della risposta del sistema forzato a partire da condizioni iniziali nulle

risposta = risposta con ingresso zero + risposta a stato zero

CASO STAZIONARIO

SOLUZIONE DI UN SISTEMA DI EQ. DIFFERENZIALI OMOGENEE DEL PRIMO ORDINE

Si consideri un sistema di equazioni differenziali lineari stazionarie del primo ordine, in cui x e y siano due vettori di ordine n e m rispettivamente, del tipo:

$x' = A\, x$
$y = C\, x$

$x(t_0) = x_0$

la soluzione del sistema può essere scritta nella forma:

$$x(t) = e^{At} x_0$$

$$e^{At} \triangleq I + At + (A^2 t^2) / 2! + \ldots + (A^k t^k) / k! \qquad \text{matrice esponenziale di At}$$

- se $t_0 \neq 0$
  basta sostituire t con t-t_0

  $$x(t) = e^{A(t-t0)} x_0$$
  $$e^{A(t-t0)} \triangleq I + A(t - t_0) + \ldots + A^k (t - t_0)^k / k!$$

la risposta naturale del sistema risulta:

$$y(t) = C\, e^{A(t-t0)} x_0$$

$\Rightarrow$ la soluzione del sistema è stata ottenuta sotto forma di una serie di potenze, cioè di una somma di infiniti termini funzioni del tempo; tuttavia essa non permette di dare una valutazione qualitativa immediata dell'andamento nel tempo della soluzione.
Per questa ragione si mostrerà come una matrice esponenziale si può anche rappresentare come combinazione lineare di un numero limitato di termini caratteristici (*modi naturali del sistema* o *modi*) che permettono di ottenere un'idea sintetica del comportamento non forzato del sistema stesso.

CALCOLO DELLA MATRICE ESPONENZIALE

Esistono diversi metodi per il calcolo di una matrice esponenziale tuttavia il metodo più efficiente per mettere in evidenza i modi di un sistema è quello che fa ricorso alla trasformazione canonica di Jordan

Se la matrice equivalente di A è data da:

$$\bar{A} = T^{-1} A\, T$$

La matrice equivalente di e^{At} è data da:

$$e^{\bar{A}t} = T^{-1} e^{At}\, T$$

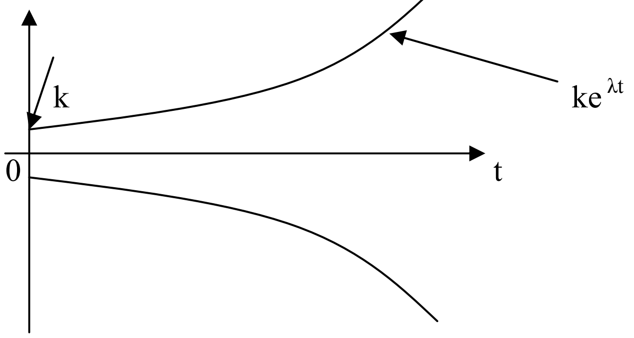
CASI NOTEVOLI

1) matrice A ha gli autovalori reali ed eventualmente multipli e autovettori linearmente indipendenti

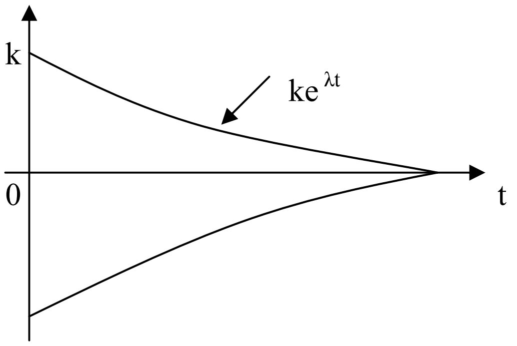
$$x(t) = e^{At} x_0 = T \begin{vmatrix} e^{\lambda 1t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda 2t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & e^{\lambda nt} \end{vmatrix} T^{-1} x_0$$

nel caso in esame ciascuna componente del vettore x(t) è costituita da una combinazione lineare di termini (modi) rappresentati da esponenziali reali aventi come esponenti gli autovalori stessi della matrice A

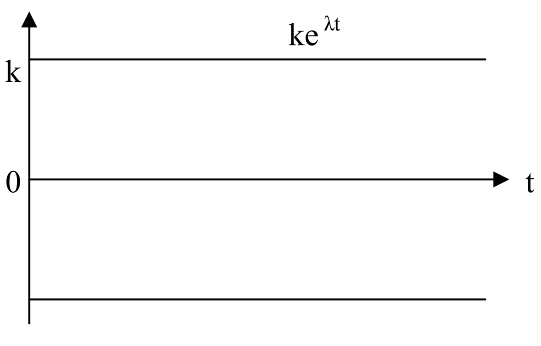
$\lambda > 0$



$\lambda < 0$



$\lambda = 0$



2) autovalori $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ della matrice A sono complessi e coniugati ed eventualmente multipli

$$x(t) = e^{At}\, x_0 = T \begin{vmatrix} e^{\lambda 1t} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{\lambda 3t} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & e^{\lambda nt} \end{vmatrix} T^{-1}\, x_0$$

SOLUZIONE MEDIANTE LA TRASFORMATA DI LAPLACE

Un altro modo per risolvere i sistemi di equazioni differenziali del primo ordine è quello di usare la trasformata di Laplace.

La trasformata della prima eq. del sistema
$x' = Ax$

diventa
$s\,x(s) - x(0) = A\,x(s)$

$x(s) = (s\,I - A)^{-1}\,x(0)$

ponendo $\quad F(s) = (s\,I - A)^{-1}$

la soluzione diventa

$x(s) = F(s)\,x(0)$

ricordando che la soluzione del sistema vale $x(t) = e^{A\,t}\,x(0)$

allora

$e^{A\,t} = \mathscr{L}^{-1}\,[F(s)]$

⇨ i componenti della matrice esponenziale $e^{A\,t}$ si possono ottenere anche antitrasformando la matrice F(s)

- per rendere più facile l'antitrasformazione, si possono porre i termini della matrice F(s) nella forma di funzioni razionali e fratte

  $$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

  dove

  P(s) è una matrice i cui elementi sono polinomi in s
  Q(s) è data dalla seguente espressione
  $Q(s) = \det(s\,I - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$

I singoli elementi della matrice F(s) sono funzioni razionali fratte il cui denominatore comune è dato da Q(s), ossia

$$F_{ij}(s) = \frac{P_{ij}(s)}{Q(s)}$$

$$= \frac{P_{ij}(s)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)}$$

LA SOLUZIONE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON OMOGENEE DEL PRIMO ORDINE

LA SOLUZIONE DIRETTA

Si consideri un sistema di equazioni differenziali, lineari, stazionarie, non omogenee nella forma

$x' = Ax + Bu \qquad x(t_0) = x_0$
$y = Cx$

per la soluzione di equazioni differenziali non omogenee del primo ordine vale la *proprietà della scomposizione*, ossia la soluzione può essere scomposta nella somma della *risposta naturale* e della *risposta forzata*.

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x_0 + \int_{to}^{t} \Phi(t, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

ricordando che la matrice di transizione risulta uguale a

$$\Phi(t - t_0) = e^{A(t - to)}$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} y(t) &= C\, x(t) \\ &= Ce^{A(t-to)} x_0 + C \int_{to}^{t} e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

dove

- il primo addendo rappresenta la risposta naturale del sistema
- il secondo addendo è la risposta forzata

casi particolari:

1) se l'ingresso $u(\tau)$ è un ingresso a gradino e A è invertibile
$u(\tau) = \bar{u}$

$$y(t) = Ce^{A(t-to)} x_0 + C\, A^{-1} (e^{A(t-to)} - I)\, B\, \bar{u}$$

si può notare come sia la risposta naturale che la risposta forzata dipendano dai modi e quindi dal valore dei poli

$G(t - \tau) = C\, e^{A(t-\tau)} B \qquad$ matrice di risposta impulsiva (m x r)

2) se le condizioni del sistema sono tutte nulle e la funzione di ingresso u sia tale che il generico ingresso i-esimo sia fornito dall'impulso di Dirac mentre gli altri ingresso siano nulli, allora:

$$y_i(t) = \int_{to}^{t} G(t-\tau)\, e_i\, \delta(\tau - t_0)\, d\tau = G(t - t_0)\, e_i$$

dove il pendice i di $y_i(t)$ indica che si tratta dell'uscita provocata dal solo i-esimo ingresso

e_i rappresenta la i-esima colonna della matrice identità I_r di dimensioni (r x r)

- nel caso in cui $B = I$
  $x_0 = e_i$

  la risposta impulsiva coincide con la risposta naturale e conseguentemente si può dire che anche la risposta impulsiva dipende dai modi del sistema

3) se sia l'ingresso sia l'uscita sono scalari, allora

$g(t-\tau) = c^T e^{A(t-\tau)} b$ funzione di risposta impulsiva

l'uscita del sistema avente come ingresso un impulso di Dirac è

$$y(t) = \int_{to}^{t} g(t-\tau)\, \delta(\tau - t_0)\, d\tau = g(t - t_0)$$

- se le condizioni iniziale sono ancora tutte nulle e u(t) qualunque allora

  per il caso scalare

  $$y(t) = \int_{to}^{t} g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

  per il caso vettoriale

  $$y(t) = \int_{to}^{t} G(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

⇨ la risposta di un sistema lineare puramente dinamico con condizioni iniziali nulle ad un ingresso u(t) dipende solo dalla sua risposta all'impulso

poiché la risposta impulsiva dipende dai modi del sistema anche la risposta ad un ingresso qualunque ha questa proprietà e quindi i modi rappresentano completamente le caratteristiche dinamiche di un sistema per quanto riguarda sia la risposta naturale che quella forzata

LA SOLUZIONE MEDIANTE LA TRASFORMATA DI LAPLACE

Supponendo $t_0 = 0$
la trasformata della prima equazione del sistema risulta

$$s\, x(s) - x(0) = A\, x(s) + B\, u(s)$$

$$x(s) = (s\, I - A)^{-1}\, x(0) + (s\, I - A)^{-1}\, B\, u(s)$$

$$\begin{aligned} y(s) &= C\, x(s) \\ &= C\, (s\, I - A)^{-1}\, x(0) + C(s\, I - A)^{-1}\, B\, u(s) \end{aligned}$$

per condizioni iniziali nulle e ponendo

$G(s) = C\, (s\, I - A)^{-1}\, B$ matrice di trasferimento per condizioni iniziali nulle

diventa

$$y(s) = G(s)\, u(s)$$

$G(s)$ è la trasformata della matrice di risposta impulsiva

essa può essere posta nella forma:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

gli zeri di $Q(s)$, ovvero le radici della cosiddetta equazione caratteristica $Q(s) = 0$, sono detti poli della matrice di trasferimento $G(s)$

i poli coincidono con gli autovalori della matrice A

- se sia l'ingresso che l'uscita sono scalari la matrice di trasferimento diviene semplicemente una funzione di trasferimento che risulta una funzione razionale fratta

- gli zeri del polinomio a numeratore del generico elemento $G_{ij}(s)$ sono detti zeri della funzione di trasferimento in quanto in corrispondenza di essi $G_{ij}(s)$ si annulla

la $G_{ij}(s)$ si può esprimere come somma di fratti semplici le cui antitrasformate coincidono con i modi del sistema e quindi la funzione $G_{ij}(s)$ risulta dipendente dai modi del sistema.

PROPRIETA' STRUTTURALI DEI SISTEMI DINAMICI

STABILITA'

Lo studio della stabilità di un sistema consiste nella valutazione qualitativa di alcuni aspetti del suo comportamento in presenza di perturbazioni agenti su di esso.

- un sistema è stabile se la sua evoluzione nel tempo è poco sensibile alle perturbazioni agenti su di esso

- un sistema è instabile se la sua evoluzione nel tempo, per effetto di una piccola perturbazione, differisce molto da quello corrispondente al caso di assenza di perturbazione.

DEFINIZIONE DI STABILITA' SECONDO LYAPUNOV

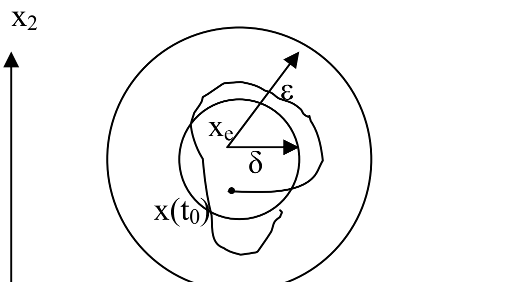
Da un punto di vista qualitativo, i tipi di risposta (e quindi i tipi di stabilità) nell'analisi di sistemi soggetti a perturbazioni di durata limitata sono i seguenti:

- risposta limitata (stato di equilibrio semplicemente stabile)
- risposta divergente (stato di equilibrio instabile)
- risposta convergente asintoticamente al punto di equilibrio (stato di equilibrio asintoticamente stabile)

DEF. stato di equilibrio semplicemente stabile

Lo stato di equilibrio x_e di un sistema si dice semplicemente stabile se, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se la perturbazione iniziale $x_e - x(t_0)$ è, in norma, minore di δ allora anche l'evoluzione della perturbazione $x_e - x(t)$ risulta, in norma, minore di ε, per ogni $t > t_0$

- Caso bidimensionale



il sistema è stabile se, scelto un intorno del punto x_e di raggio ε piccolo a piacere, esiste un intorno di raggio δ tale che la traiettoria dell'evoluzione libera avente origine da uno stato $x(t_0)$ interno a tale raggio, si mantiene interna al cerchio di raggio ε.

DEF. stato di equilibrio asintoticamente stabile

Uno stato di equilibrio x_e si dice asintoticamente stabile se, non solo, è semplicemente stabile ma, quando la perturbazione iniziale è limitata, l'evoluzione perturbata x(t) converge, per $t \to \infty$ allo stato x_e

- Significato:
  nel caso di sistemi asintoticamente stabili, perturbazioni limitate non solo danno effetti limitati, ma assicurano che l'evoluzione converga asintoticamente al punto di equilibrio

DEF. stato di equilibrio instabile

Uno stato di equilibrio x_e si dice instabile se l'evoluzione della perturbazione non rimane limitata in un intervallo e per $t \to \infty$ diverge dal punto di equilibrio x_e

<u>CASO SISTEMA LINEARE STAZIONARIO</u>

CONDIZIONE necessaria e sufficiente per la stabilità di un sistema lineare e stazionario

Un sistema lineare stazionario è semplicemente stabile se e solo se:
- gli autovalori della matrice A con molteplicità geometrica unitaria hanno parte reale negativa o nulla
- gli autovalori della matrice A con molteplicità geometrica maggiore di uno hanno parte reale negativa

CONDIZIONE necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica di un sistema lineare e stazionario

Un sistema lineare stazionario è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale negativa

⇨ Nel caso in cui i sistemi lineari e stazionari siano rappresentati da equazioni differenziali di ordine n, invece degli autovalori si devono considerare le radici dell'eq. caratteristica relativa all'equazione differenziale.

⇨ Nel caso in cui il sistema sia rappresentato con una funzione di trasferimento quelli da considerare sono i poli della funzione stessa.

IL CRITERIO DI ROUTH

Esistono alcuni criteri di tipo analitico-numerico che permettono di determinare il segno delle radici di un polinomio dai segni di un'opportuna sequenza di numeri costruita a partire dai coefficienti del polinomio stesso.
Questi criteri sono usati molto spesso per calcolare i valori limite dei parametri, cioè i valori otre i quali il sistema risulta instabile

PASSI:

1) considieriamo l'eq. algebrica:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

2) costruiamo la tabella di Routh:

$$\begin{array}{l|lllll}
n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & ... & ... \\
n-3 & b_{n-3} & b_{n-5} & ... & ... & ... \\
n-4 & c_{n-4} & c_{n-6} & \dots & \dots & \dots \\
n-5 & c_{n-5} & c_{n-7} & \dots & \dots & \dots \\
... & ... & ... & ... & ... & ...
\end{array}$$

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-2} - a_n\, a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad b_{n-4} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-4} - a_n\, a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-3} = \frac{b_{n-2}\, a_{n-3} - a_{n-1}\, b_{n-4}}{b_{n-2}} \qquad b_{n-5} = \frac{b_{n-2}\, a_{n-5} - a_{n-1}\, b_{n-6}}{b_{n-2}}$$

- il termine b_{n-2} è espresso dal determinante costituito dai primi due coefficienti delle prime due righe, cambiato di segno e diviso per il primo coefficiente della seconda riga

- il termine b_{n-4} è espresso dal determinante costituito dai primi e terzi coefficienti delle prime de righe, cambiato di segno e diviso ancora per il primo coefficiente della seconda riga, e così via.

⟹ Le righe risultano di lunghezza via via decrescente finchè l'ultima riga contraddistinta con il numero zero, comprende un solo elemento

⟹ Durante la costruzione della tabella, tutti i termini di una riga possono essere moltiplicati per un coefficiente positivo senza che ciò modifichi il numero delle variazioni di segno nella prima colonna

3) applicazione del teorema di Routh

TEOREMA DI ROUTH
Ad ogni variazione di segno dei termini della prima colonna della tabella di Routh considerati successivamente corrisponde una radice con parte reale positiva, ad ogni permanenza corrisponde una radice con parte reale negativa

Nella costruzione della tabella di Routh si possono incontrare alcuni casi singolari, nei quali bisogna ricorrere ad alcuni artifici:

1) il primo termine di una riga è nullo
2) tutti i termini di una riga sono nulli

1) nel primo caso si può adoperare l'artificio di sostituire lo zero con un termine $+\varepsilon$ o $-\varepsilon$ di modulo piccolo a piacere

quando però i primi elementi di una riga sono tutti nulli e si ha un numero elevato di righe il cui primo elemento sia nullo, diversi elementi risultano funzioni di ε e delle sue potenze; in tal caso non è facile stabilire quali elementi siano infinitesimi rispetto ad altri

2) il secondo caso si verifica sempre in corrispondenza di una dispari.
Se si indica questa riga con il numero *2m –1*, le eventuali variazioni di segno riguardano solo *n – 2m* radici del polinomio; per ottenere informazioni sulle restanti *2m* radici del polinomio basta costruire l'*equazione ausiliaria*:

$$b_{2m}\, s^{2m} + b_{2m-2}\, s^{2m-2} + \ldots + b_0 = 0$$

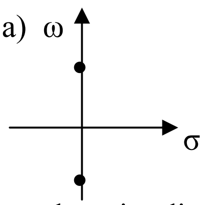
dove
$b_{2m}, b_{2m-2}, \ldots, b_0$ = termini della riga immediatamente precedente la riga composta da tutti zeri

le radici di quest'espressione coincidono con le *2m* radici dell'eq. polinomiale.

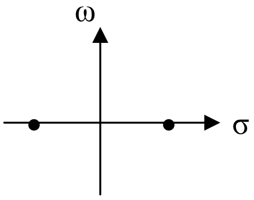
Poiché nell'eq ausiliaria mancano i termini di grado dispari le radici sono disposte simmetricamente rispetto all'origine.

Se si pone $s^2 = x$
otteniamo

$$b_{2m}\, x^{m} + b_{2m-2}\, x^{m-1} + \ldots + b_0 = 0$$

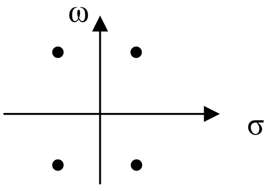
a) 

ad ogni radice reale e negativa corrisponde una coppia di radici immaginarie b)



ad ogni radice reale e positiva corrispondono due radici reali simmetriche rispetto all'origine

c)



ad ogni coppia di radici complesse e coniugate simmetriche corrispondono due coppie di radici complesse e coniugate simmetriche rispetto all'origine

$\Longrightarrow$ l'equazione ausiliaria ha un numero di radici a parte reale positiva pari a quello delle sue radici a parte reale negativa; essa può avere anche radici a parti reali nulle

$\downarrow$

quando la tabella di Routh presenta una riga di zeri, il sistema di cui il polinomio fornisce l'eq. caratteristica non può mai essere asintoticamente stabile.

L'eq. ausiliaria si può risolvere solo se non è di grado elevato.
Diversamente se ne deriva il primo membro e si prosegue la tabella di Routh dopo aver disposto i coefficienti del polinomio così ottenuto nella riga di tutti zeri

ESEMPI

1) $s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 = 0$

4	1	6	1
3	4	4	0
2	5	1	0
1	16/5	0	0
0	1	0	0

non essendoci nessuna variazione le radici del polinomio devono essere tutte a parte reale negativa

2) $2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$

4	2	3	10
3	1	5	0
2	-7	10	0
1	45/7	0	0
0	10	0	0

poichè la prima colonna presenta due variazioni di segno, due delle radici del polinomio devono essere a parte reale positiva

3) $s^3 + 3s - 2 = 0$

3	1	3
2	$+\varepsilon$	-2
1	$3\varepsilon+2$	0
0	-2	0

3	1	3
2	$-\varepsilon$	-2
1	$3\varepsilon-2$	0
0	-2	0

in entrambi i casi nella prima colonna compare una variazione che rivela la presenza di una radice con parte reale positiva

CONTROLLABILITA'

Per la soluzione di un qualunque problema di controllo di un dato sistema dinamico è molto importante sapere se tale sistema può essere pilotato da uno stato dello spazio degli stati ad un altro, agendo opportunamente sull'ingresso.

Un sistema è *completamente controllabile* se in un tempo compreso $[t_0, t_1]$, esso può essere condotto da un qualunque punto dello spazio degli stati ad un qualunque altro punto.

CASO DI SISTEMI LINEARI STAZIONARI CONTINUI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$x(t_0) = x_0$

- 2 metodi :

1) bisogna costruire la *matrice di controllabilità* :

$$P = [\ B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B\ ]$$

se il rango di questa matrice è massimo, ossia n, significa che è possibile ottenere la transizione tra due stati qualunque e quindi il sistema si dice completamente controllabile

2) un sistema completamente controllabile è un sistema per il quale è possibile determinare un controllo in grado di portare il sistema, in un tempo non infinito, da una qualunque condizione iniziale ad un qualunque altro punto dello spazio degli stati.

$Bu = (\dot{x} - Ax)$

- Ne consegue che se **n = r** (numero ingressi è uguale al numero degli stati) la matrice B risulta quadrata e se essa è anche invertibile come sempre accade, l'equazione precedente è risolubile in u, ossia

$$u = \frac{\dot{x} - Ax}{B}$$

Ciò significa che è possibile determinare il valore delle componenti di u in corrispondenza delle quali n combinazioni lineari delle componenti dei vettori x e $\dot{x}$ assumono i valori desiderati

- se B non è quadrata, le informazioni necessarie non possono essere date tutte tramite l'ampiezza delle m componenti di u, ma bisogna utilizzare anche le derivate di u. Infatti, derivando due volte si ottiene:

$A B u = \ddot{x} - A^2 x$ (derivando una volta)
$A^2 B u + A B u' + B u'' = x''' - A^3 x$ (derivando due volte)

Ciò può essere scritto nella forma:

$$\begin{vmatrix} B & 0 & 0 \\ AB & B & 0 \\ A^2B & AB & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A & I & 0 & 0 \\ -A^2 & 0 & I & 0 \\ -A^3 & 0 & 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ x' \\ x'' \\ x''' \end{vmatrix}$$

se la matrice a primo membro ha almeno un minore non nullo di ordine n, è possible determinare n componenti del vettore $| u\ u'\ u'' |^T$ in modo da assegnare n combinazioni lineari delle componenti del vettore x e delle sue derivate.

$$\Downarrow$$

affinché ciò sia verificato basta che sia possibile scrivere la matrice di controllabilità vista precedentemente; in tal caso esistono sicuramente almeno n righe (e quindi n equazioni) linearmente indipendenti.

In altre parole, quanti più sono gli ingressi, oltre quelli strettamente necessari per la controllabilità, tanto meno bisogna ricorrere alle derivate dell'ingresso per dare al sistema le informazioni necessarie e quindi tanto più semplici sono i segnali di controllo necessari.

Una misura del grado di complessità dei segnali di ingresso necessari per controllare un sistema è il cosiddetto *indice di controllabilità*.

DEFINIZIONE indice di controllabilità

Dato un sistema lineare, stazionario, completamente controllabile, si definisce indice di controllabilità il più piccolo numero intero v_c tale che la matrice:

$P' = [B \mid AB \mid A^2 B \mid ... \mid A^{vc-1} B]$

Abbia rango n, essendo n l'ordine del sistema

L'indice di controllabilità ci dice dunque qual è l'ordine minimo di derivazione oltre il quale le derivate degli ingressi possono non essere arbitrariamente assegnabili senza compromettere la controllabilità del sistema

ESEMPIO

Verificare la controllabilità del sistema meccanico visto in un esempio precedente

$$x(t) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K_1/M_1 & 0 & -B_1/M_1 & 0 \\ 0 & -K_2/M_2 & B_1/M_2 & -(B_1+B_2)/M_2 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M_1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

la matrice P di controllabilità risulta:

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1/M_1 & -B_1/M_1^2 & p \\ 0 & 0 & B_1/M_1M_2 & q \\ 1/M_1 & -B_1/M_1^2 & p & r \\ 0 & B_1/M_1M_2 & q & s \end{vmatrix}$$

dove p, q, r, s sono opportunamente definite.

Il sistema risulta completamente controllabile se

$$K \neq \frac{B^2(M-B)}{M(B-2M)}$$

dove, affinché la costante elastica K risulti positiva, deve essere:

$M < B < 2M$

OSSERVABILITA'

Con il termine osservabilità di un sistema dinamico si indica la possibilità di poter risalire allo stato iniziale $x(t_0)$ (o allo stato finale) conoscendo l'evoluzione dell'ingresso e della corrispondente uscita nell'intervallo $[t_0, t_1]$

Se un sistema è completamente osservabile esiste, dato un ingresso, una corrispondenza biunivoca fra stati iniziali e uscite e, cioè, fra l'andamento dell'uscita del sistema e la traiettoria nello spazio degli stati

Es.

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

se $y = x_1 + x_3$
non tutti gli stati sono presenti nell'uscita ma da x_1 riesco a risalire a x_2

se $y = x_1$
in questo caso non è completamente osservabile

CASO SISTEMI LINEARI E STAZIONARI CONTINUI

2 MODI:

1) Definiamo la *matrice di osservabilità* Q:

$$Q = [C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T]$$

Se la matrice Q è di rango Massimo, il sottospazio degli stati inosservabili ha dimensioni nulle e quindi il sistema (ovvero la coppia A e C) è *completamente osservabile*.

2) un modo più intuitivo per dedurre la condizione di osservabilità è quello che si basa sul fatto che, dal punto di vista fisico, la completa osservabilità di un sistema del tipo:

$$\begin{cases} x' = Ax \\ y = Cx \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

significa che direttamente e/o indirettamente tutte le componenti del vettore di uno stato x(t) hanno una qualche influenza sull'uscita, influenza che si può manifestare o direttamente sull'ampiezza dell'uscita o indirettamente su quella delle sue derivate.

Derivando la formula:

$$y = Cx$$

e tenendo conto di

$$x' = Ax$$

si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} y = Cx \\ y' = Cax \\ \dots \\ y^{(n-1)} = CA^{n-1}x \end{cases}$$

che ammette soluzione diversa da zero solo se la matrice di osservabilità ha rango massimo.

Ovviamente se un sistema è osservabile quando è disponibile un certo vettore di uscita y, lo è pure se a questo si aggiungono altre uscite ed è naturale pensare che nel secondo caso il sistema sia più facilmente osservabile che nel primo

Un mezzo per misurare quantitativamente il grado di osservabilità di un sistema completamente osservabile è il cosiddetto *indice di osservabilità* :

Dato un sistema di ordine n si definisce indice di osservabilità il più piccolo numero intero v_0 tale che la matrice:

$Q' = [C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \dots \mid (A^T)^{v0-1} C^T]$

abbia rango n.

LA SCOMPOSIZIONE DI KALMAN

TEOREMA

Dato un sistema lineare e stazionario esso si può sempre trasformare in un sistema equivalente nella variabile $z \in R^n$:

$$\begin{cases} z' = \underline{A}\, z + \underline{B}\, u \\ z(t_0) = z_0 \\ y = \underline{C}\, z \end{cases}$$

dove :

$\underline{A} = T^{-1} A\, T$
$\underline{B} = T^{-1} B$
$\underline{C} = C\, T$

e le matrici assumono la forma partizionata :

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{A}_{13} & \underline{A}_{14} \\ 0 & \underline{A}_{22} & 0 & \underline{A}_{24} \\ 0 & 0 & \underline{A}_{33} & \underline{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \underline{A}_{44} \end{vmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{B}_1 \\ \underline{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{vmatrix} 0 & \underline{C}_2 & 0 & \underline{C}_4 \end{vmatrix}$$

Per meglio comprendere il significato della trasformazione equivalente si può porre

$z^T = | z_1 \; z_2 \; z_3 \; z_4 |$

cosicché il sistema assume la seguente forma:

$$
\begin{array}{lllllll}
z_1' = & \underline{A}_{11}z_1 & + \underline{A}_{12}z_2 & + \underline{A}_{13}z_3 & + \underline{A}_{14}z_4 & + \underline{B}_1 u \\
z_2' = & & + \underline{A}_{22}z_2 & & + \underline{A}_{24}z_4 & + \underline{B}_2 u \\
z_3' = & & & + \underline{A}_{33}z_3 & + \underline{A}_{34}z_4 & \\
z_4' = & & & & + \underline{A}_{44}z_4 & \\
y \;\; = & & \underline{C}_2 z_2 & & + \; \underline{C}_4 z_4 &
\end{array}
$$

↳

- soltanto gli stati z_1 e z_2 sono influenzati dai controlli e i sistemi rappresentati dalle prime due eq sono detti controllabili

- gli stati z_3 e z_4 non sono influenzati nemmeno indirettamente dai controlli e quindi i sistemi rappresentati dalle ultime due eq. sono detti non controllabili

- l'uscita è influenzata direttamente soltanto dagli stati z_2 e z_4 e sistemi rappresentati dalla seconda e dalla quarta eq. sono detti osservabili

- l'uscita non è influenzata nemmeno indirettamente dagli stati z_1 e z_3 e i sistemi rappresentati dalla prima e dalla terza eq. sono detti non osservabili

METODI DI RIDUZIONE DELL'ORDINE DEL MODELLO DI UN SISTEMA

Una volta determinato il modello di un sistema è spesso necessario operare una riduzione dell'ordine dinamico di questo modello; esso, infatti, può risultare di dimensioni troppo grandi per poter essere usato direttamente per il progetto del controllo desiderato.

1) la prima cosa da fare è quella di eliminare dal modello le parti non controllabili e non osservabili (anche usando Kalman)

Esistono metodi che permettono di ridurre l'ordine di un modello eliminando non solo le parti non controllabili e non osservabili ma anche quelle parti scarsamente controllabili e osservabili.
Il più semplice di questi metodi è quello che si applica ai sistemi detti *a poli prevalenti*, cioè a quei sistemi la cui uscita è influenzata in maniera rilevante soltanto dai modi relativi ad alcuni dei poli del sistema stesso.

2) ricordando lo sviluppo in fratti semplici della trasformata della risposta di un sistema, è facile capire che il contributo all'uscita dovuto al modo relativo a un polo è trascurabile nei due seguenti casi:

   a) la parte reale del polo è in valore assoluto molto più grande di quella dei poli prevalenti

   b) il polo coincide con uno zero e il modo ad esso corrispondente possiede un residuo che risulta nullo

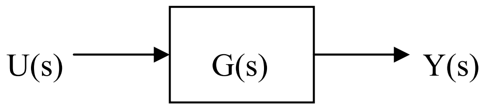
Una volta individuati i poli da cui l'uscita è influenzata molto modestamente, per ottenere un sistema di ordine ridotto basta che nello sviluppo in fratti semplici vengano trascurati i termini corrispondenti a tali poli.

L'eliminazione dei termini trascurabili dello sviluppo in fratti semplici di un sistema a poli prevalenti non comporta necessariamente l'eliminazione di tutte le parti del sistema che risultano modestamente controllabili ed osservabili, ma solo di quelle corrispondenti a tali poli.

PROPRIETA' DEI SISTEMI DINAMICI LINEARI E STAZIONARI SISO CON CONTROLLO IN RETROAZIONE

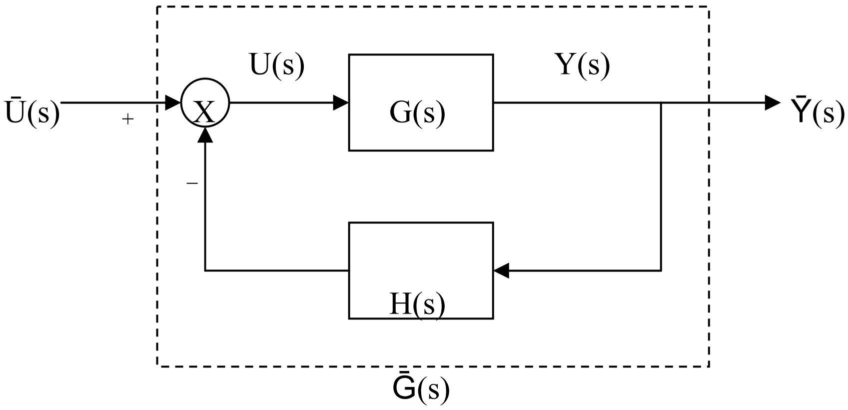
INTRODUZIONE

In un sistema dinamico lineare e stazionario di tipo SISO il legame fra ingresso e uscita si può esprimere per mezzo della funzione di trasferimento, la quale, per condizioni iniziali nulle, fornisce il rapporto tra la trasformata di Laplace dell'uscita e quella dell'ingresso.



Naturalmente nei sistemi lineari stazionari puramente algebrici di tipo SISO G(s) non è nient'altro che una costante di proporzionalità

Si consideri il sistema di controllo in retroazione della figura seguente:



Ū(s) e Ȳ(s) = trasformate delle variabili di ingresso e uscita

G(s) e H(s) = funzioni di trasferimento della parte in catena diretta e di quella in retroazione

Poiché:

$U(s) = \bar{U}(s) - Y(s)H(s)$

$\bar{Y}(s) = Y(s) = G(s)U(s)$

La funzione di trasferimento risulta:

$$\bar{G}(s) = \frac{\bar{Y}(s)}{\bar{U}(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

dove

$G(s)H(s) =$ funzione di trasferimento d'anello

La funzione di trasferimento può essere scritta nella sua forma fattorizzata:

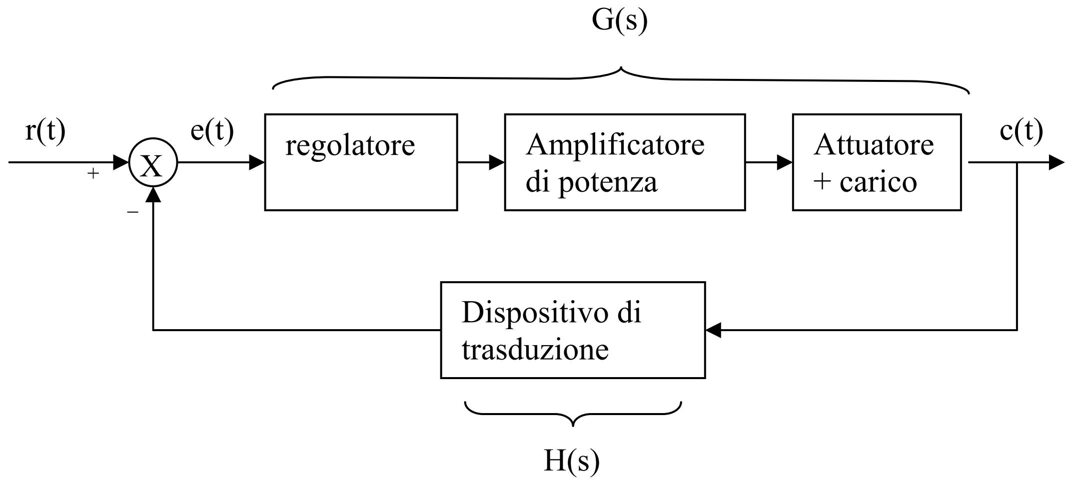
$$G(s) = \frac{\bar{K}\ (s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)}$$

dove

$\bar{K} = \dfrac{k\ z_1 z_2 \ldots z_m}{p_1 p_2 \ldots p_n}$ costante di guadagno

ERRORI A REGIME

Si consideri il sistema con controllo in retroazione riportato nella figura seguente:



$G(s)$ = funzione di trasferimento della parte in catena diretta

$H(s)$ = funzione di trasferimento della parte in retroazione

L'obiettivo dei sistemi di controllo più semplici è quello di fare in modo che a regime l'uscita del sistema sia proporzionale all'ingresso, ovvero che l'uscita insegua l'ingresso

$$\lim_{t \to \infty} c(t) = K_c \, r(t)$$

$K_c \, r(t)$ = uscita desiderata
K_c = costante di regolazione o controllo (non è dimensionale)

⇨ Tuttavia anche a regime e in assenza di disturbi l'uscita effettiva non coincide mai con quella desiderata e ciò per i seguenti motivi:

- il sistema è dinamico, cioè presenta inerzie che fanno sì che non sia sempre possibile inseguire ingressi variabili troppo rapidamente
- anche se i parametri dei componenti in retroazione presentano variazioni trascurabili, tuttavia il loro valore non può essere noto in modo esatto

l'errore può essere definito in due modi equivalenti:

1) $$e_i(t) = r(t) - \frac{c(t)}{K_c}$$

errore riferito all'ingresso
(errore tra il riferimento e l'uscita riportata all'ingresso)

2) $$e_u(t) = K_c \, r(t) - c(t)$$

errore riferito all'uscita
(errore tra l'uscita desiderata e quella effettiva)

per poter fare considerazioni su $e_i(t)$ e determinare i valori che questo errore può assumere a regime a seconda del tipo di sistema e del tipo di riferimento,
poniamo l'errore riferito all'ingresso nella forma:

$$e_i(t) = r(t) - h' c(t)$$

dove
$h' = 1/K_c$
supponiamo inoltre che le due funzioni $G(s)$ e $H(s)$ siano funzioni razionali fratte poste nella forma:

$$G(s) = \frac{K\,(1 + s\tau'_{g1})\,(1 + s\tau'_{g2})\ldots}{s^{l}\,(1 + s\tau_{g1})\,(1 + s\tau_{g2})\ldots} \cdot \frac{(1 + s\,2\delta'_{g1}/\omega'_{ng1} + s^2/\omega'^{2}_{ng1})\,(1 + s\,2\delta'_{g2}/\omega'_{ng2} + s^2/\omega'^{2}_{ng2})\ldots}{(1 + s\,2\delta_{g1}/\omega_{ng1} + s^2/\omega^{2}_{ng1})\,(1 + s\,2\delta_{g2}/\omega_{ng2} + s^2/\omega^{2}_{ng2})\ldots}$$

$$H(s) = \frac{h\,(1 + s\tau'_{h1})\,(1 + s\tau'_{h2})\ldots}{(1 + s\tau_{h1})\,(1 + s\tau_{h2})\ldots} \cdot \frac{(1 + s\,2\delta'_{h1}/\omega'_{nh1} + s^2/\omega'^{2}_{nh1})\,(1 + s\,2\delta'_{h2}/\omega'_{nh2} + s^2/\omega'^{2}_{nh2})\ldots}{(1 + s\,2\delta_{h1}/\omega_{nh1} + s^2/\omega^{2}_{nh1})\,(1 + s\,2\delta_{h2}/\omega_{nh2} + s^2/\omega^{2}_{nh2})\ldots}$$

K e h = rappresentano rispettivamente la costante di guadagno della parte in catena diretta e la costante di guadagno della parte in retroazione

si può notare come H(s) non presenti poli nell'origine.
Si suppone che il numero di zeri e poli di G(s) sia rispettivamente m e n, mentre il numero di zeri e poli di H(s) sia rispettivamente p e q.
Naturalmente deve valere $n \geq m$ e $q \geq p$

h e h' rappresentano rispettivamente il valore effettivo e quello nominale della costante di guadagno di H(s).

⇨ il valore che assume l'uscita desiderata c(t) per $t \to \infty$ è dato da:

$$\lim_{t \to \infty} c(t) = \lim_{s \to 0} s\,C(s) = (1/h') \lim_{s \to 0} s\,R(s)$$

⇨ il valore che assume a regime l'uscita effettiva è dato da:

$$\lim_{t \to \infty} c(t) = \lim_{s \to 0} s\,C(s) = \lim_{s \to 0} \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}\, s\,R(s) = (1/h) \lim_{s \to 0} s\,R(s)$$

⇨ l'errore riferito all'ingresso diventa

$$E(s) = R(s) - h'C(s) = R(s) - \frac{h'G(s)R(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1 + G(s)[H(s) - h']\,R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

TIPI DI SISTEMA ED INGRESSI DI RIFERIMENTO

È ora possibile calcolare l'errore a regime con il teorema del valore finale, errore che assume diversi a seconda di:

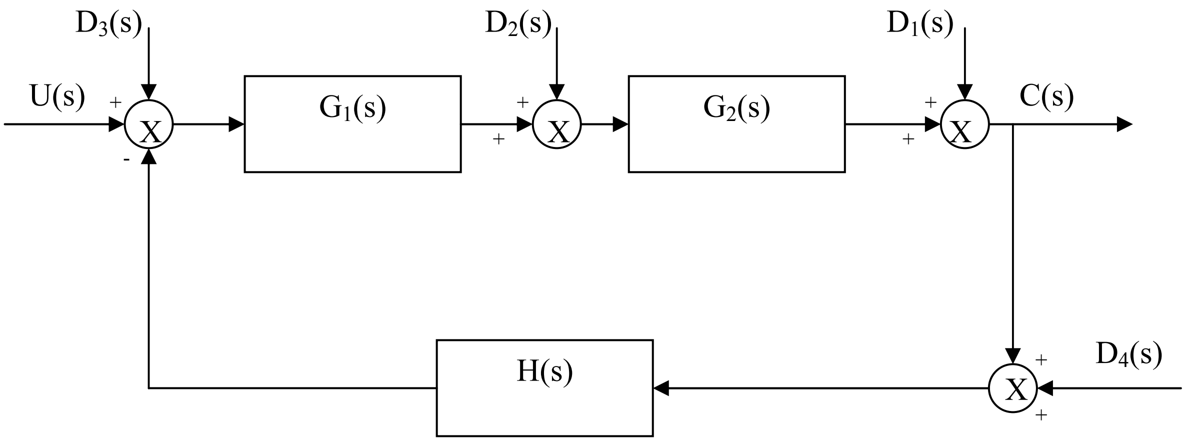
1) tipo di ingresso di riferimento e del tipo di sistema

2) tipo di sistema
(essendo quest'ultimo definito dal valore assunto da l nell'espressione di G(s), cioè nella parte in catena diretta)

$K_l = 0$ (trasduttore di retroazione di tipo algebrico)						
Tipo di sistema	Risposta a un ingresso a gradino di ampiezza R_0		Risposta a un ingresso a rampa di pendenza R_0		Risposta a un ingresso a parabola di costante R_0	
	Costante di posizione K_p	Errore di posizione e_{rp}	Costante di velocità K_v	Errore di velocità e_{rv}	Costante di accelerazione K_v	Errore di accelerazione e_{rv}
0	Kh	$\frac{R_0}{(1 + K_p)}$	0	∞	0	∞
1	∞	0	Kh	R_0/K_v	0	∞
2	∞	0	∞	0	Kh	R_0/K_a

INSENSIBILITA' AI DISTURBI

Si consideri un sistema con controllo in retroazione di tipo SISO come quello rappresentato nella figura seguente:



indichiamo con $C_i(s)$ l'uscita i-esima data da:

$C_i(s)$ = uscita senza disturbi + uscita con disturbo in ingresso

= $C_u(s) + C_{cd\,i}(s)$

al fine di calcolare i vari disturbi consideriamo $C_u(s) = 0$ e $G(s) = G_1(s)G_2(s)$

$$C_{cd\,1} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}\, D_1(s)$$

$$C_{cd\,2} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}\, D_2(s)$$

$$C_{cd\,3} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}\, D_3(s)$$

$$C_{cd\,4} = \frac{G_1(s)G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}\, D_4(s)$$

se supponiamo che $G_1(s)$, $G_2(s)$, $H(s)$ siano rappresentati nella forma complessa:

$$G(s) = \frac{K\,(1 + s\tau'_{g1})\,(1 + s\tau'_{g2})\ldots}{s^1\,(1 + s\tau_{g1})\,(1 + s\tau_{g2})\ldots} \cdot \frac{(1 + s\,2\delta'_{g1}/\omega'_{ng1} + s^2/\omega'^2_{ng1})\,(1 + s\,2\delta'_{g2}/\omega'_{ng2} + s^2/\omega'^2_{ng2})\ldots}{(1 + s\,2\delta_{g1}/\omega_{ng1} + s^2/\omega^2_{ng1})\,(1 + s\,2\delta_{g2}/\omega_{ng2} + s^2/\omega^2_{ng2})\ldots}$$

$$H(s) = \frac{h\,(1 + s\tau'_{h1})\,(1 + s\tau'_{h2})\ldots}{(1 + s\tau_{h1})\,(1 + s\tau_{h2})\ldots} \cdot \frac{(1 + s\,2\delta'_{h1}/\omega'_{nh1} + s^2/\omega'^2_{nh1})\,(1 + s\,2\delta'_{h2}/\omega'_{nh2} + s^2/\omega'^2_{nh2})\ldots}{(1 + s\,2\delta_{h1}/\omega_{nh1} + s^2/\omega^2_{nh1})\,(1 + s\,2\delta_{h2}/\omega_{nh2} + s^2/\omega^2_{nh2})\ldots}$$

e che il disturbo sia costante e di ampiezza unitaria (disturbo a gradino) è facile vedere che a regime l'influenza del disturbo stesso sull'uscita vale:

$$C_{01} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{1}{1 + K_1K_2h}$$

$$C_{02} = \frac{1}{1/K_2 + K_1h}$$

$$C_{03} = \frac{1}{1/K_1K_2 + h}$$

$$C_{04} = -\frac{1}{1/K_1K_2h + 1}$$

dove:

$$K_1 = \lim_{s \to 0} G_1(s)$$

$$K_2 = \lim_{s \to 0} G_2(s)$$

$$h = \lim_{s \to 0} H(s)$$

- il disturbo $D_1(s)$ si sovrappone alla variabile di uscita ma l'errore da esso causato viene molto attenuato o addirittura annullato (il controllo in retroazione è stato concepito proprio per contrastare questo tipo di disturbi)

- il disturbo $D_3(s)$ si sovrappone alla variabile di riferimento e l'errore da esso causato viene attenuato pochissimo dato che è il riferimento stesso che viene corrotto

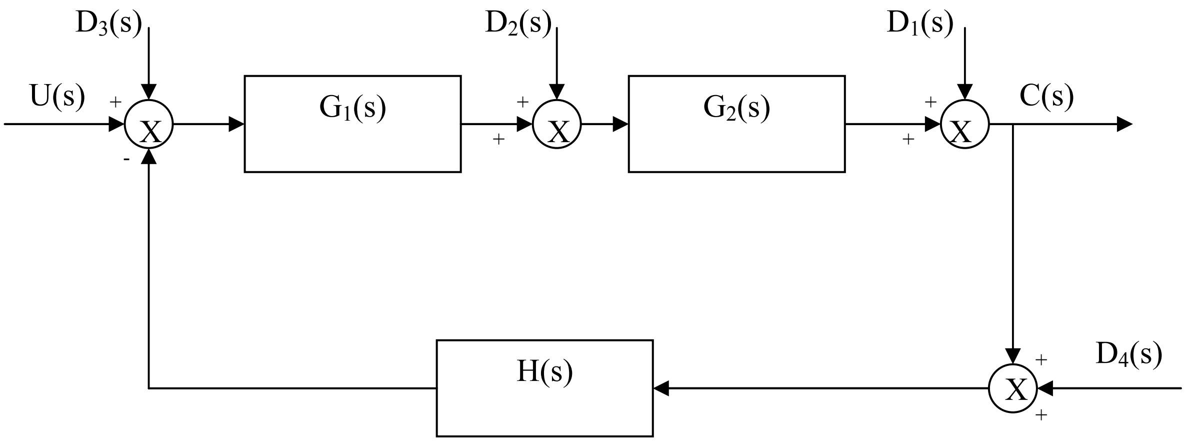
- il disturbo $D_4(s)$ entra nei componenti che effettuano la misura e l'errore da esso causato non viene attenuato

<u>INSENSIBILITA' ALLE VARIAZIONI DEI PARAMETRI</u>

L’influenza sugli errori a regime delle variazioni dei parametri della parte in catena diretta di un sistema di tipo SISO con controllo in retroazione è del tutto trascurabile mentre assai rilevante è l’influenza delle variazioni dei parametri della parte in retroazione del sistema stesso

Il comportamento del sistema non subisce non subisce variazioni rilevanti se si tratta di variazioni dei parametri della parte in catena diretta mentre il contrario accade se si tratta dei parametri della parte in retroazione

Si consideri il seguente sistema:



e si supponga che nella funzione di trasferimento relativa alla parte in catena diretta:

$G(s) = G_1(s)G_2(s)$

il parametro α sia soggetto ad una variazione $\Delta\alpha$ attorno al valore α_0

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} U(s)$$

$$= \underline{G}(s)\, U(s)$$

dove

$$\underline{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

la variazione del parametro α provoca:

$\Delta\alpha \Rightarrow \Delta\, G(s) \Rightarrow \Delta\, \underline{G}(s) \Rightarrow Y(s)$

Quindi

$$\Delta \underline{G}(s) = \frac{\partial[\underline{G}(s)]}{\partial G} \left.\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right|_{\alpha = \alpha_0} \Delta\alpha$$

ponendo

$$\Delta G(s) = \left.\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right|_{\alpha = \alpha_0} \Delta\alpha$$

si ottiene (risolvendo la derivata)

$$\Delta \underline{G}(s) = \frac{1}{[1 + G(s)H(s)]^2} \Delta G(s)$$

Pertanto, per le variazioni relative si ha:

$$\frac{\Delta \underline{G}(s)}{\underline{G}(s)} = \frac{1}{[1 + G(s)H(s)]^2} \Delta G(s)\, \underline{G}(s)$$

$$\frac{\Delta \underline{G}(s)}{\underline{G}(s)} = \frac{1}{[1 + G(s)H(s)]^2} \frac{\Delta G(s)}{G(s)} [1 + G(s)H(s)]$$

$$\frac{\Delta \underline{G}(s)}{\underline{G}(s)} = \frac{1}{[1 + G(s)H(s)]} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

Tenendo conto di questa relazione, la funzione:

$$\boxed{S_G^{\underline{G}} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}}$$

si può definire come *funzione di sensibilità* della funzione di trasferimento $\underline{G}(s)$ alle variazioni di G(s).
La funzione di sensibilità fornisce il legame tra le variazione relative della funzione di trasferimento in catena diretta dovute alle variazioni del parametro α e le corrispondenti variazioni relative della funzione di trasferimento del sistema in retroazione.

Le variazioni della risposta del sistema sono date da:

$$\Delta Y(s) = \Delta \underline{G}(s) U(s)$$

$$\frac{\Delta Y(s)}{Y(s)} = S_G^{\underline{G}} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

La funzione di sensibilità fornisce il legame tra le variazioni relative della funzione di trasferimento in catena diretta dovute alle variazioni del parametro α e le corrispondenti variazioni relative della risposta del sistema ad un generico ingresso U(s)

In modo assai diverso vanno le cose in presenza di una variazione $\Delta\gamma$ di un parametro di H(s) attorno al valore γ_0

$$\Delta\gamma \Rightarrow \Delta H(s) \Rightarrow \Delta \underline{G}(s) \Rightarrow \Delta Y(s)$$

$$\Delta G(s) = \frac{\partial}{\partial H}\left[\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}\right] \left.\frac{\partial H}{\partial \gamma}\right|_{\gamma = \gamma_0} \Delta\gamma$$

$$= \frac{- G^2(s)}{[1 + G(s)H(s)]^2} \Delta H(s)$$

dove

$$\Delta H(s) = \left.\frac{\partial H}{\partial \gamma}\right|_{\gamma = \gamma_0} \Delta\gamma$$

per le variazioni relative si ha:

$$\frac{\Delta \underline{G}(s)}{\underline{G}(s)} = \frac{G(s)H(s)}{[1 + G(s)H(s)]} \frac{\Delta H(s)}{H(s)}$$

Tenendo conto di questa relazione la funzione:

$$\boxed{S_H^{\underline{G}} = \frac{G(s)\, H(s)}{1 + G(s)\, H(s)}}$$

si può definire come *funzione di sensibilità* della $\underline{G}$(s) rispetto alle variazioni di H(s);

in altre parole si può dire che questa funzione di sensibilità fornisce il legame tra le variazioni relative della funzione di trasferimento della parte in retroazione dovute alle variazioni del parametro γ e le corrispondenti variazioni relative della funzione di trasferimento del sistema in retroazione.

- nel caso a regime

$$\lim_{s \to 0} S_H^{\underline{G}} = \frac{Kh}{1 + Kh}$$

$$\lim_{s \to 0} S_G^{\underline{G}} = \frac{1}{1 + Kh}$$

⇨ si può dunque concludere che a regime la sensibilità del sistema alle variazioni dei parametri della parte in retroazione è molto maggiore della sensibilità alle variazioni dei parametri della parte in catena diretta

tanto risulta minore la sensibilità del sistema alle variazioni dei parametri della parte in retroazione tanto minore risulta l'influenza dei disturbi che si sovrappongono alla variabile di riferimento del sistema

OSSERVATORI DELLO STATO E ASSEGNAMENTO DEI POLI

INTRODUZIONE

Un sistema di controllo è composto sostanzialmente in due parti:

1) parte che compie la manipolazioni materiali

2) parte che compie le manipolazioni simboliche

Questa distinzione permette di effettuare la sintesi di un sistema di controllo in due passi:

a) dimensionamento della parte di potenza in modo che il sistema, opportunamente controllato, sia in grado di sviluppare la potenza desiderata

b) progettazione della parte che effettua le manipolazioni simboliche in modo che il sistema assuma le caratteristiche statiche e dinamiche desiderate

- un simile modo di procedere ha il vantaggio che quando si desidera cambiare le caratteristiche statiche e dinamiche del sistema basta variare i dispositivi che effettuano le manipolazioni simboliche

- il comportamento di un sistema dinamico lineare e stazionario è legato ai suoi modi che a loro volta dipendono dai poli

OSSERVATORI DELLO STATO

La sintesi dei sistemi di controllo richiede spesso la conoscenza di tutte le componenti del vettore di stato. Bisogna quindi stimare con attendibile approssimazione una stima delle componenti incognite di tale vettore.

Quindi, il procedimento di sintesi di un sistema di controllo può essere suddiviso in 2 fasi:

1) progettazione di un opportuno controllore (che controlli che il sistema soddisfi le specifiche di progetto) supponendo disponibile il vettore di stato

2) progettazione di un sistema (*osservatore*) che fornisca una stima approssimata del vettore di stato incognito

la stima voluta è la cosiddetta *stima asintotica*:

$$\lim_{t \to \infty} \bar{x}(t) = 0$$

dove $\bar{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ vettore errore di stima
n x 1

$\hat{x}(t)$ stima di un generico vettore x(t)
n x 1

x(t) generico vettore
n x 1

ASSEGNAMENTO DEI POLI

GENERALITA'

Il modo più semplice e diretto per modificare la dinamica di un sistema di controllo è quello di cambiarne la configurazione dei poli, tuttavia non vi è un'arbitrarietà assoluta nel far variare i poli.

Infatti l'assegnamento arbitrario dei poli consiste nell'effettuare un'opportuna manipolazione simbolica, non priva di conseguenze sulla parte del sistema che compie le manipolazioni materiali.

Es.
Aumentando il valore assoluto della parte reale dei poli si rende il sistema molto più pronto ma ciò richiede ovviamente che gli attuatori forniscano una potenza maggiore ma questo non è possibile senza intervenire sulla parte di potenza del sistema.

ASSEGNABILITA' DEI POLI E CONTROLLABILITA'

Si consideri un sistema dinamico lineare e stazionario

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

di questo sistema si suppone di avere a disposizione tutte le componenti del vettore di stato oppure n combinazioni linearmente indipendenti di esse.

I poli di questo sistema sono gli autovalori della matrice A, cioè le soluzioni dell'eq. caratteristica:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

scegliamo una retroazione lineare del tipo:

$$u = K x + u_0$$

dove

K matrice di dimensioni r x n
u_0 nuovo ingresso del sistema

sostituendo questa espressione nel sistema si ottiene

$$x' = (A + BK)\, x + B\, u_0$$
$$x(t_0) = x_0$$

i poli del sistema retroazionato sono le soluzioni della nuova equazione caratteristica:

$$\det[\lambda I - (A + BK)] = 0$$

il problema dell'assegnamento dei poli si riduce alla scelta di una matrice K tale che la matrice (A + BK) abbia gli autovalori voluti

TEOREMA (assegnabilità dei poli e controllabilità)

Per ogni insieme Λ è possibile determinare una matrice K tale che la matrice (A + BK) abbia Λ come insieme degli autovalori se e solo se il sistema è completamente controllabile

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

insieme di n numeri complessi λ_i tali che tutti i λ_i, per i quali $Im\{\lambda_i\}$, appaiono in coppia con i complessi coniugati

$\Rightarrow$ la controllabilità è una proprietà che permette di assegnare al sistema un insieme arbitrario di poli scegliendo opportunamente la matrice K dei guadagni di retroazione

SISTEMI AD UN INGRESSO

Si consideri un sistema completamente controllabile e ad un solo ingresso (r = 1) del tipo:

$\dot{x} = A\,x + b\,u$

si vuole progettare una legge di retroazione tale che il sistema in catena chiusa abbia come poli l'insieme Λ:

$u = k^T x$

dove
k   vettore di dimensioni n x 1

- se il sistema è controllabile esiste certamente una trasformazione T (n x n) della base dello spazio degli stati tale che nella nuova base il sistema assuma la forma

  $\dot{\hat{x}} = \hat{A}\,\hat{x} + \hat{b}\,u$

  $\hat{x}(t_0) = 0$

dove

$$\hat{A} = T^{-1} A\, T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & 0 \\ 0 & . & ..\,0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{vmatrix} \qquad \hat{b} = T^{-1} b = \begin{vmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

e $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono i coefficienti dell'equazione caratteristica

$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - \hat{A}) = \lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda + a_1$

se si indica con

$\hat{k}^T = |\ \hat{k}_1 \quad \hat{k}_2 \quad \dots \quad \hat{k}_n\ |$

il vettore costituito dai guadagni di retroazione si ottiene

$$\hat{A} + \hat{b}\,\hat{k}^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & 0 \\ 0 & . & ..\,0 & 1 \\ -a_1+k_1 & -a_2+k_2 & \dots & -a_n+k_n \end{vmatrix}$$

l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$\det [\lambda I - (\hat{A} + \hat{b}\,\hat{k}^T)] = \lambda^n + (a_n - \hat{k}_n)\lambda^{n-1} + ... + (a_2 - \hat{k}_2)\lambda + (a_1 - \hat{k}_1)$$

se si vuole che il sistema in catena chiusa abbia Λ come insieme di poli il polinomio caratteristico dovrà essere

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + \alpha_n\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_2\lambda + \alpha_1$$

dove $\alpha_i = - a_i + \hat{k}_i$

e quindi

$$\hat{k}_i = a_1 - \alpha_i$$

la trasformazione $k^T = \hat{k}^T T^{-1}$ determina poi il vettore k che assegna al sistema i poli desiderati

- si può dimostrare che nei sistemi SISO la retroazione degli stati non influenza in alcun modo la posizione degli zeri del sistema

un procedimento alternativo per assegnare i poli è la formula di Ackermann, dove

$$k^T = - |\, 0 \ldots 0 \quad 1 \,|\, P^{-1}\, \alpha(A)$$

dove

P matrice di controllabilità

$\alpha(A)$ $= A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_n I$

coefficienti del polinomio caratteristico desiderato e relative a potenze decrescenti dell'incognita

ASSEGNAMENTO DEI POLI PER SISTEMI SISO

Per effettuare l'assegnamento dei poli per sistemi SISO esistono anche altri metodi che presentano caratteristiche di semplicità che li rendono di applicazione più facile.

Si tratta di metodi basati sull'introduzione di sistemi dinamici o anche algebrici (*regolatori*) nella catena diretta o in retroazione o su entrambe. Essi forniscono una funzione di ingresso della parte che effettua le manipolazioni materiali tale che essa abbia il comportamento desiderato.

La differenza principale tra l'assegnamento dei poli realizzato utilizzando gli osservatori asintotici e l'assegnamento realizzato con i regolatori è che in quest'ultimo caso non si può operare la sintesi del sistema indipendentemente da quella dell'osservatore.

IL LUOGO DELLE RADICI

Il teorema visto in precedenza pur assicurando l'assegnabilità di alcuni poli di un sistema in retroazione non fornisce alcuna indicazione sui rimanenti poli, che potrebbero pregiudicare la stabilità del sistema.

Nel caso particolare di un sistema di controllo di tipo SISO esiste una procedura, detta *luogo delle radici*

per mezzo di essa è possibile ottenere in modo qualitativo la rappresentazione grafica dei valori che possono assumere tutti i poli del sistema in retroazione al variare di un parametro della sua funzione di trasferimento di anello
(normalmente la costante di guadagno di anello K_h)

la variazione della costante di guadagno di anello viene realizzata variando il guadagno K di un preamplificatore appositamente predisposto in catena diretta o sulla retroazione.

Il luogo delle radici serve per:

1) verificare se con una variazione della costante di guadagno d'anello (grandezza già fissata in base all'errore a regime voluto) è possibile ottenere una variazione della posizione dei poli per migliorare ulteriormente il comportamento dinamico

2) effettuare la sintesi di un sistema mediante la determinazione del valore di K_h che assegna la configurazione di poli più vicino possibile a quella desiderata

TRACCIAMENTO DEL LUOGO DELLE RADICI

Si consideri un sistema in retroazione di tipo SISO e la sua funzione di trasferimento

$$\overline{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

quindi la sua equazione caratteristica risulta

$$1 + G(s)\,H(s) = 0$$

il luogo delle radici è rappresentato dalla curva che al variare della costante di guadagno di anello K_h fornisce sul piano complesso s le radici dell'equazione caratteristica.

Il campo di variazione di K_h è assunto in modo da non modificare il tipo di retroazione (negativa o positiva) già presente nel sistema di controllo dato.

$K_h \in [0, \infty[$

Per ricavare le regole per il tracciamento qualitativo del luogo conviene scrivere la funzione di trasferimento d'anello nella forma fattorizzata:

$$G(s)H(s) = \overline{K}\,\frac{(s - z_1)(s - z_2)\ \dots\ (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ \dots\ (s - p_n)} \qquad n \geq m$$

$$\overline{K} = K_h\,(-1)^{m+k}\,\frac{p_1 p_2 \ldots p_k}{z_1 z_2 \ldots z_m}$$

i poli $p_1, p_2, \dots, p_k$ sono tutti quelli non nulli

ponendo

$$G^*(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)\ \dots\ (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ \dots\ (s - p_n)} \qquad n \geq m$$

l'equazione caratteristica può essere scritta nella forma

$$1 + \overline{K}\,G^*(s) = 0$$

- se $\overline{K}$ è positiva, l'eq. caratteristica equivale alle due eq.:

  $| G^*(s) | = 1/\overline{K}$ $\qquad$ $\arg G^*(s) = (2v + 1)\,\pi$ $\qquad$ $v = 0, 1, 2, \dots$

- se K è negativa, l'eq. caratteristica equivale alle due eq.:

  $| G^*(s) | = -1/\overline{K}$ $\qquad$ $\arg G^*(s) = 2\,v\,\pi$ $\qquad$ $v = 0, 1, 2, \dots$

la seconda delle equazioni sopra viste è sufficiente per la costruzione del luogo mentre la prima serve per la graduazione del luogo stesso in funzione di K o di K_h

- il modulo di $G^*(s)$ si può ottenere come rapporto tra il prodotto dei moduli dei termini a numeratore e il prodotto dei moduli dei termini a denominatore

- la fase di $G^*(s)$ si può ottenere come somma algebrica delle fasi (assunte con segno positivo) degli stessi termini a numeratore e delle fasi (assunte con segno negativo) degli stessi termini a denominatore

data

$$G^*(s) = \frac{(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)}$$

a) un punto s fa parte del luogo delle radici se e solo se vale la relazione:

$$\upsilon_1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = (2v + 1)\pi$$

$\upsilon_1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sono le fasi dei vettori che rappresentano le differenze che compaiono nell'eq.

b) il valore di $\overline{K}$ in corrispondenza del quale il punto s appartiene al luogo è dato da

$$\frac{r_1}{\rho_1\ \rho_2\ \rho_3\ \rho_4} = 1 / \overline{K}$$

r_1, ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 sono le distanze tra s e gli zeri e i poli, ossia i moduli dei vettori che rappresentano le distanze nella formula di partenza

PROPRIETA' DEL LUOGO DELLE RADICI

1) il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli della funzione di trasferimento di anello; questi rami si intersecano in corrispondenza delle radici multiple. Ognuno degli n rami parte da un polo: m di loro terminano ciascuno in uno degli zeri mentre i rimanenti n-m terminano ciascuno in un punto all'infinito

2) il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale

3) se la costante $\overline{K}$ è positiva, un punto sull'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di poli e di zeri. Se la costante K è negativa, un punto sull'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale pari di zeri e poli

4) gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\boxed{\sigma_a = \frac{\sum^{n} p_i - \sum^{n} z_i}{n - m}}$$

$$\frac{\text{differenza fra somma di poli e somma di zeri}}{\text{differenza fra numero di poli e di zeri}}$$

se la costante k è positiva gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\boxed{\upsilon_{a,v} = \frac{(2v + 1)\cdot\Pi}{n - m} \qquad v = 0, 1, \ldots, (n - m - 1)}$$

se la costante k è negativa gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\boxed{\upsilon_{a,v} = \frac{2v\cdot\Pi}{n - m} \qquad v = 0, 1, \ldots, (n - m - 1)}$$

5) una radice multipla di ordine h corrisponde ad un punto comune ad h rami del luogo delle radici (punto di diramazione) in cui si annullano le relazioni che esprimono l'annullarsi delle derivate della funzione di trasferimento di anello fino all'ordine di derivazione (h-1).

Nel caso di radici doppie (h=2) la relazione che esprime l'annullarsi della derivata prima della funzione di trasferimento di anello coincide con l'equazione:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - p_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s - z_i}}$$

6) in corrispondenza di una radice multipla di ordine h, il luogo presenta h rami entranti e h rami uscenti alternati tra loro e aventi tangenti che formano tra loro angoli pari a π/h

7) se la costante $\bar{K}$ è positiva l'angolo secondo il quale il luogo parte da un polo p_i è dato da:

$$\varphi_i = (2v + 1)\pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \in J} \arg(p_i - p_j)$$

$J = \{1, 2, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, n\}$

L'angolo secondo il quale il luogo tende a uno zero z_i è:

$$\varphi_i = (2v + 1)\pi + \sum_{j=1}^{n} \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \in J'} \arg(z_i - z_j)$$

$J' = \{1, 2, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, m\}$

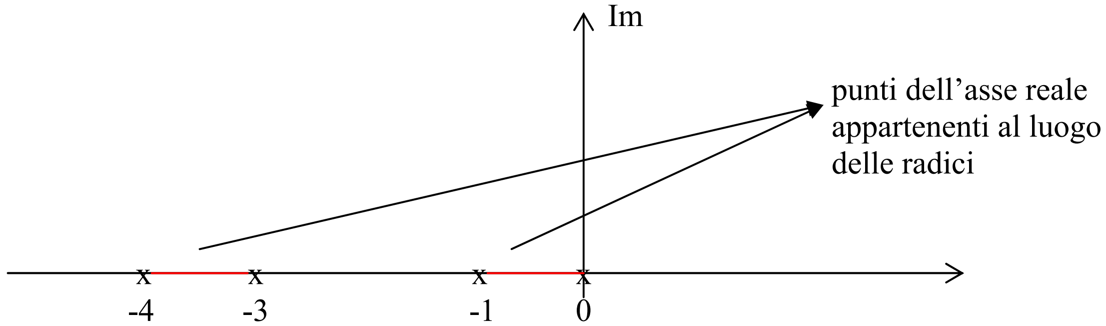
(se $\bar{K}$ è negativa, basta sostituire $2v\pi$ a $(2v + 1)\pi$)

• ESEMPIO

funzione di anello $\dfrac{k}{s\cdot(s+1)\cdot(s+3)\cdot(s+4)}$ $k > 0$

- non ci sono zeri
- calcolo poli: $\left.\begin{array}{l} s = 0 \\ s = -1 \\ s = -3 \\ s = -4 \end{array}\right\}$ tutti reali

- riporto zeri [o] e poli [x] nel piano di Gauss:



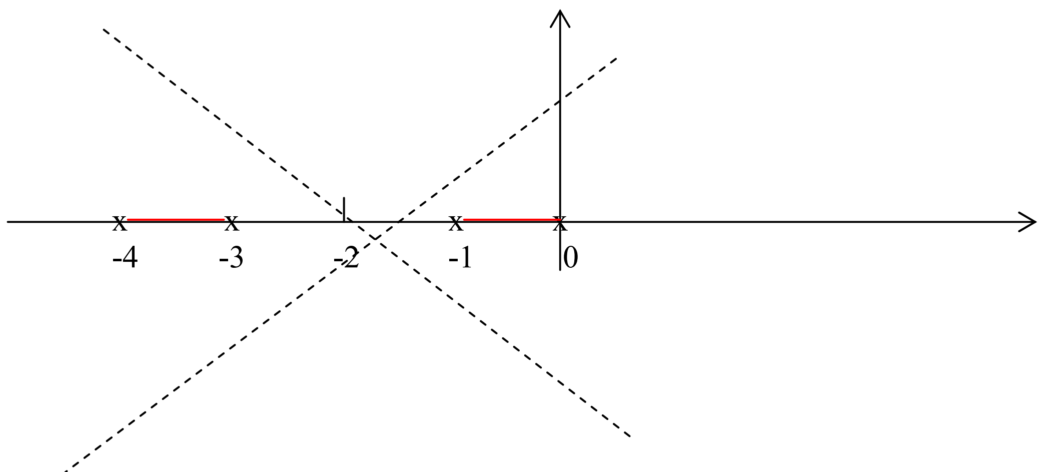
- calcolo i punti dell'asse reale da cui partono gli asintoti (ascissa centro stella):

$$\sigma_a = \frac{0 - 1 - 3 - 4}{4} = -2$$

- calcolo il numero degli asintoti e gli angoli che questi formano con l'asse reale

$v = 0, 1, 2, 3$

$\theta_{a,\,0} = \Pi/4 = 45°$
$\theta_{a,\,1} = 3/4\Pi = 135°$
$\theta_{a,\,2} = 5/4\Pi = 225°$
$\theta_{a,\,3} = 7/4\Pi = 315°$

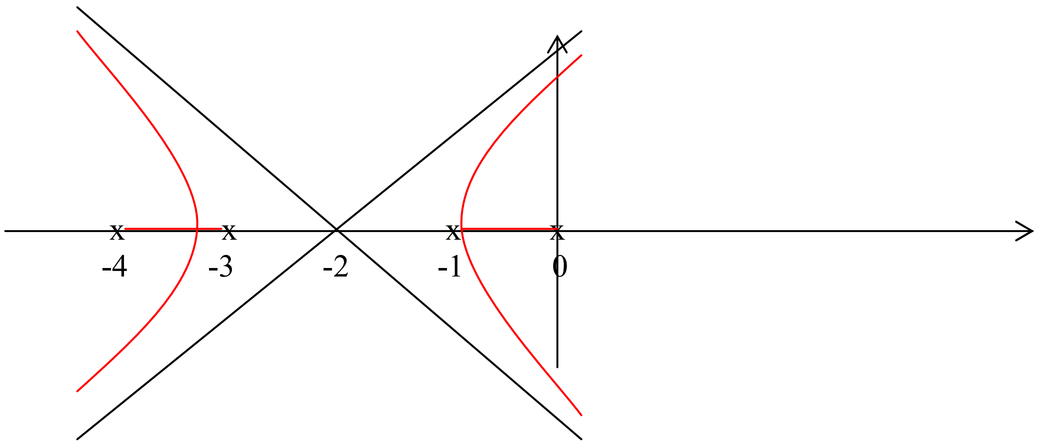


- calcolo l'ascissa del punto di biforcazione

$(1/\sigma_b) + (1/\sigma_b+1) + (1/\sigma_b+3) + (1/\sigma_b+4) = 0$
$(\sigma_b+1)\cdot(\sigma_b+3)\cdot(\sigma_b+4) + (\sigma_b)\cdot(\sigma_b+3)\cdot(\sigma_b+4) + (\sigma_b)\cdot(\sigma_b+1)\cdot(\sigma_b+4) + (\sigma_b)\cdot(\sigma_b+1)\cdot(\sigma_b+4) = 0$
$2\sigma^3 + 12\sigma^2 + 19\sigma + 6 = 0$
$(\sigma+2)(2\sigma^2+8\sigma+3) = 0$

$\sigma_1 = -2 \longrightarrow$ non accettabile perché non appartiene al luogo

$\left.\begin{array}{l}\sigma_2 = -3{,}58\\ \sigma_3 = -0{,}42\end{array}\right\} \longrightarrow$ accettabili perché appartengono al luogo



- devo determinare i valori di k che rappresentano il confine tra stabilità e instabilità (punti di intersezione con l'asse immaginario)

eq. caratteristica $\dfrac{k}{s \cdot (s+1) \cdot (s+3) \cdot (s+4)}$ $k > 0$

$s^4 + 8s^3 + 19s^2 + 12s + k = 0$

4	1	19	k
3	8	12	0
2	35/2	k	
1	(420-16k)/35		
0	k		

il valore di k che annulla questa espressione è il valore critico

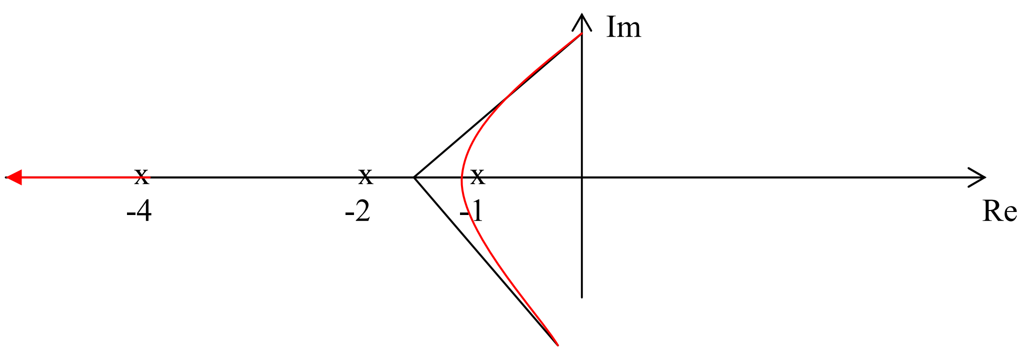
$(420 - 16k)/35 = 0$ $k = 420/16 = 26,25$

UTILIZZO LUOGO DELLE RADICI

Il luogo delle radici è un grafico i cui punti coincidono con le posizioni dei poli della funzione di trasferimento complessiva al variare di k

- la funzione del luogo delle radici è assegnare una specifica, oppure può avere una funzione di verifica nella fase finale del processo di sintesi

ESEMPIO
supponiamo di avere un luogo delle radici del tipo:



$$G(s) = \frac{k \cdot (s + z_1)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2)}$$

$$\overline{K} = \frac{k \cdot z_1}{p_1 + p_2}$$ k costante moltiplicativa (pos o neg)

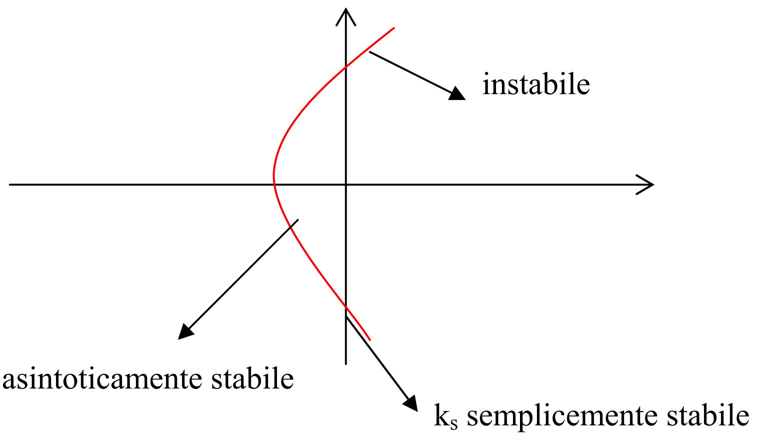
$$G(s) = \frac{k \cdot z_1}{(p_1 + p_2)} \quad \frac{k \cdot (s + z_1)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2)}$$

- sistema a poli prevalenti
  (un sistema si dice a poli prevalenti quando ci sono dei poli che non influenzano la risposta)

  il polo di sinistra si mantiene reale e si smorza rapidamente
  siccome a noi interessano valori grandi di k consideriamo solamente i due poli di destra
  (sistema del II ordine con poli prima reali e poi complessi coniugati)

- supponiamo di avere una specifica sugli errori a regime che ci ha portato a calcolarci un certo k_e

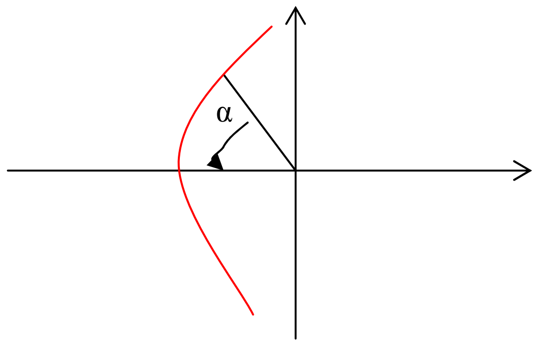
  controllo se k_e è possibile



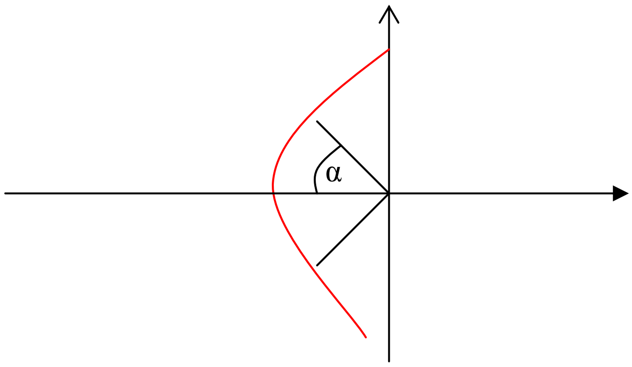
$0 < k < k_s$ stabilità garantita
$$\begin{cases} \text{se } k_e < k_s \text{ accettabile} \\ \text{se } k_e > k_s \text{ devo comunque prendere } k < k_s \end{cases}$$

- supponiamo di avere anche una specifica sulla sovraelongazione
  voglio che la massima elongazione percentuale sia circa del 5%

  l'elongazione è legata a δ
  $\delta = \cos \alpha$



fissata la percentuale di max sovraelongazione voluta, trovo δ corrispondente e quindi l'angolo necessario, infine calcolo il polo corrispondente a tale angolo

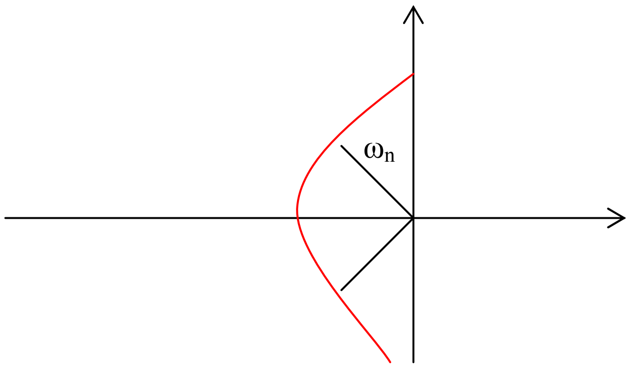


fissato il Φ voluto, trovo il segmento che sottende tale angolo e quindi il polo corrispondente

risolvo l'eq. caratteristica in corrispondenza dei due poli trovati (ponendo s uguale ai poli)
l'eq. caratteristica diventa un'eq. in k che risolta mi dà il valore di k desiderato k_{sov}

- suppongo di avere anche una specifica sulla prontezza, volendo fissare un tempo di salita t_s
  mi calcolo ω_n voluto

mi metto nell'origine e trovo il segmento di lunghezza ω_n che congiunge l'origine con il luogo



calcolo i due poli corrispondenti, li inserisco nell'eq. caratteristica e trovo k_{TS} che garantisce il tempo di salita desiderato

- se k_e, k_{TS}, k_{SOV} sono simili, scelgo un valore intermedio che soddisfi abbastanza bene tutte e tre le specifiche
- se k_e, k_{TS}, k_{SOV} sono abbastanza diversi scelgo se soddisfare pienamente una o due specifiche o trovare un valore di compromesso per tutte e tre

OSSERVAZIONI SUL LUOGO DELLE RADICI

a) poiché i punti di intersezione del luogo delle radici con l'asse immaginario corrispondono al limite di stabilità del sistema in retroazione per la loro determinazione si può impiegare il criterio di Routh il quale fornisce il valore di K corrispondente al limite di stabilità. Successivamente risolvendo l'equazione ausiliaria per questo valore di $\overline{K}$, si ottengono i valori della pulsazione in corrispondenza dei quali avviene l'intersezione.

b) i punti di diramazione del luogo delle radici sull'asse reale (punti di emergenza) si ottengono determinando le radici dell'equazione che esprime l'annullarsi della derivata prima della funzione di trasferimento di anello.

LA SINTESI DEI SISTEMI DINAMICI DI TIPO SISO CON CONTROLLO IN RETROAZIONE

INTRODUZIONE

Le caratteristiche dinamiche di un sistema lineare e stazionario dipendono dai modi del sistema i equazioni differenziali che ne rappresentano il modello.

- Dal punto di vista qualitativo i modi assumono caratteristiche che dipendono solo dagli autovalori e quindi dai parametri del sistema che li determinano.

- Dal punto di vista quantitativo i modi sono influenzati dai rimanenti parametri del sistema.

Nel caso di sistemi SISO gli autovalori dipendono dai poli della funzione di trasferimento mentre i rimanenti parametri sono rappresentati dagli zeri e dalla costante moltiplicativa.

Sempre nel caso di sistemi SISO si possono usare come specifiche per il comportamento in transitorio alcuni parametri caratteristici della risposta del sistema ad alcuni ingressi canonici, per esempio il gradino unitario e l'impulso di Dirac.
I parametri di questo tipo più usati sono:
- massima sovraelongazione
- tempo di salita
- tempo di assestamento
- …

Per poter risolvere il problema della sintesi è necessario determinare le relazioni esistenti tra i parametri caratteristici della risposta ad un dato ingresso canonico e i parametri del sistema stesso (ovvero i suoi poli e i suoi zeri).
Per ricavare queste relazioni occorre disporre della soluzione analitica del sistemi.

Una volta note queste relazioni si possono impiegare ancora i metodi esaminati per assegnare i poli in corrispondenza dei quali il sistema assume un comportamento coincidente o più vicino possibile a quello desiderato.

Se non è sufficiente assegnare solo i poli, si possono utilizzare i regolatori, ovvero dei sistemi dinamici inseriti in catena diretta o in retroazione per mezzo dei quali è possibile assegnare non solo alcuni dei poli ma anche alcuni degli zeri desiderati.

LEGAMI TRA I PARAMETRI DI UN SISTEMA E I PARAMETRI DELLE SUE RISPOSTE AL GRADINO UNITARIO

Il comportamento complessivo di un sistema si può caratterizzare mediante opportuni parametri delle sue risposte ad alcuni ingressi canonici come il gradino unitario e l'impulso di Dirac.

In presenza sia di modi lenti che di modi veloci, la risposta all'impulso caratterizza meglio la prima parte della risposta (che è maggiormente influenzata dai modi veloci) mentre quella al gradino caratterizza meglio la seconda parte (che è influenzata di più dai modi lenti).

ARCHETIPO DEL PRIMO ORDINE

Con la locuzione *archetipo del primo ordine* si intende un sistema SISO lineare e stazionario rappresentato da una funzione di trasferimento razionale fratta del tipo:

$$G(s) = \frac{K}{s - p}$$

trattandosi di una funzione di trasferimento razionale e fratta con un solo polo, esso non può che essere reale (se fosse complesso dovrebbe essere presente anche il suo complesso e coniugato). Quindi si può scrivere:

$$G(s) = \frac{K}{s - \sigma} = \frac{K\,\tau}{1 + \tau s}$$

dove

$\tau = 1 - 1/\sigma$ costante di tempo del sistema

⇨ è importante determinare il legame tra questo parametro e un parametro della risposta del sistema ad un gradino unitario o a un impulso di Dirac

la risposta impulsiva del sistema del primo ordine risulta:

$$y(t) = K\, e^{-t/\tau}$$

- per sistemi stabili, cioè per $\sigma < 0$, τ risulta positiva e essa è pari all'istante in corrispondenza del quale la risposta impulsiva del sistema assume, per $K = 1$, un valore pari a $1/e$ volte il valore iniziale.

  ⇩

  tanto minore è τ tanto più rapidamente tende ad annullarsi la risposta del sistema tempo di smorzamento: tempo dopo il quale la risposta del sistema scende al di sotto del 5% del valore iniziale

tempo di smorzamento = 3τ

$\Downarrow$

legame tra parametro τ del sistema e parametro della risposta

$\Rightarrow$ i risultati ottenuti valgono in generale per sistemi aventi un numero qualunque di poli reali semplici

infatti la funzione di trasferimento di un sistema SISO di questo tipo si può sempre rappresentare come somma di tante funzioni del tipo

$$G(s) = \frac{K}{s - p}$$

la sua antitrasformata risulta composta di tanti termini esponenziali del tipo:

$$y(t) = K\,e^{-t/\tau}$$

che tendono tanto più rapidamente a zero quanto più grande è il valore assoluto della parte reale dei corrispondenti poli, ovvero quanto più piccola è la relativa costante di tempo.

$\Downarrow$

I poli aventi una parte reale con valore assoluto piccolo si dicono *poli lenti* mentre gli altri si dicono *poli veloci*

- gli zeri intervengono solo ad influenzare i residui e i coefficienti dei diversi termini

ARCHETIPI DEL SECONDO ORDINE

Con la locuzione archetipo del secondo ordine ci si riferisce ad un sistema SISO lineare e stazionario il cui modello matematico è dato da una funzione di trasferimento razionale fratta del tipo:

$$G(s) = \frac{K(s - \sigma_z)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

dove

σ_z zero reale
p_1 e p_2 poli in generale complessi e coniugati

$$p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

- se si suppone che p_1 e p_2 siano complessi coniugati, allora la funzione di trasferimento può essere scritta nella forma:

$$G(s) = \frac{K' \omega_n^2 (1 + \tau s)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

dove

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

$$\delta = - \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$$

$$\tau = - 1 / \sigma_z$$

$$K' = K / (\tau \omega_n^2)$$

Quindi i parametri del sistema sono costituiti da:

- *coefficiente di smorzamento* δ
- *pulsazione naturale* ω_n
- *costante di tempo* dello zero τ

il legame tra i parametri e le parti reali ed immaginarie dei poli sono:

$\sigma = - \delta\omega_n$ $\qquad\qquad$ $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$

$\Rightarrow$

- il sistema presenta poli complessi e coniugati solo per $0 \leq \delta < 1$

- per $\delta = 1$ i poli sono reali e coincidenti

- per $\delta \geq 1$ il sistema presenta poli reali dati da

  $$p_{1,2} = \sigma_{1,2} = \omega_n(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1})$$

nei prossimi paragrafi verrà determinato il legame trai parametri delle risposte dell'archetipo ed i parametri dell'archetipo stesso per quanto riguarda il caso di sistemi con poli solo complessi e coniugati.
Infatti l'impiego di sistemi di controllo in retroazione con poli reali è assai raro.
Ciò è dovuto al fatto che si vuole che il sistema sia il più pronto possibile e presenti nella risposta al gradino una massima sovraelongazione piccola o nulla.

Se fossero presenti due poli reali la massima sovraelongazione sarebbe certamente nulla ma uno dei due poli sarebbe più veloce e l'altro più lento e ciò rallenterebbe inutilmente il sistema complessivo.

ARCHETIPO DEL SECONDO ORDINE SENZA ZERI

Tra i sistemi del secondo ordine quelli di gran lunga più diffusi sono quelli privi di zeri.
Quindi nella funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K' \omega_n^2(1 + \tau s)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

risulta che

$K' = K / \omega_n^2$
e
$\tau = 0$

e quindi si può scrivere

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

LA RISPOSTA AL GRADINO UNITARIO

Per ottenere la risposta la gradino unitario del sistema visto poc'anzi basta antitrasformare la funzione:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

nell'ipotesi che i due poli siano complessi coniugati, essa può essere riscritta come:

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} - \frac{K_2\, \omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

dove

$K_1 = 1$

$K_2 = 2\delta/\omega_n$

$T = 1 / 2\delta\omega_n$

L'antitrasformata risulta

$$y(t) = 1 - \overline{K}\, e^{-\delta \omega n\, t} \operatorname{sen}(\varphi + \omega_n t \sqrt{1 - \delta^2}\ )$$

dove

$\overline{K} = 1 / \sqrt{1 - \delta^2}$

$\varphi = \arctan (\sqrt{1 - \delta^2} / \delta)$

$\Longrightarrow$ i parametri con i quali è caratterizzata la risposta al gradino unitario sono :

- *massima sovraelongazione* S
  differenza percentuale tra il valore massimo raggiunto dall'uscita e il valore finale

- *istante di massima sovraelongazione* t_m
  istante al quale si presenta la massima sovraelongazione

- *tempo di salita* t_s
  tempo occorrente affinché l'uscita passi dal 10% al 90% del valore finale

- *tempo di ritardo* t_r
  tempo occorrente affinché l'uscita raggiunga il 50% del valore finale

- *tempo di assestamento* t_a
  tempo occorrente affinché l'uscita rimanga entro il ±5% del valore finale

in generale si dice che un sistema ha una buona prontezza quando tutti i tempi che danno la misura delle ultime tre caratteristiche risultano piccoli.

- Quanto al legame tra questi parametri e i parametri del sistema si può verificare che mentre la massima sovraelongazione dipende soltanto dal coefficiente di smorzamento, gli altri parametri dipendono anche dalla pulsazione naturale

1) per determinare il legame tra massima sovraelongazione e i parametri del sistema basta ricavare i valori del tempo per i quali risulta nulla la derivata della risposta del sistema

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\overline{K}\ e^{-\delta \omega n t}\ \omega_n \sqrt{1-\delta^2}\ \cos(\varphi + \omega_n t \sqrt{1-\delta^2}\ ) + \overline{K}\ e^{-\delta \omega n t}\ \delta\omega_n \operatorname{sen}(\varphi + \omega_n t \sqrt{1-\delta^2}\ )$$

i valori t_{extr} per i quali la risposta fornisce dei valori di estremo (cioè di massimo o di minimo) sono quelli per i quali la derivata si annulla

$$-\sqrt{1-\delta^2}\ \cos(\varphi + \omega_n t_{extr} \sqrt{1-\delta^2}\ ) + \delta \operatorname{sen}(\varphi + \omega_n t_{extr} \sqrt{1-\delta^2}\ ) = 0$$

$$t_{extr} = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$$

per n = 1, si ottiene il tempo in cui si ha il primo massimo e quindi la massima sovraelongazione

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$$

il valore dell'uscita in corrispondenza del primo massimo è

$$y(t_m) = 1 + \exp(-\pi\delta / \sqrt{1-\delta^2}\ )$$

poichè per definizione la massima sovraelongazione è data da

$S = 100(y(t_m) – 1)$

Si ottiene

$S = 100 \exp(- \pi\delta / \sqrt{1 – \delta^2})$

La massima sovraelongazione dipende solo dal coefficiente di smorzamento
$S = 100\%$ $\quad \delta = 0$
$S = 0\%$ $\quad \delta = 1$

2) il tempo di assestamento, assumendo $\delta = 0,5$, è dato da

$t_a = 3 / \delta\omega_n$

3) il tempo di salita per definizione è dato da

$t_s = t_{90} - t_{10}$

data la complessità si può risolvere solo numericamente

una relazione analitica approssimata è data da
$\omega_n t_s = 1,8 / (1,5 – \delta)$

la risposta al gradino unitario di sistemi di ordine qualunque è approssimabile con quella di un sistema del secondo ordine soltanto nel caso in cui gli eventuali poli reali abbiano valori inferiori alle parti reali dei poli complessi e coniugati

ARCHETIPO DEL SECONDO ORDINE CON UNO ZERO

Assai spesso la sintesi di un sistema di controllo viene effettuata introducendo un regolatore con effetto derivativo il che ha l'effetto di aggiungere uno zero al sistema complessivo.

Gli zeri influiscono soltanto i residui, cioè i coefficienti dei modi della risposta di un sistema; quest'influenza dipende fortemente dalla posizione degli zeri stessi rispetto ai poli.

LA RIPOSTA AL GRADINO UNITARIO

Per ottenere la riposta al gradino unitario dell'archetipo

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(1 + s/z\delta\omega_n)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

basta antitrasformare la funzione

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2(1 + s/z\delta\omega_n)}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

oppure mettendola in fratti semplici

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} - \frac{K_2\, \omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

con opportuni valori di K_1, K_2, T

l'antitrasformata è data dalla

$$y(t) = 1 - \bar{K}\, e^{-\delta \omega_n t} \,\mathrm{sen}(\varphi + \omega_n t \sqrt{1 - \delta^2}\,)$$

con opportuni valori di $\bar{K}$ e φ.

I parametri della risposta al gradino unitario possono essere definiti in modo analogo al caso di un archetipo del secondo ordine senza zeri.

- se $z \leq 4$ la presenza dello zero ha una notevole influenza sia sulla massima sovraelongazione (che aumenta) sia sul tempo di salita (che diminuisce) mentre non ne ha quasi alcuna sul tempo di assestamento.

- un aumento (diminuzione) di δ provoca sia una diminuzione (aumento) della massima sovraelongazione e del tempo di assestamento, sia un aumento (diminuzione) del tempo di salita.

- la massima sovraelongazione non dipende da ω_n ma esistono diverse coppie di valori di δ e z alle quali corrisponde la stessa massima sovraelongazione.

  Ciò che differenzia le diverse coppie di δ e z è il tempo di risalita; in particolare il tempo di salita diminuisce al diminuire di z e al crescere di δ

- l'ordine di grandezza del tempo di salita è determinato fondamentalmente dalla pulsazione naturale mentre i coefficienti δ e z causano variazioni più modeste.

- la presenza di uno zero nel sistema del secondo ordine fa sì che a parità di massima sovraelongazione si possano avere diversi valori dei tempi di salita e di assestamento a seconda dei valori di δ e z

ARCHETIPI DEL TERZO ORDINE

Analogamente a quanto di è detto per i sistemi del secondo ordine, anche i sistemi del terzo ordine sono assai frequentemente privi di zeri mentre un eventuale zero è dovuto alla presenza di un regolatore con effetto derivativo.

ARCHETIPO DEL TERZO ORDINE SENZA ZERI E LA RISPOSTA AL GRADINO UNITARIO

Si consideri un archetipo del terzo ordine avente la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(1 + s/p\delta\omega_n)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

lo sviluppo in fratti semplici della trasformata della risposta al gradino unitario si può scrivere come:

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} - \frac{K_2}{s + p\delta\omega_n} - \frac{K_3\omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

con opportuni valori di K_1, K_2, K_3 e T

l'antitrasformata risulta uguale a

$$y(t) = 1 - K_2\, e^{-p\,\delta\,\omega n\, t} - \overline{K}\, e^{-\,\delta\,\omega n\, t} \operatorname{sen}\left(\varphi + \omega_n t\sqrt{1 - \delta^2}\right)$$

con opportuni valori di $\overline{K}$ e φ

- la risposta al gradino unitario è composta di tre modi:
  - il primo modo è di tipo costante con coefficiente unitario
  - il secondo di tipo esponenziale smorzato con esponente proporzionale a quello del terzo modo secondo la costante p
  - il terzo di tipo oscillatorio smorzato

  $\Downarrow$

  2 casi:

  1) se p >> 1 il modo di tipo esponenziale si estingue molto più rapidamente di quello oscillatorio e quindi il suo effetto sul transitorio risulta trascurabile

  2) se p è dell'ordine di qualche unità si ha una diminuzione modesta del tempo di salita mentre la massima sovraelongazione aumenta se δ è piccolo o diminuisce se δ è grande

     se p è dell'ordine di un'unità o inferiore i tempi di salita risultano molto alti e la massima sovraelongazione risulta sempre nulla.

SINTESI MEDIANTE L'ASSEGNAMENTO E/O L'AGGIUNTA ED IL CANCELLAMENTO DI POLI E ZERI

Una volta assegnati i parametri che si desidera vadano a caratterizzare la risposta del sistema è facile risalire ai parametri e ai poli e agli zeri da assegnare al sistema stesso affinché esso assuma il comportamento desiderato.

Nel caso in cui è sufficiente assegnare un opportuno insieme di poli senza che si debbano variare gli zeri basta utilizzare un'opportuna retroazione algebrica degli stati (o una loro stima ottenuta tramite un osservatore).

Quando è richiesta anche la variazione e/o l'aggiunta di zeri un modo per effettuare la sintesi è quello di utilizzare i cosiddetti regolatori, cioè di inserire opportuni sistemi dinamici o algebrici nella catena diretta o in quella in retroazione del sistema.

SINTESI MEDIANTE RETROAZIONE ALGEBRICA DEGLI STATI

La sintesi di un sistema mediante retroazione algebrica degli stati si effettua quando per ottenere il comportamento desiderato è sufficiente variare soltanto i poli senza aggiungerne altri e senza aggiungere e/o variare gli zeri.

Solo nel caso dei sistemi SISO la retroazione algebrica che assegna un dato insieme di poli è unica ed è tale da non modificare gli zeri del sistema.

- Il metodo più ovvio per determinare i poli da assegnare nel caso di sistemi di ordine elevato è quello di scegliere come poli quelli di un sistema simile a quello da progettare ed il cui comportamento sia giudicato soddisfacente.

- Un altro metodo molto più preciso è quello che si applica ai cosiddetti sistemi a poli prevalenti e cioè a quei sistemi la cui uscita è influenzata in maniera rilevante soltanto da alcuni dei poli del sistema stesso in quanto nel modello di questi sistemi sono presenti alcune costanti di tempo elevate insieme ad altre assai piccole oppure esistono coppie di poli e zeri che tendono a cancellarsi.

SINTESI MEDIANTE REGOLATORI

La sintesi mediante regolatori di un sistema con controllo in retroazione di tipo SISO comporta l'inserimento di un sistema dinamico o anche semplicemente algebrico (il regolatore) in un qualche punto dell'anello di controllo.

Se il regolatore è dinamico, esso svolge le funzioni di un osservatore e il suo inserimento provoca la variazione d tutti i poli del sistema risultate e on di una sola parte di essi.

<u>I diversi tipi di regolatori</u>:

1) i *regolatori standard*
   la loro uscita risulta proporzionale all'ingresso oppure alla derivata o all'integrale di quest'ultimo oppure ancora ad una combinazione lineare di queste funzioni

2) i regolatori che effettuano la *cancellazione* di alcuni poli del sistema e la loro sostituzione con altri poli

3) le reti correttrici
sono costituite da sistemi dinamici di tipo anche molto generale e sono indicate con questo nome perché le loro prime realizzazioni furono effettuate per mezzo di opportune reti elettriche

<u>Progettazione</u>

- Quanto alle modalità di progetto dei regolatori standard e delle reti correttrici si può dire che se il sistema rientra nella classe dei sistemi per i quali è possibile determinare il legame tra i parametri del sistema ed i parametri delle risposte, la determinazione dei parametri che compaiono nel regolatore si può effettuare analiticamente imponendo che i parametri del sistema complessivo siano tali da fornire il comportamento voluto.

- Diversamente si deve passare a metodi di progetto diversi.

<u>Posizionamento</u>

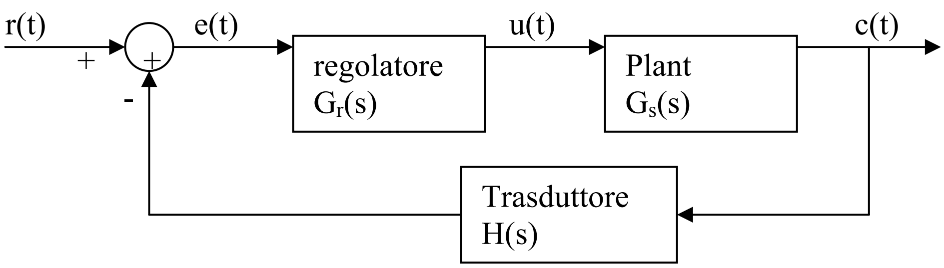
- Sia i regolatori standard che le reti correttrici sono disposti nella catena diretta oppure in quella di retroazione o in parte nell'una e in parte nell'altra.

- i regolatori che permettono la cancellazione dei poli e degli zeri essi vengono disposti in catena diretta e realizzati in modo tale che i poli che sostituiscono quelli cancellati siano tali da imporre al sistema complessivo il comportamento desiderato.

$\Rightarrow$ Il numero di specifiche che si possono soddisfare esattamente è pari o inferiore al numero dei parametri del regolatore

REGOLATORI STANDARD IN CATENA DIRETTA: SINTESI ANALITICA

Sistemi con controllo in retroazione in cui il regolatore è disposto in catena diretta



Il sistema complessivo ha una funzione di trasferimento:

$$\bar{G}(s) = \frac{G_r(s)G_s(s)}{1 + H(s)G_r(s)G_s(s)}$$

il regolatore può essere:

- proporzionale
- proporzionale – derivativo
- proporzionale – integrale
- proporzionale – integrale – derivativo

• nel caso in cui il sistema sopra scritto risulti di ordine non superiore al terzo e con non più di uno zero la sintesi del regolatore può essere eseguita analiticamente utilizzando il seguente procedimento:

1) si sceglie il regolatore standard

2) si determinano le equazioni risolventi, cioè le equazioni che si ottengono paragonando la funzione di trasferimento del sistema complessivo ed il corrispondente archetipo

3) si risolvono le equazioni risolventi

   indichiamo come ennuple ammissibili le ennuple di valori accettabili dei parametri del sistema in corrispondenza dei quali esistono valori accettabili dei parametri del regolatore e tali da soddisfare le equazioni risolventi

4) si determina fra le ennuple ammissibili ricavate al punto precedente quella che soddisfa o approssima al meglio le specifiche desiderate

In seguito verrà fatta l'ipotesi che la funzione di trasferimento $G_s(s)$ del plant non solo sia senza zeri ma presenti soltanto poli reali

REGOLATORI DI TIPO P (PROPORZIONALE)

Si chiamano *proporzionali* quei regolatori che effettuano la moltiplicazione (per una data costante) della variabile di ingresso alla parte che opera le manipolazioni materiali.

Si ha quindi un regolatore proporzionale se vale:

$u = K_p\, e$

dove

K_p costante detta *sensibilità proporzionale*

Conseguentemente la funzione di trasferimento del regolatore risulta:

$G_r(s) = K_p$

- se $K_p > 1$

  l'introduzione di questo regolatore comporta:
  - un aumento della costante di guadagno del sistema complessivo
  - un aumento della pulsazione naturale e della prontezza del sistema
  - una riduzione degli errori dovuti ai disturbi e alle variazioni dei parametri dei componenti nella catena diretta
  - una riduzione degli errori a regime

  però
  - aumento dell'instabilità a meno che la funzione di trasferimento di anello del sistema stesso non sia caratterizzata da una coppia di poli complessi coniugati prevalenti ovvero da un solo polo prevalente

REGOLATORI DI TIPO D (DERIVATIVO) E DI TIPO PD (PROPORZIONALE – DERIVATIVO)

Si ha un *regolatore derivativo* se vale

$$u = K_p T_d \dot{e}$$

dove

T_d *costante di tempo derivativa*
K_p *sensibilità proporzionale*

conseguentemente la funzione di trasferimento:

$$G_r(s) = K_p T_d s$$

- questo tipo di regolatore difficilmente può essere usato da solo perchè in regime statico l'uscita del regolatore risulterebbe nulla, l'anello di retroazione risulterebbe interrotto e il sistema non sarebbe più controllato

⮡ per questo motivo si usa il *regolatore proporzionale – derivativo* la cui funzione di trasferimento è:

$$G_r(s) = K_p (1 + T_d s)$$

I regolatori con le due funzioni di trasferimento viste non corrispondono a sistemi fisicamente realizzabili in quanto le loro funzioni di trasferimento hanno il grado del numeratore superiore a quello del denominatore

REGOLATORI DI TIPO I (INTEGRALE) E DI TIPO PI (PROPORZIONALE – INTEGRALE)

Si ha un regolatore integrale se vale:

$$u = \frac{K_p}{T_i} \int_{to}^{t} e(t)\, dt$$

dove

T_i *costante di tempo integrale*

$T_i = t - t_0$
ossia l'intervallo di tempo che impiega l'uscita dell'integratore per raggiungere il valore K_p quando l'ingresso è unitario

la funzione di trasferimento risulta:

$G_r(s) = K_p/T_is$

- L'introduzione di un regolatore di tipo integrale produce:

  - una variazione del tipo di sistema
  - riduzione o eliminazione degli errori a regime

- L'introduzione di un polo nell'origine nella funzione di trasferimento in catena diretta comporta:

  - diminuzione della pulsazione naturale
  - riduzione della prontezza

L'eliminazione degli errori a regime è dovuta al fatto che l'uscita dell'integratore dipende fondamentalmente dai valori passati di e piuttosto che dal suo valore corrente

$\Downarrow$

I disturbi che agiscono sul sistema possono essere contrastati anche se l'errore è nullo dato che ciò non impedisce che l'uscita del regolatore sia diversa da zero

Questo vantaggio è controbilanciato da una minore prontezza della risposta

Nei casi in cui sia necessario cambiare il tipo di sistema ma non si voglia diminuire la sua prontezza si può usare un *regolatore proporzionale – integrale*:

$$G_r(s) = \frac{K_p}{T_i\, s}(1 + T_i\, s)$$

REGOLATORE DI TIPO PID (PROPORZIONALE – INTEGRALE – DERIVATIVO)

Un *regolatore proporzionale – integrale – derivativo* si ottiene se:

$$u = K_p\left(e + T_d\,\dot{e} + 1/T_i \int_{to}^{t} e\ dt\right)$$

la funzione di trasferimento risulta:

$$G_r(s) = \frac{K_p}{T_i s} (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)$$

- questo tipo di regolatore non è fisicamente realizzabile in quanto si tratta di una funzione di trasferimento avente il numeratore di grado superiore al denominatore

- un regolatelo PID viene introdotto quando si desidera cambiare il tipo di sistema e rendere il sistema più pronto

REGOLATORI STANDARD IN CATENA DIRETTA: SINTESI PER TENTATIVI MEDIANTE MODELLI APPROSSIMATI

Se la funzione di trasferimento del sistema complessivo presenta più di uno zero e/o è di ordine superiore al terzo i metodi analitici presentati non sono più utilizzabili almeno direttamente.

Tuttavia esistono due altri modi alternativi:

1) metodo di Ziegler e Nichols
in questo metodo i valori dei parametri da cui si parte per il procedimento iterativo sono forniti da formule empiriche basate su modelli approssimati del plant particolarmente semplici

2) nel secondo metodo i parametri di partenza sono quelli ottenuti impiegando un modello approssimato del sistema in esame sufficientemente semplice da permettere l'applicazione per la sintesi del regolatore dei metodi analitici

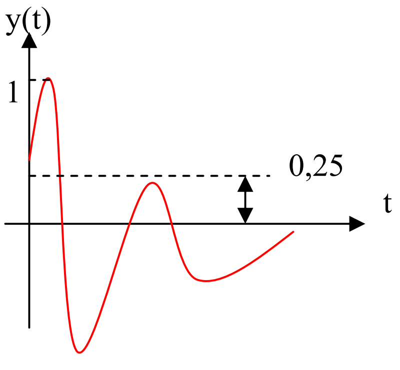
una volta calcolato il regolatore, esso va applicato al modello completo del sistema complessivo e si variano i parametri del regolatore fino a ottenere il comportamento desiderato per il sistema stesso.

LE REGOLE DI ZIEGLER E NICHOLS

Ziegler e Nichols proposero due metodi per determinare i parametri dei regolatori P, PI, PID.

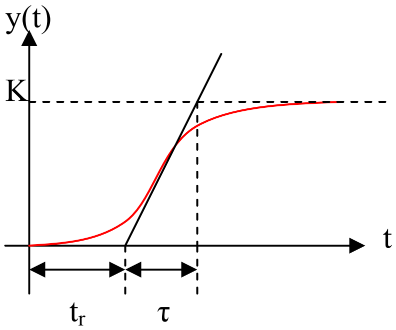
<u>Hp di entrambi i metodi</u>:

l'azione del regolatore sia tale che la risposta impulsiva del sistema presenti un'oscillazione il cui massimo si riduca del 75% dopo il primo periodo ovvero una sovraelongazione massima del 25% in risposta al gradino unitario.



PRIMO METODO

Questo metodo deriva dall'osservazione che la risposta del plant al gradino unitario ha un andamento del tipo



questo andamento si può approssimare con quello della risposta di un sistema avente una funzione di trasferimento del tipo:

$$G(s) = \frac{K\, e^{-t_r s}}{1 + \tau s}$$

cioè una funzione di trasferimento del primo ordine in cui è presente un ritardo finito di t_r secondi

- il plant in questione non deve comprendere né poli nell'origine né coppie di poli dominanti complessi e coniugati

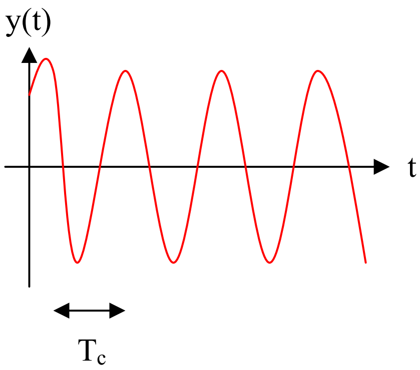
- il valore del guadagno statico K coincide con il valore della risposta per $t \rightarrow \infty$
- i valori del ritardo t_r e della costante di tempo τ si ottengono tracciando una tangente nel punto di flesso della curva stessa

Tipo di regolatore	Parametri di Ziegler e Nichols	Parametri di Choen e Coon
P	$K_p = \frac{\tau}{K t_r}$	$K_p = \frac{\tau}{K t_r} + \frac{1}{3K}$
PI	$K_p = \frac{0{,}9\,\tau}{K t_r}$ $T_i = t_r/0{,}3$	$K_p = \frac{0{,}9\tau}{K t_r} + \frac{1}{12\,K}$ $T_i = \frac{t_r}{0{,}3}$
PD		$K_p = \frac{1{,}25\tau}{K t_r} + \frac{1}{6K}$ $T_d = t_r \frac{[6\tau - 2t_r]}{[22\tau + 3t_r]}$

PID	$K_p = \frac{1,25\tau}{Kt_r}$ $T_i = 2t_r$ $T_d = 0,5\ t_r$	$K_p = \frac{1,25\tau}{Kt_r} + \frac{1}{4K}$ $T_i = 2t_r + t_r \frac{[6\tau - 10t_r]}{13\tau + 8t_r}$ $T_d = 0,5t_r - t_r \frac{[3\tau + 2t_r]}{22\tau + 4t_r}$

SECONDO METODO

Il secondo metodo prevede che i parametri siano determinati non già utilizzando la risposta ad un gradino del plant ma considerando un sistema di controllo in retroazione con un regolatore proporzionale posto in catena diretta la cui costante viene fatta variare fino a quando il sistema stesso comincia ad oscillare permanentemente.



- la costante K_c che così si ottiene è detta *guadagno critico*
- il periodo di oscillazione T_c *periodo critico*

se aumentando la costante di guadagno il sistema non raggiunge mai l'instabilità il metodo non si applica.

Per calcolare i parametri del regolatore si usa la tabella:

Tipo di regolatore	Parametri di Ziegler e Nichols
P	$K_p = 0,5\ K_c$
PD	$K_p = 0,5\ K_c$ $T_i = 0,2\ T_c$
PI	$K_p = 0,45\ K_c$ $T_i = (1/1,2)\ T_c$
PID	$K_p = 0,6\ K_c$ $T_i = 0,5\ T_c$ $T_d = 0,125\ T_c$

In realtà nessuno dei due modi fornisce sempre il comportamento previsto, tuttavia i parametri ricavati con le formule date possono rappresentare degli ottimi punti di partenza per un procedimento per tentativi.

FUNZIONE DI RISPOSTA ARMONICA

Per sistemi di basso ordine (fino al II) la sintesi si può fare analiticamente e tutti i metodi danno risultati precisi

Per sistemi di ordine superiore o si ottengono risultati grossolani o per ottenere risultati precisi bisogna pagare molto in termini di calcoli (assegnamento dei poli e introduzione di un osservatore che aumenta ulteriormente l'ordine dinamico del sistema)

$\hookrightarrow$ soluzione: abbandono il dominio dei tempi e mi sposto nel dominio delle frequenze

- la sintesi nel dominio delle frequenze non fa distinzioni d'ordine ed è di tipo grafico (più intuitivo)
- non si utilizzano più le eq. differenziali, trasformate e funzioni di trasferimento, ma si lavora con la funzione di risposta armonica e sui grafici di tale funzione vengono svolte analisi e sintesi (diagrammi polari e di Bode)
- il modello costituito dalla funzione di risposta armonica, pur essendo del tutto equivalente a quello costituito da un sistema di eq. differenziali, è molto meno adatto alla simulazione

In termini generali la funzione di risposta armonica di un sistema lineare e stazionario è la funzione che ne descrive completamente il comportamento in regime statico in corrispondenza di ingressi sinusoidali con pulsazioni comprese tra 0 e ∞

TEOREMA (risposta di un sistema lineare e stazionario ad ingresso sinusoidale)
Si consideri una funzione sinusoidale di pulsazione ω: $x(t) = X \operatorname{sen}(\omega t)$
la risposta in regime statico (esaurito il transitorio dovuto ad eventuali condizioni iniziali diverse da zero) di un sistema lineare e stazionario è data da:
$y(t) = Y(\omega) \operatorname{sen}[\omega t + \varphi(\omega)]$
cioè è essa pure sinusoidale di pulsazione ω ed ha ampiezza e fase dipendanti dalla pulsazione stessa

DEF. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema lineare e stazionario è una funzione a valori complessi di variabile reale $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$ ed avente come modulo il rapporto $Y(\omega)/X$ tra l'ampiezza della funzione sinusoidale di uscita e quella di ingresso, e come argomento la fase $\varphi(\omega)$ della funzione di uscita

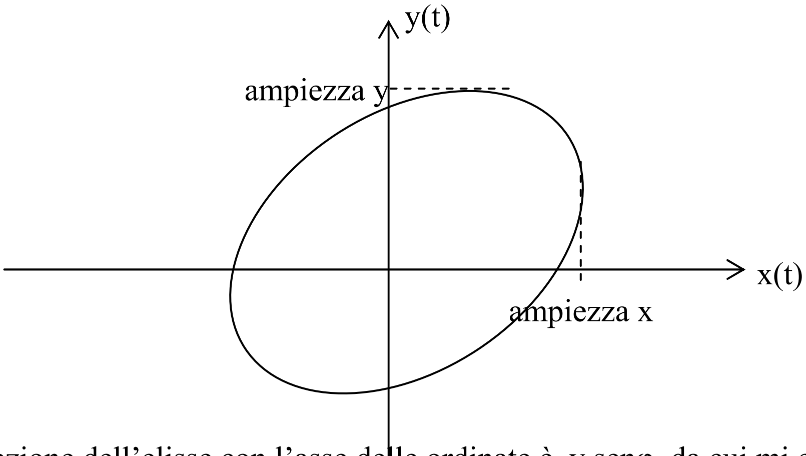
$$\boxed{F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X} [\cos\varphi(\omega) + j\operatorname{sen}\varphi(\omega)]}$$

naturalmente a causa della linearità del sistema $F(\omega)$ non dipende da X

• La funzione di risposta armonica si può ricavare in 2 modi :

1) la funzione di risposta armonica si può ricavare sperimentalmente:

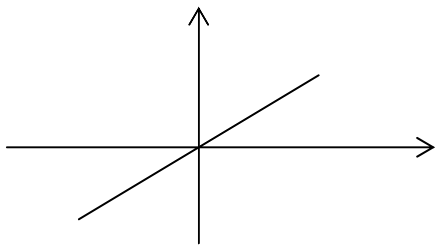
A) per determinare sperimentalmente y e φ sollecito il sistema con un generatore di segnali sinusoidali $x \cdot sen(\omega t)$, poi mando l'ingresso $x \cdot sen(\omega t)$ e l'uscita corrispondente $y \cdot sen(\omega t)$ (eventualmente trasdotti) in ingresso ad un dispositivo chiamato *oscilloscopio* il quale mi fornisce un grafico del tipo:



l'intersezione dell'elisse con l'asse delle ordinate è $y \cdot sen\varphi$, da cui mi esplicito φ

B) posso anche determinare sperimentalmente y e φ prendendo un dispositivo un po' più complicato, dotato di una manopola che varia la fase φ, fino a che l'elisse diventa una retta passante per l'origine

quindi l'intersezione $y \cdot sen\varphi = 0$ siccome $y = 0$
allora $\varphi = 0$



confronto l'angolo della situazione iniziale con quello della retta e trovo φ iniziale

→ metodo applicabile solo per sistemi asintoticamente stabili perché altrimenti y potrebbe diventare infinita

2) la funzione di risposta armonica può anche essere determinata con il seguente teorema:

la funzione di trasferimento G(s) di un sistema lineare, stazionario e asintoticamente stabile è legata alla sua funzione di risposta armonica F(ω) dalla relazione:

$$\boxed{F(\omega) = G(s)\Big| \quad = G(j\omega)}$$

$s = j\omega$

la funzione di risposta armonica si ottiene dalla funzione di trasferimento semplicemente ponendo $s = j\omega$

grazie a questo teorema la definizione di risposta armonica vale anche nel caso di sistemi instabili, anche se in questo caso non ha significato fisico, non essendo misurabile sperimentalmente

per adoperare la funzione di risposta armonica come modello bisogna dimostrare che essa sia in grado di definire completamente il comportamento del sistema stesso:
a tale scopo si mostrerà come la funzione di risposta armonica si può ricavare dalla funzione di risposta impulsiva e, viceversa, la funzione di risposta impulsiva si può ricavare dalla funzione di risposta armonica. In tal modo resterà dimostrato che la funzione di risposta armonica descrive completamente il sistema dato allo stesso modo di quanto fa la funzione di risposta impulsiva.
D'altra parte la funzione di trasferimento G(s) coincide con la trasformata della funzione di risposta impulsiva g(t) e quindi si ha che:

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \, g(t) \, dt$$

dove $s = \sigma + j\omega$ e l'integrale converge per tutti I valori $\sigma > \sigma_c$ essendo σ_c l'ascissa di assoluta convergenza. In particolare se σ_c è negativa (come sempre accade se G(s) è asintoticamente stabile) si può scegliere $\sigma = 0$ cosicché, ponendo $s = j\omega$ si ottiene:

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \, g(t) \, dt$$

il che dimostra che la funzione di risposta armonica si può ottenere dalla funzione di risposta impulsiva.

l'uscita di un sistema può sempre essere scritta come: $Y(s) = G(s) \cdot u(s)$

considerando la trasformata dell'impulso di Dirac $\mathcal{F}\,[\delta(t)] = 1$

e ponendo $u(s) = \mathcal{F}\,[\delta(t)]$ ottengo: $Y(s) = G(s)$

la funzione di trasferimento è la trasformata della funzione di risposta impulsiva, quidi è un modello del sistema che descriva il sistema stesso in tutte le situazioni;
la funzione di risposta armonica è legata alla funzione di trasferimento (come dim) dalla relazione: $F(\omega) = G(j\omega)$
quindi è essa stessa un modello del sistema.

Quanto alla possibilità di determinare la funzione di risposta impulsiva tramite la funzione di risposta armonica, basta scrivere l'antitrasformata, utilizzando la stessa ascissa di convergenza:

$$g(t) = (1/2\Pi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \, G(j\omega) \, d\omega$$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLA FUNZIONE DI RISPOSTA ARMONICA

Le modalità più usate per la rappresentazione grafica della funzione di risposta armonica sono:

1) DIAGRAMMI POLARI
- per ogni funzione di risposta armonica si traccia un diagramma che consiste nella rappresentazione sul piano complesso dell'andamento della funzione al variare di ω da 0 a ∞
- utilizzati per la stabilità

2) DIAGRAMMI DI BÖDE
- diagrammi logaritmici approssimati
- per ogni funzione di risposta armonica esistono 2 diagrammi di Böde:
  - I) fornisce il modulo della funzione di risposta armonica al variare di ω
  - II) fornisce la fase della funzione di risposta armonica al variare di ω
- utilizzati per il comportamento dinamico

DIAGRAMMI POLARI

NUMERI COMPLESSI

$z = a + jb$

$z = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ $\quad b = z \operatorname{sen}\theta$

$\theta = \operatorname{arcsen} b / z$ $\quad a = z \cos\theta$

$\theta = \arccos a / z$ $\quad z = z(\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta)$

$\theta = \operatorname{arctg} b / a$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$z = z\left[\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} + j\,\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2}\right]$$

$$z = z\, e^{j\varphi}$$

se $$z = \frac{z_1\, e^{j\varphi 1} \cdot z_2\, ej\varphi 2 \cdot z_3\, e^{j\varphi 3} \cdot \ldots\ldots \cdot z_n\, e^{j\varphi n}}{z_1'\, e^{j\varphi 1} \cdot z_2'\, ej\varphi 2 \cdot z_3'\, e^{j\varphi 3} \cdot \ldots\ldots \cdot z_n'\, e^{j\varphi n}}$$

allora $$z = \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n}{z_1' \cdot z_2' \cdot z_3' \cdot \ldots \cdot z_n'}\, e^{j(\varphi 1 + \varphi 2 + \varphi 3 + \ldots + \varphi n)}$$

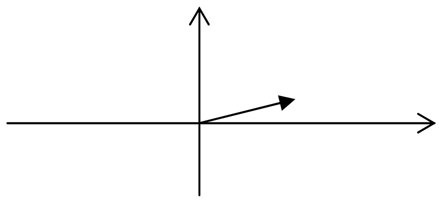
FUNZIONE DI RISPOSTA ARMONICA
Teniamo fissa a parte reale e facciamo variare la pulsazione (parte immaginaria) da 0 a ∞

Es. $\dfrac{s\cdot(s+3)}{(s+5)\cdot(s-6)} \longrightarrow \dfrac{j\omega\cdot(j\omega+3)}{(j\omega+5)\cdot(j\omega-6)}$ funzione di risposta armonica

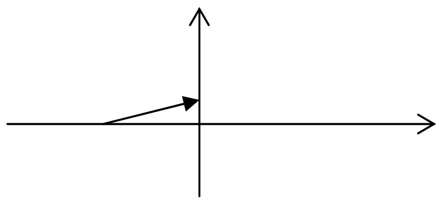
DIAGRAMMI POLARI
Il diagramma polare di una funzione di risposta armonica è costituito dalla curva I cui punti rappresentano sul piano di Gauss le diverse coppie modulo/fase (o parte reale e parte immaginaria) al variare della pulsazione ω tra 0 e ∞

• Es 1) $z = 3 + s$

disegno il vettore nel piano di Gauss

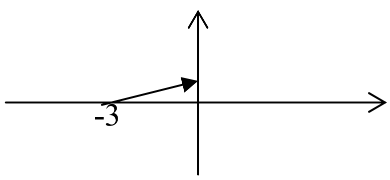


sposto il vettore parallelamente a sé stesso



$z = s + 3$ non ci sono zeri
c'è un polo uguale a –3

- facciamo in modo che il vettore intersechi l'asse reale in corrispondenza del polo/zero



rappresentiamo i numeri complessi con dei vettori che partono dall'asse reale in corrispondenza di poli o zeri e arrivano all'asse immaginario

• Es. 2) $z(k) = \underbrace{(3+k)}_{x} + \underbrace{5k}_{y}\cdot j$

$x = 3 + k$
$y = 5k$

$-5x = -15 - 5k$
$y = 5k$
$-5x + y = -15$
$y = 5x - 15$

• Es. 3) $G(s) = 5 / (s+2)$ $p = -2$

$s \rightarrow j\omega$ $G(j\omega) = 5 / (j\omega+2)$

$$G(j\omega) = 5 / \sqrt{(\omega^2 + 4)}$$

- calcolo modulo e argomento di $G(j\omega)$ facendo tendete ω a 0 e a ∞

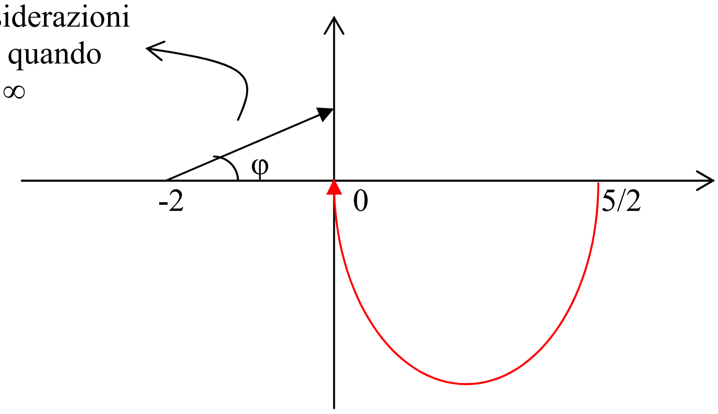
$\omega \to 0$ $\qquad G(j\omega) = 5/2$

$\qquad\qquad \varphi(0) = 0$

$\omega \to \infty$ $\qquad G(j\omega) = 0$

$\qquad\qquad \varphi(\infty) = 0 - 90° = -90°$

mi serve solo
per fare le considerazioni
sull'argomento quando
ω tende a 0 e a ∞



• Es. 4) $\quad G(s) = \dfrac{5}{(s+1)\cdot(s+4)} \longrightarrow \dfrac{5}{(j\omega+1)\cdot(j\omega+4)}$

$p_1 = -1$
$p_2 = -4$

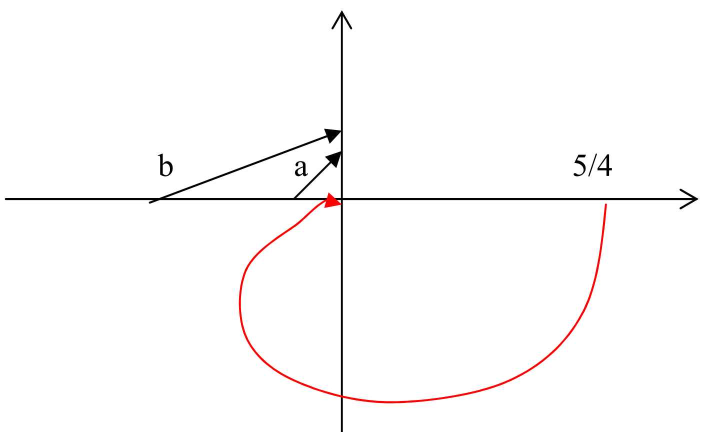
$$G(j\omega) = \frac{5}{\sqrt{(\omega^2+1)}\cdot\sqrt{(\omega^2+16)}} \qquad a = \sqrt{(\omega^2+1)} \quad b = \sqrt{(\omega^2+16)}$$

$\omega \to 0$ $\qquad G(j\omega) = 5/4$

$\qquad\qquad \varphi(0) = 0 - 0 - 0 = 0$

$\omega \to \infty$ $\qquad G(j\omega) = 0$

$\qquad\qquad \varphi(\infty) = 0 - 90° - 90° = -180°$



• Es. 5) $G(s) = \dfrac{5}{s \cdot (s+1)}$ $p_1 = 0$, $p_2 = -1$

$$G(j\omega) = \frac{5}{\omega \sqrt{(\omega^2 + 1)}}$$

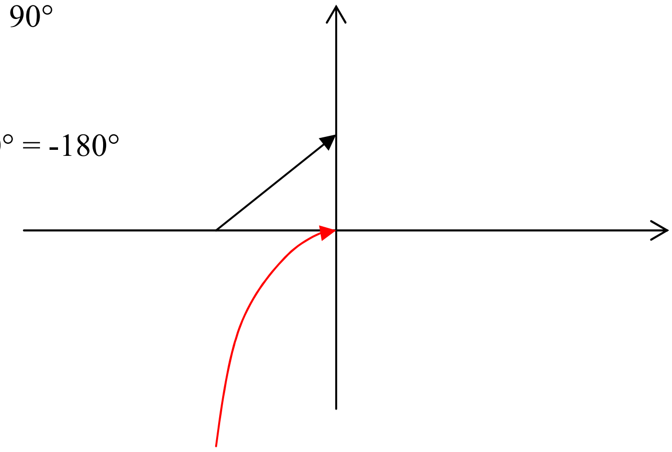
$\omega \to 0$ $G(j\omega) = \infty$

$\varphi(0^-) = 0 - 0 = 0$

$\varphi(0^+) = 0 - 90° = -90°$

$\omega \to \infty$ $G(j\omega) = 0$

$\varphi(\infty) = 0 - 90° - 90° = -180°$



REGOLE per tracciare qualitativamente i diagrammi polari

1) $G(j\omega) = \bar{K} \dfrac{(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_1 j\omega + b_0}{(j\omega)^h \left[(j\omega)^{n-h} + a_{n-h-1}(j\omega)^{n-h-1} + \ldots + a_1 j\omega + a_0 \right]}$

2) $G(j\omega) = K \dfrac{(1+j\omega\tau'_1)(1+j\omega\tau'_2) \ldots (1+2(\delta'_1/\omega'_{n1})j\omega - \omega^2/\omega'^2_{n1})(1+2(\delta'_2/\omega'_{n2})j\omega - \omega^2/\omega'^2_{n2})}{(j\omega)^h (1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2) \ldots (1+2(\delta_1/\omega_{n1})j\omega - \omega^2/\omega^2_{n1})(1+2(\delta_2/\omega_{n2})j\omega - \omega^2/\omega^2_{n2})}$

• Comportamento per $\omega \to 0^+$

- se h = 0 il diagramma parte dall'asse reale in un punto che nei due casi è dato da:

1) $\lim_{\omega \to 0+} G(j\omega) = \bar{k}\,(b_0 / a_0)$

2) $\lim_{\omega \to 0+} G(j\omega) = k$

- se h > 0 il diagramma parted a un punto all'infinito

$\lim_{\omega \to 0+} |G(j\omega)| = \infty$

$\lim_{\omega \to 0+} \arg(j\omega) = -h\,(\Pi/2) - \varphi_0$

dove $\varphi_0 = 0$ o $\varphi_0 = \Pi$ a seconda che il valore di $\overline{k}\,(b_0 / a_0)$ o di k sia positivo o negativo

• <u>Comportamento per ω piccolo</u>
in questo caso si possono trascurare i termini ω^2 e le potenze superiori di ω

- per h = 0 il diagramma lascia l'asse reale ruotando in senso orario o antiorario a seconda che sia negativa o positiva la somma dentro parentesi a seondo membro delle seguenti formule:

1) $\Delta \arg G(j\omega) \approx (b_1/b_0 - a_1/a_0)\ \omega$
2) $\Delta \arg G(j\omega) \approx (\tau'_1 + \tau'_2 + ... + 2(\delta'_1/\omega'_{n1}) + 2(\delta'_2/\omega'_{n2}) + ... - \tau_1 - \tau_2 - ... - 2(\delta_1/\omega_{n1}) - 2(\delta'_2/\omega'_{n2}) ...)\ \omega$

- per h = 1 i diagrammi polari presentano un asintoto parallelo all'asse immaginario

• <u>Comportamento per ω → ∞</u>
per tutte le funzioni di trasferimento di sistemi fisicamente realizzabili, in cui n > m, il diagramma termina nell'origine tangente ad uno degli assi coordinati, in tal caso infatti si ha:

$\lim_{\omega\to\infty} |G(j\omega)| = 0$

$\lim_{\omega\to\infty} \arg G(j\omega) = (m - n)\ (\Pi/2)\ \text{sign}\ h$

dove nel caso 1) sign h = sign $\overline{k}$
nel caso 2) sign h = sign k se il numero complessivo di zeri e poli a parte reale positiva è pari (e quindi lo sfasamento da essi provocato è 2Π o un suo multiplo)
sign h = - sign k in caso contrario

• ESEMPIO 1)

$G(s) = \dfrac{30\ (s + 0{,}2)}{(s + 1)}$ funzione di trasferimento

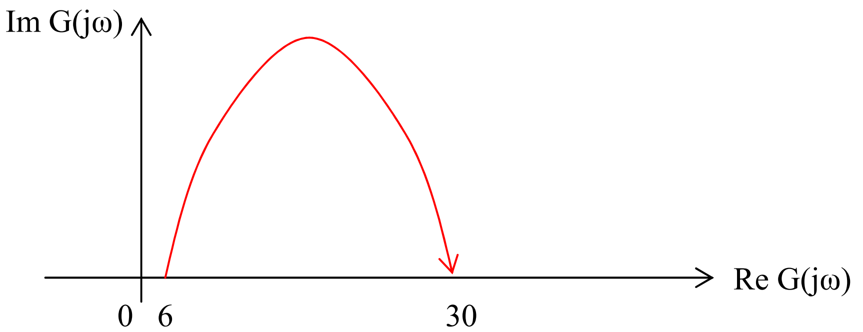
$G(j\omega) = \dfrac{6\ (1 + j\omega 5)}{(1 + j\omega)}$ funzione di risposta armonica

per ω = 0	$\lvert G(j\omega)\rvert = 6$	$\arg G(j\omega) = 0$
per ω → ∞	$\lvert G(j\omega)\rvert = 30$	$\arg G(j\omega) = 0$

poichè la costante di tempo dello zero è maggiore di quella del polo si ha:

$6 < |G(j\omega)| < 30$ $\arg G(j\omega) > 0$ per $o < \omega < \infty$

quindi l'andamento è il seguente:



• ESEMPIO 2)

$G(s) = \dfrac{80}{(s^2 + 2,5\ s + 16)}$ funzione di trasferimento

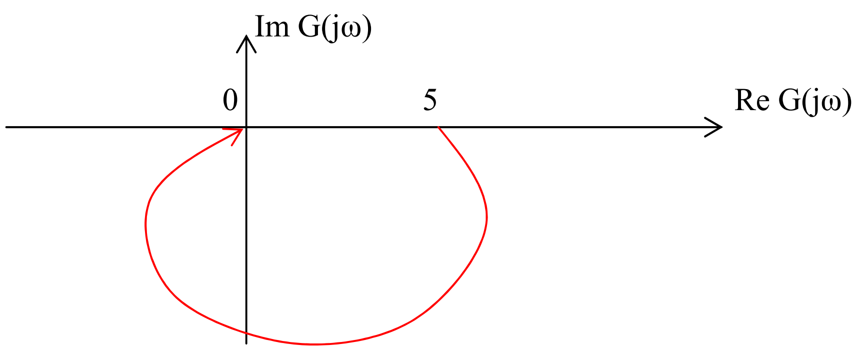
$G(j\omega) = \dfrac{80}{(-\omega^2 + j\omega 2,5 + 16)}$ funzione di risposta armonica

per $\omega = 0$ $|G(j\omega)| = 5$ $\arg G(j\omega) = 0$

per $\omega \rightarrow \infty$ $|G(j\omega)| = 0$ $\arg G(j\omega) = -\Pi$

per $\omega = 4$ $|G(j\omega)| = 8$ $\arg G(j\omega) = -\Pi/2$

quindi l'andamento è il seguente:



DIAGRAMMI LOGARITMICI

Una funzione di risposta armonica si può rapprsentare graficamente anche usando due diversi diagrammi, uno dei quali (*diagramma delle ampiezze* o *dei moduli* o *diagramma α*) riporta il logaritmo del modulo in funzione del logaritmo della pulsazione ω, e l'altro (*diagramma delle fasi* o *degli argomenti* o *diagramma β*) riporta l'argomento ancora in funzione del logaritmo della pulsazione ω

$$\ln G(j\omega) = \ln [|G(j\omega)|\ e^{j\varphi(\omega)}] = \ln |G(j\omega)| + j\varphi(\omega) = \alpha + j\beta$$

si può dunque concludere che i diagrammi α e β rappresentano rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria del logaritmo naturale della funzione di risposta armonica in funzione del logaritmo naturale della pulsazione ω

spesso invece di riportare in scala lineare i valori del logaritmo del modulo della funzione di risposta armonica e del logaritmo della pulsazione si riportano in scala logaritmica decimale: questa rappresentazione fornisce lo stesso tipo di andamento ma è più agevole da tracciare

- scala logaritmoca sia in ordinate che in ascisse nel diagramma delle ampiezza
- scala semoligaritmica (logaritmica solo in ascisse per le pulsazioni) nel diagramma delle fasi

vantaggi di usare scale logaritmiche:

1) possibilità di rappresentare con grande dettaglio, in corrispondenza dei valori piccoli, grandezze che variano in campi notevolmente estesi
2) possibilità di sommare i diagrammi relativi a sistemi in cascata per ottenere i diagrammi del sistema complessivo (la fase della funzione di risp armonica del sistema complessivo vale la somma della fasi delle funzioni di risp armonica dei sistemi in cascata mentre il modulo vale il prodotto, ovvero la somma se le scala è logaritmica, dei moduli)

l'uso dei diagrammi logatimtici nella protica progettuale sarebbe ancora piuttosto faticoso se non venissero in aiuto alcune utili approssimazioni introdotte da Bode

DIAGRAMMI DI BODE

Si chiamano diagrammi di Bode i diagrammi logaritmici della funzione di risposta armonica ottenuti come somma di un numero limitato di diagrammi logaritmici elementari, opportunamente approssimati, ciascuno corrispondente ad un singolo fattore della forma fattorizzata.

consideriamo una funzione di risposta armonica $G(j\omega) = G(j\omega)\ e^{j\,\varphi(\omega)}$

passando ai logaritmi
$$\log\ G(j\omega) = \underbrace{\log\ G(j\omega)}_{\alpha} + \underbrace{\varphi(\omega)\log e}_{\beta}$$

diagramma dei moduli (logaritmico) — diagramma delle fasi (semilogaritmico)

regola cambio di base del logaritmo:

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

nei diagrammi logaritmici quando $\omega \to 0$ allora $\lim \log_{10} x = -\infty$

$x \to 0$

diagramma logaritmico

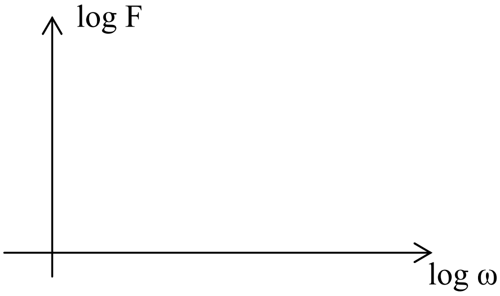


diagramma semilogaritmico

- Es.

$$G(s) = \frac{(1+3s)\cdot(1-s)}{(1-2s)\cdot(1+5s)} \longrightarrow \frac{(1+3j\omega)\cdot(1-j\omega)}{(1-2j\omega)\cdot(1+5j\omega)}$$

α) diagramma dei moduli

$$\frac{1+\ 3j\omega \ \cdot \ 1-j\omega}{1-\ 2j\omega \ \cdot \ 1+5j\omega}$$

$$\log\ G(j\omega) = \log\ 1+3j\omega \ + \ \log\ 1-j\omega \ + \ \log 1/\ 1-2j\omega \ + \ \log 1/\ 1+5j\omega$$

$\downarrow$

ottengo 4 diagrammi: il diagramma α è la somma dei 4 diagrammi
a noi interessano gli andamenti asintotici (ω piccolo e ω grande)

β) diagramma delle fasi

$$\frac{(1+3\omega)\cdot(1-j\omega)}{(1-2j\omega)\cdot(1+5j\omega)} \longrightarrow \frac{(\text{ arctg } 3\omega)\cdot(\text{arctg } -\omega)}{(\text{arctg } -2\omega)\cdot(\text{arctg } 5\omega)} \longrightarrow \varphi_1+\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4$$

a noi interessano solo gli andamenti asintotici

<u>andamenti asintotici</u>

$$1+3j\omega$$

bisogna cercare sempre si far comparire l'1 all'inzio:

$$3s+4 = 4\cdot(1+\tfrac{3}{4}\,s) = 4\cdot(1+\tfrac{3}{4}\,j\omega)$$

ogni numero complesso avrà una pulsazione ω_0 di rottura con cui possiamo confrontare le altre ω per trovare gli andamenti asintotici

$\sqrt{(1 + 9/16\ \omega^2)}$ → $\omega = 4/3$ pulsazione di rottura ω_0

se $\omega << 4/3$ allora rimane $\sqrt{1} = 1$
se $\omega >> 4/3$ allora rimane $\sqrt{(9/16\omega^2)} = ¾\ \omega$

DIAGRAMMI DI BODE DEI SINGOLI FATTORI

La forma fottorizzata alla quale si fa riferimento è la seguente:

$$G(j\omega) = K \frac{(1+j\omega\tau'_1)(1+j\omega\tau'_2) \ldots (1+2(\delta'_1/\omega'_{n1})j\omega - \omega^2/\omega'^2_{n1})(1+2(\delta'_2/\omega'_{n2})j\omega - \omega^2/\omega'^2_{n2})}{(j\omega)^h (1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2) \ldots (1+2(\delta_1/\omega_{n1})j\omega - \omega^2/\omega^2_{n1})(1+2(\delta_2/\omega_{n2})j\omega - \omega^2/\omega^2_{n2})}$$

i fattori elementari che compaiono sono:

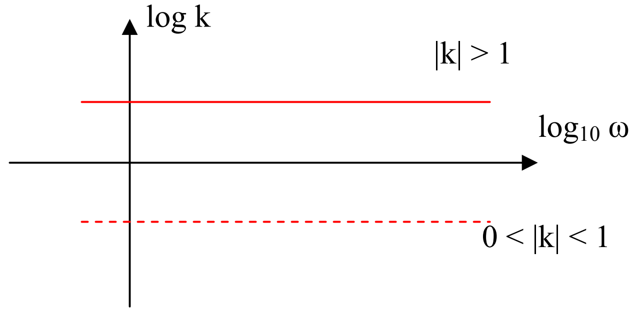
$G(j\omega) = k$
$G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)$
$G(j\omega) = 1 / (1 + 2j\delta(\omega/\omega_n) - (\omega^2/\omega^2_n))$
$G(j\omega) = 1 / (j\omega)^h$
$G(j\omega) = 1 / (1 + j\omega\tau)$
$G(j\omega) = 1 + 2j\delta\ (\omega/\omega_n) - (\omega^2/\omega^2_n)$

La costante k è la costante di guadagno e quando h = 0 è detta guandagno statico perchè corrisponde al guadagno del sistema per $\omega = 0$

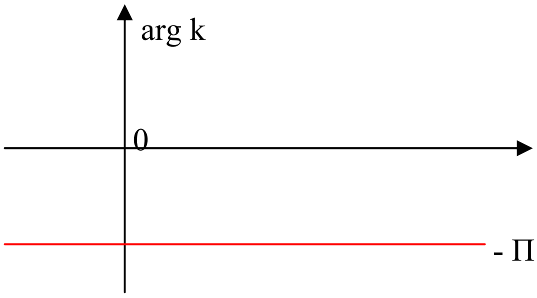
I diagrammi di Bode delle funzioni di risp armonica dei termini elementari sono i seguenti:

$\boxed{\mathbf{G(j\omega) = k}}$

Il diagramma delle ampiezze è costituito da una delle due rette riportate di seguito, dipendentemente dal valore assunto da |k|



Il diagramma delle fasi, se la costante è positiva, la fase risulta identicamente nulla e il diagramma coincide con la retta ln $\omega = 0$, cioè con l'asse delle ascisse.
Se la costante è negativa la fase risulta pari a $-\Pi$



in questo caso non c'è bisogno di effettuare approssimazioni per semplificare i diagrammi e quindi i diagrammi di Bode coincidono con quelli logaritmici

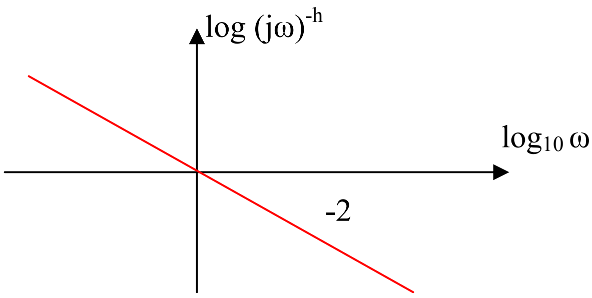
$G(j\omega) = 1 / (j\omega)^h$

In questo caso si ha:

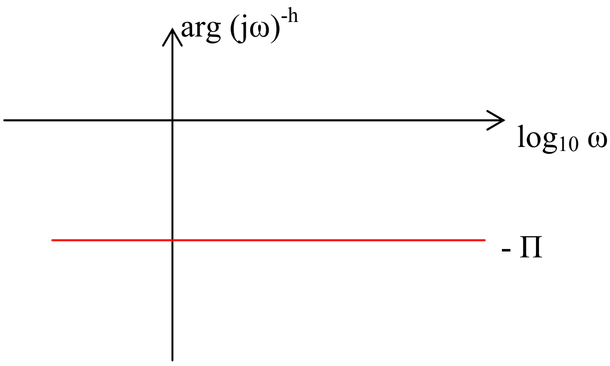
$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln 1/\omega^h - jh\,\Pi/2 = -h \ln \omega - jh\,\Pi/2$

il diagramma dei moduli è costituito da una retta passante per l'origine ed avente pendenza –h, mentre il diagramma delle fasi coincide con una retta parallela all'asse della ascisse e di ordinata pari a $-h\Pi/2$

caso particolare h = 2



$\log_{10} |(j\omega)^{-h}| = -h \log \omega$
è una retta $y = -hx$



anche in questo caso non c'è bisogno di effettuare approssimazioni per semplificare i diagrammi e quindi i diagrammi di Bode coincidoni con quelli logaritmici

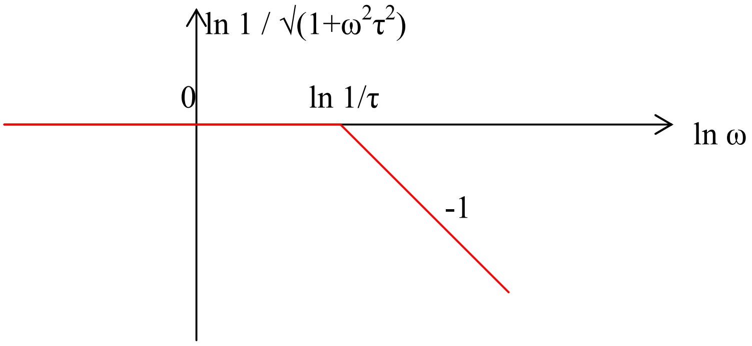
$G(j\omega) = 1 / (1 + j\omega\tau)$

In questo caso si ha:

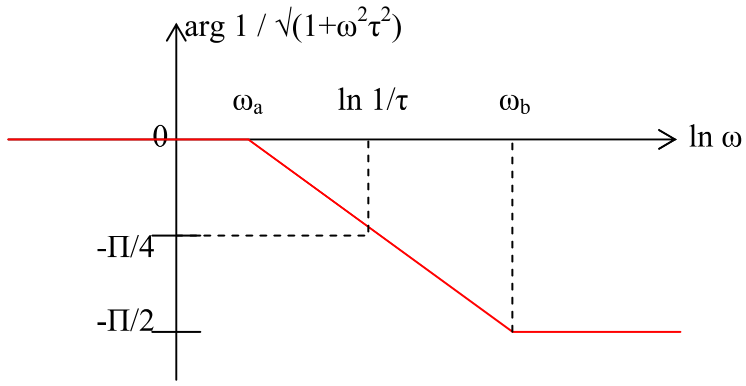
$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = (\ln 1 / \sqrt{(1+\omega^2\tau^2)}) + j\,(-\mathrm{arctg}\ \omega\tau)$

Il diagramma delle ampiezze è costituito da due semirette che rappresentano i due asintoti cui tende il diagramma logaritmico effettivo per $\omega \to 0$ e per $\omega \to \infty$

- infatti per $\omega \to 0$ e quindi $\omega << 1/\tau$ si trascura il termine $\omega^2\tau^2$ rispetto a 1 e si ottiene $\alpha = 0$ e quindi in diagramma viene a coincidere con la semiretta che giace sull'asse delle ascisse e che termina nel punto ω_0, detto punto di rottura, per il quale vale $\ln \omega_0 = \ln 1/\tau$
- per $\omega \to \infty$ e quindi $\omega >> 1/\tau$ invece trascurando 1 rispetto al termine $\omega^2\tau^2$ si ottiene $\alpha = \ln (1/\omega\tau) = \ln (1/\tau) - \ln \omega$
  conseguentemente il diagramma viene a coincidere con la semiretta avente origine nel punto ω_0 e di pendenza -1



Il diagramma delle fasi può essere approssimato con la spezzata che si ottiene raccordando i due asintoti $\beta = 0$ e $\beta = -\Pi/2$ cui tende il diagramma logaritmico effettivo e sapendo che in ω_0 $\beta = -\Pi/4$ in quanto in questo caso $\beta = -\mathrm{arctg}\ \omega\tau$



Derivando la formula di β si trova che la pendenza del segmento di raccordo è -1/2
Le pulsazioni ω_a e ω_b in corrispondenza delle quali si ha l'intersezione del segmento di raccordo con i due asintoti $\beta = 0$ e $\beta = -\Pi/2$ esse si possono ottenere per mezzo della relazione:

$$\omega_0 / \omega_a = \omega_b / \omega_0 \approx e^{\Pi/2} = 4{,}81$$

Infine bisogna notare che quando la costante di tempo è negativa (cioè il polo corrispondente è positivo), il diagramma delle ampiezze risulta immutato, il punto di rottura è dato da $\ln\omega = \ln(1/|\tau|)$ mentre il diagramma delle fasi risulta ribaltato attorno all'asse delle ascisse

$$G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)$$

I diagrammi relativi a termini di questo tipo si possono ottenere da quelli del tipo precedente semplicemente ribaltandoli attorno all'asse delle ascisse.
Quando la costante di tempo è negativa vale quanto detto al punto precedente.

$$G(j\omega) = 1 / (1 + 2j\delta(\omega/\omega_n) - (\omega^2/\omega^2_n))$$

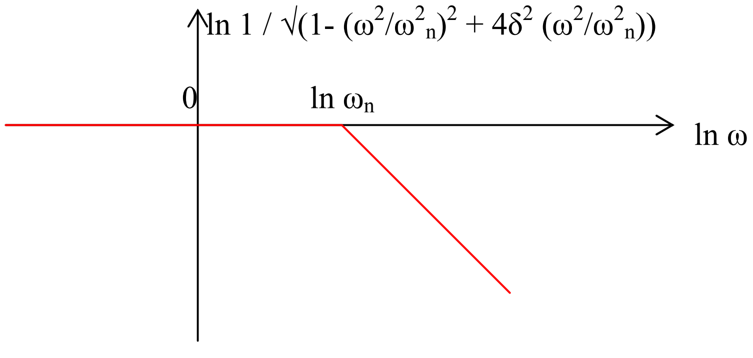
Ci si limita al caso in cui $0 < \delta < 1$, in quanto se $\delta >= 1$ i poli di questo termine del secondo ordina risultano reali e quindi ci si potrebbe ricondurre al caso del prodotto di due termini del primo ordine.
Nel caso di due poli complessi coniugati si può scrivere:

$$\ln G(j\omega) = \alpha + j\beta = \ln \frac{1}{\sqrt{(1- (\omega^2/\omega^2_n)^2 + 4\delta^2 (\omega^2/\omega^2_n))}} + j \left[- \text{arctg} \frac{2\delta (\omega/\omega_n)}{1 - (\omega^2/\omega^2_n)} \right]$$

Il diagramma dei moduli
- per $\omega/\omega_n << 1$ tutti i termini sotto radice quadrata risultano trascurabili rispetto a 1 e pertanto $\alpha = 0$, conseguentemente il diagramma coincide con l'asse delle ascisse fino al punto di rottura $\ln\omega = \ln\omega_n$
- per $\omega/\omega_n >> 1$ il termine prevalente risulta (ω^2/ω^2_n) e perciò si ha $\alpha \approx -\ln (\omega^2/\omega^2_n) = 2\ln\omega_n - 2 \ln\omega$ quest'equazione corrisponde ad una semiretta con pendenza -2 e con origine nel punto di rottura

Il diagramma logaritmico effettivo può scostarsi anche di molto da quello di Bode, e nell'intorno del punto di rottura non si può usare il diagramma approssimato

A seconda del valore assunto da δ i diagramma logaritmici effettivi avrebbero i seguenti andamenti:
- per $0 <= \delta <= 1/\sqrt{2}$ ammette un massimo (*picco di risonanza*) in corrispondenza della pulsazione di risonanza
- per $0 <= \delta <= 0{,}5$ interseca l'asse delle ascisse a destra del punto di rottura e quindi il diagramma effettivo si trova al disopra dell'approssimazione asintotica
- per $0{,}5 <= \delta <= 1/\sqrt{2}$ interseca l'asse delle ascisse a sinistra del punto di rottura
- per $1/\sqrt{2} <= \delta <= 1$ non interseca l'asse delle ascisse e quindi viene a trovarsi al di sotto dell'approssimazione asintotica



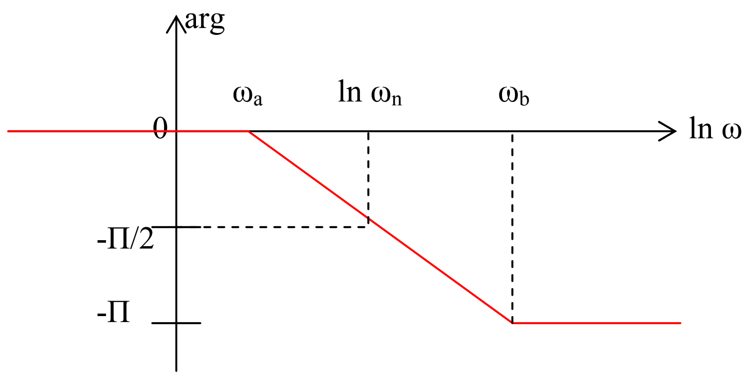
La pulsazione di risonanza risulta $\omega_R = \omega_n \sqrt{(1- 2\delta^2)}$
E quindi il picco di risonanza e $M_R = 1 / (2\delta \sqrt{(1- \delta^2)})$
Ciò significa che per i sistemi del secondo ordine senza zeri il picco di risonanza dipende soltanto dal coefficiente di smorzamento, e siccome ciò accade anche per la massima sovraelongazione, possiamo concludere che assegnare come specifica una data sovraelongazione equivale ad assegnare un dato picco di risonanza

Il diagramma di Bode delle fasi si può ottenere congiungendo gli asintori $\beta = 0$ e $\beta = -\Pi$ cui tende il diagramma logaritmico effettivo con un segmento avente una pendenza pari a quella della tangente a quast'ultimo diagramma in corrispondenza della pulsazione di rottura ω_n

$$\beta = -\text{arctg} \frac{2\delta\,(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega^2/\omega^2{}_n)}$$

Derivando rispetto a ln ω in corrispondenza di ω_n si trova che la pendenza del segmento di raccordo è $-1/\delta$
Le pulsazioni ω_a e ω_b in corrispondenza delle quali si ha l'intersezione del segmento con i due asintoti si possono ricavare dalla relazione:

$$\omega_n / \omega_a = \omega_b / \omega_n \approx 4{,}81^{\delta}$$



Mentre la pulsazione naturale non può mai essere negativa, questo può accadere per il coefficiente di smorzamento δ. In tal caso il diagramma delle ampiezze risulta uguale a quello che si avrebbe per uno smorzamento pari a $|\delta|$, mentre il diagramma delle fasi risulta ribaltato rispetto all'asse delle ascisse

Per piccoli valori del coefficiente di smorzamento l'approssimazione asintotica comporta errori talmente grandi che è di fatto inutilizzabile.

$$\boxed{G(j\omega) = 1 + 2j\delta\,(\omega/\omega_n) - (\omega^2/\omega^2_n)}$$

I diagrammi delle ampiezze e delle fasi relativi a termini di questo tipo si possono ottenere da quelli del tipo precedente semplicemente ribaltandoli attorno all'asse delle ascisse.
Quando il coefficiente di smorzamento è negativo vale quanto detto al punto precedente.

ESERCIZI

1) <u>Diagrammi di Bode</u>

$$G(s) = \frac{30}{(1+s)\,(1+3s)\,(1+0{,}5s)} \qquad \begin{array}{l} p_1 = -1 \\ p_2 = -1/3 \\ p_3 = -2 \end{array}$$

$$G(j\omega) = \frac{30}{(1+j\omega)\,(1+3j\omega)\,(1+0{,}5\omega)}$$

$$\tau_1 = 1 \qquad \tau_2 = 3 \qquad \tau_3 = 1/2 \qquad \text{costanti di tempo}$$

pulsazioni rottura $\quad \omega_{01}=1 \quad \omega_{02}=1/3 \quad \omega_{03}=2 \quad$ (inversi delle costanti di tempo)

diagramma dei moduli

$$\log_{10}|G(j\omega)| = \log 30 + \log|1+j\omega|^{-1} + \log|1+3j\omega|^{-1} + \log|1+0{,}5j\omega|^{-1}$$

$\log 30$

$$\log|1+j\omega|^{-1} \begin{cases} (\omega \ll 1) & \log 1^{-1} = 0 \\ (\omega \gg 1) & \log \omega^{-1} = -\log\omega \end{cases}$$

$$\log|1+3j\omega|^{-1} \begin{cases} (\omega \ll 1/3) & \log 1^{-1} = 0 \\ (\omega \gg 1/3) & \log 3\omega^{-1} = -\log 3 - \log\omega \end{cases}$$

$$\log|1+0{,}5j\omega|^{-1} \begin{cases} (\omega \ll 2) & \log 1^{-1} = 0 \\ (\omega \gg 2) & \log 0{,}5\omega^{-1} = -\log 0{,}5 - \log\omega \end{cases}$$

diagramma delle fasi

$$\angle 30 = 0$$

$$\angle (1+j\omega)^{-1} \begin{cases} (\omega \ll 1) & \text{fase } 1 = 0 \\ (\omega \gg 1) & \text{fase } j\omega^{-1} = -\Pi/2 \end{cases}$$

$$\angle(1+3j\omega)^{-1} \begin{cases} (\omega \ll 1/3) & \text{fase } 1 = 0 \\ (\omega \gg 1/3) & \text{fase } 3j\omega^{-1} = -\Pi/2 \end{cases}$$

$$\angle(1+0{,}5j\omega)^{-1} \begin{cases} (\omega \ll 2) & \text{fase } 1 = 0 \\ (\omega \gg 2) & \text{fase } 0{,}5j\omega^{-1} = -\Pi/2 \end{cases}$$

diagramma moduli

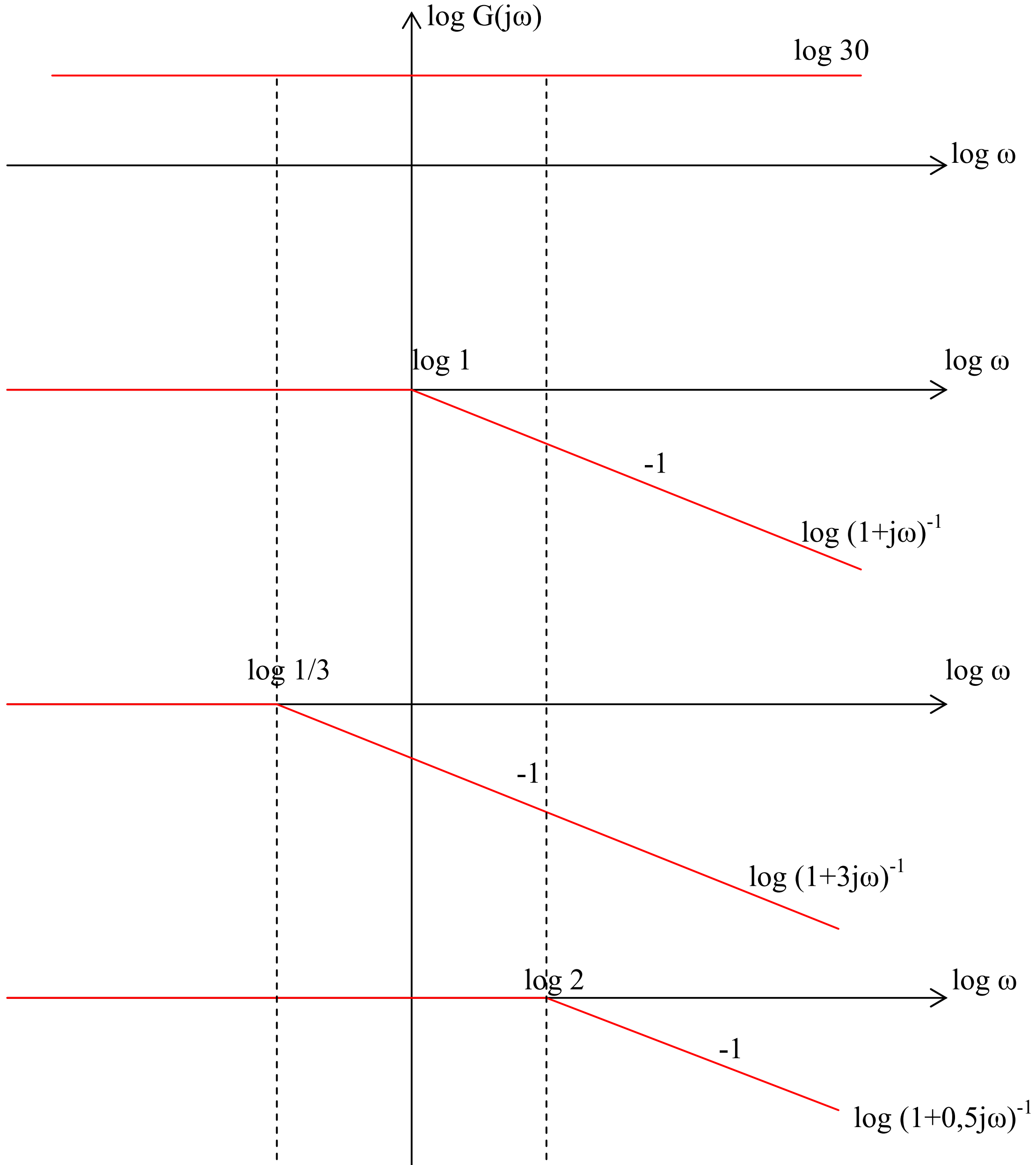


diagramma risultante

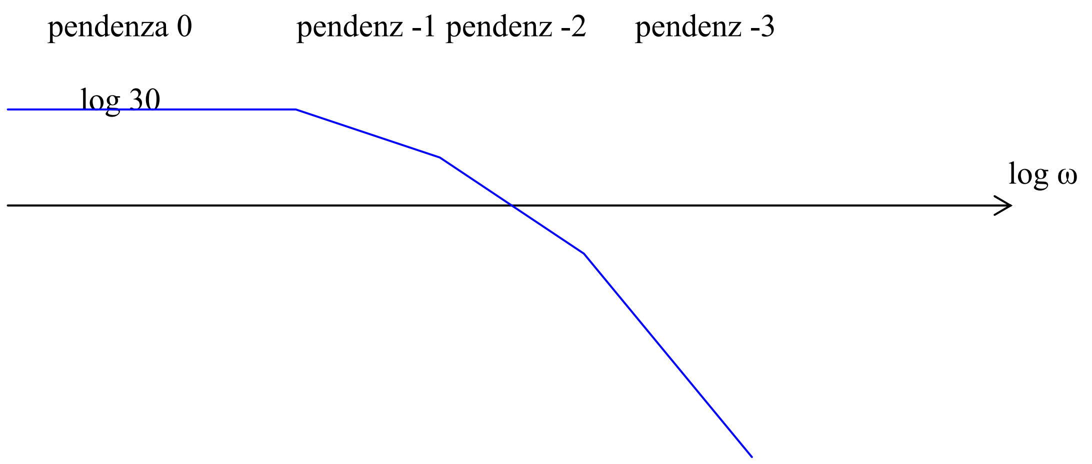


diagramma fasi

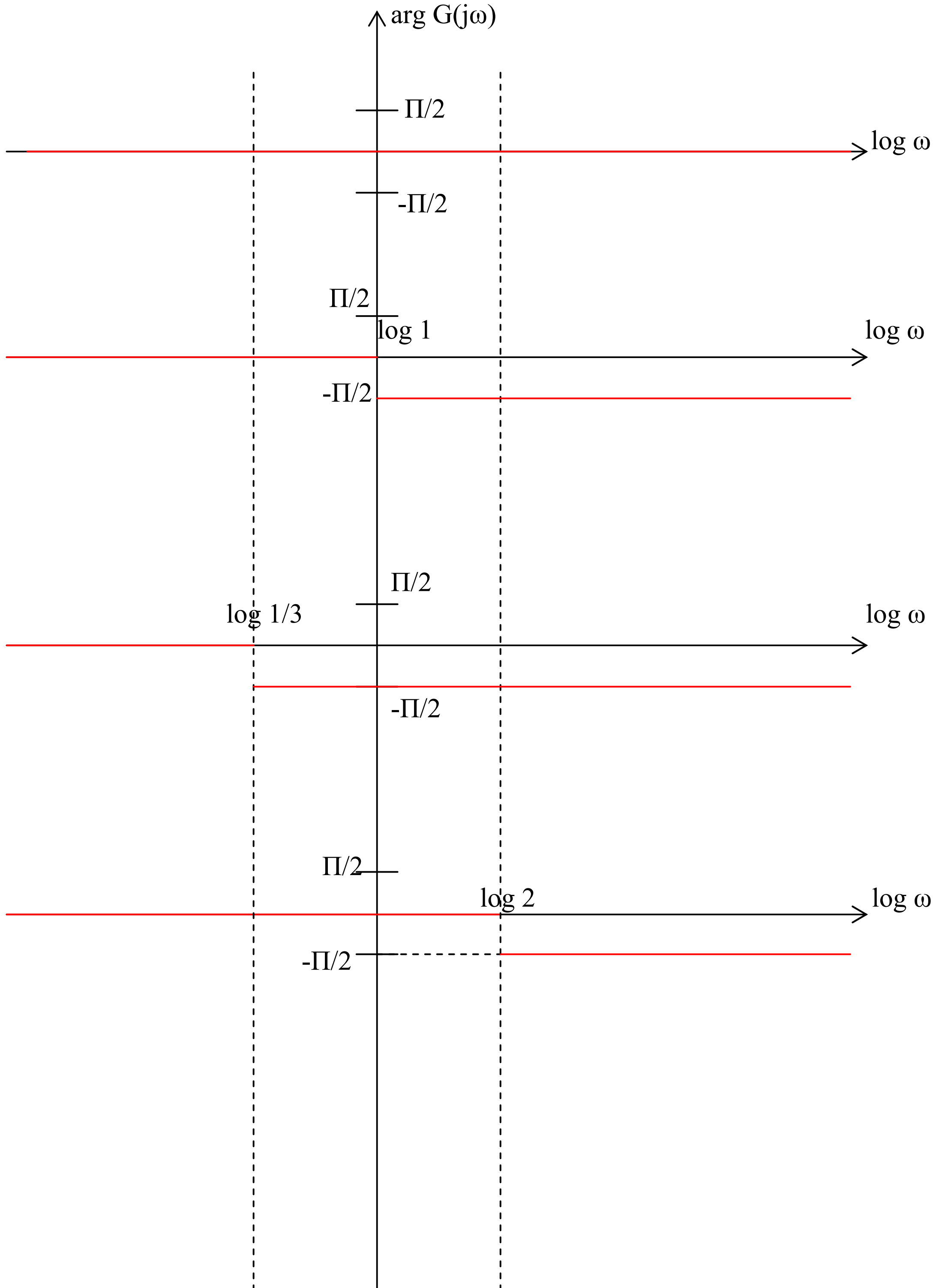
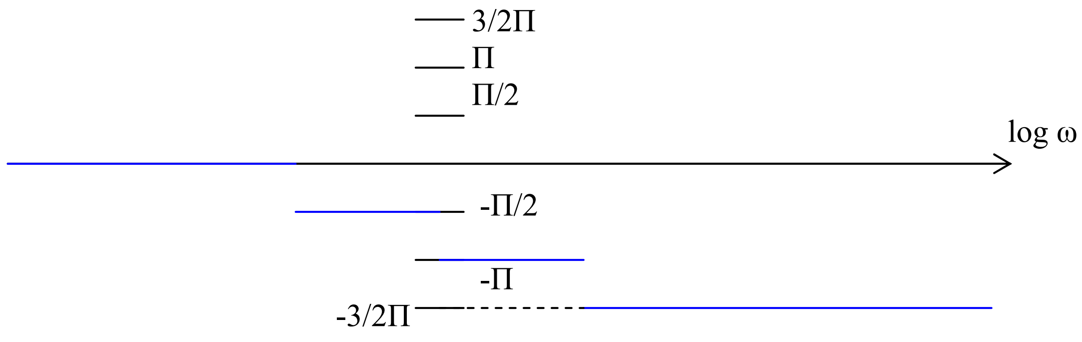


diagramma risultante



<u>Diagramma polare</u>

$$G(s) = \frac{30}{(1+s)\,(1+3s)\,(1+0{,}5s)}$$

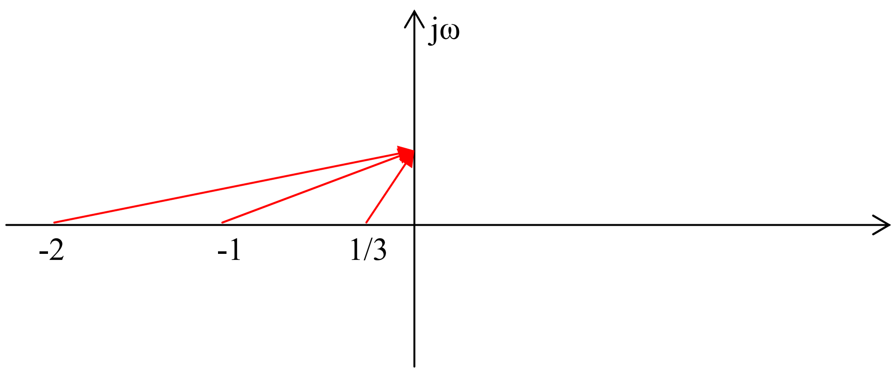
$$= \frac{30}{(s+1)\,3(s+1/3)\,0{,}5(s+2)}$$

$$= \frac{20}{(s+1)\,(s+1/3)\,(s+2)}$$

$$G(j\omega) = \frac{20}{(j\omega+1)\,(j\omega+1/3)\,(j\omega+2)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|20|}{a \cdot b \cdot c}$$

$a = |1+j\omega|$
$b = |1/2+j\omega|$
$c = |2+j\omega|$

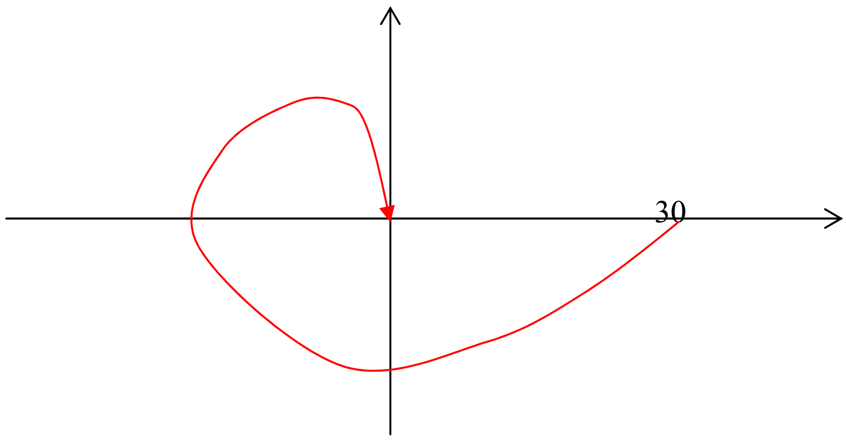


$\omega \to 0$ $\quad |G(j\omega)| = 20/\,(2/3) = 30$

$\varphi(j\omega) = 0 - 0 - 0 - 0 = 0$

$\omega \to \infty$ $\quad |G(j\omega)| = 0$

$\varphi(j\omega) = 0 - \Pi/2 - \Pi/2 - \Pi/2 = -\,3/2\Pi$



DETERMINAZIONE DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DALLA FUNZIONE DI RISPOSTA ARMONICA

Tra la funzione di risposta armonica di un sistema e la sua funzione di trasferimento esiste un legame biunivoco, conseguentemente essendo possibile determinare sperimentalmente la funzione di risp armonica è anche possibile effettuare l'identificazione di quest'ultima determinandone la funzione di trasferimento, ovvero un modello parametrico di tipo IU.
Una volta determinati sperimentalmente i diagrammi logaritmici che danno la funzione di risp armonica in ampiezza e fase si può passare alla determinazione della funzione di trasferimento corrispondente.
A tale scopo basta approssimare i diagrammi con asintoti le cui pendenze siano multiple di ± 1:

- tutte le volte che la pendenza del diagramma passa da n a (n ± 1) si deduce che nella funzione di risp armonica è presente un termine di uno dei seguenti due tipi:
  $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)$ $\qquad$ $G(j\omega) = 1 / (1 + j\omega\tau)$
  dove $\omega = 1/\tau$ è la pulsazione di rottura

- se la pendenza del diagramma passa da n a (n ± 2) si deduce che nella funzione di risp armonica è presente un termine di uno dei seguenti due tipi:

  $G(j\omega) = 1 / (1 + 2j\delta(\omega/\omega_n) - (\omega^2/\omega^2{}_n))$ $\qquad$ $G(j\omega) = 1 + 2j\delta\,(\omega/\omega_n) - (\omega^2/\omega^2{}_n)$

  dove il valore del coeff di smorzamento δ può essere determinato sperimentalmente misurando il picco di risonanza in corrispondenza della pulsazione di rottura ω_n

  la costante di guadagno k può essere determinata esaminando l'andamento degli asintoti per $\omega \to 0$ in quanto per questi valori $G(j\omega) = K / (j\omega)^n$

  se l'asintoto per $\omega \to 0$ è orizzontale, n risulta nullo mentre k è data dal valore dell'asintoto stesso
  se invece la pendenza dell'asintoto è 1 (o 2) ne se gue che n = 1 (o n = 2) mentre k è data dal valore numerico della pulsazione alla quale l'asintoto interseca l'asse delle ascisse

Il diagramma delle fasi può servire per verificare che la funzione di trasferimento ottenuta nel modo sopra descritto sia corretta

STABILITA' DEI SISTEMI IN RETROAZIONE

IL CRITERIO DI NYQUIST

Una delle proprietà strutturali fondamentali di un sistema di controllo è la stabilità di cui abbiamo già visto le condizioni nel dominio dei tempi.
Per quanto riguarda i modelli definiti nel dominio delle frequenze esiste una condizione necessaria e sufficiente per la stabilità dei sistemi in retroazione detta criterio di Nyquist

pregi del criterio di Nyquist:
- le condizioni che richiede siano soddisfatte si riferiscono alla funzione di risposta armonoca d'anello e non alla funzione di risp armonica del sistema complessivo
- risulta molto più facile capire come si deve modificare la funzione di risp armonica perchè la stabilità sia garantita

CRITERIO DI NYQUIST   *caso particolare: sulla stabilità dei sistemi in retroazione con funz di trasferimento d'anello stabile*

Dato un sistema di controllo in retroazione lineare e stazionario avente una funzione di trasferimento d'anello $G_a(s)$ i cui poli hanno tutti parte reale negativa a meno di un eventuale polo nullo o semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perchè questo sistema sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo (per ω che varia da $-\infty$ a $+\infty$) della funzione di risp armonica $G_a(j\omega)$ non circondi né tocchi il punto critico $-1 + j0$

CRITERIO DI NYQUIST   *caso generale: sulla stabilità dei sistemi in retroazione con funz di trasferimento d'anello anche instabile*

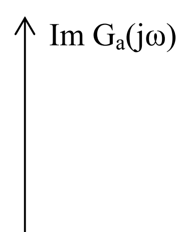
Dato un sistema di controllo in retroazione lineare e stazionario avente una funzione di trasferimento d'anello $G_a(s)$ che non presenti poli immaginari a meno di un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché questo sistema sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo (per ω che varia da $-\infty$ a $+\infty$) della funzione di risp armonica $G_a(j\omega)$ circondi il punto critico $-1 + j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $G_a(s)$ con parte reale positiva

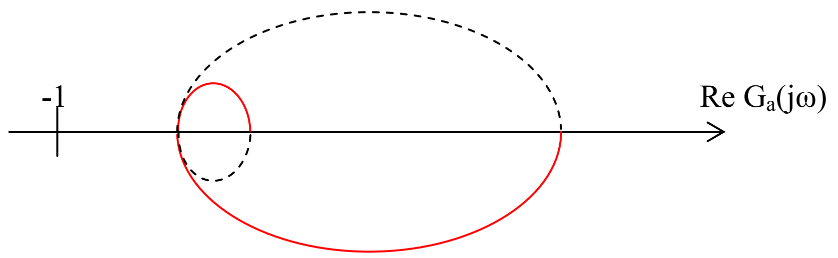
OSSERVAZIONI:
1) per disegnare il diagramma polare completo (diagramma di Nyquist), siccome vale $G_a(-j\omega) = G_a^*(j\omega)$, il diagramma per le pulsazioni negative si può ottenere ribaltando intorno all'asse delle ascisse quello ottenuto per le pulsazioni positive

2) nel caso generale del criterio ogni giro in meno in senso antiorario o ogni giro in più in senso orario rispetto al numero richiesto dal teorema corrisponde alla presenza nel sistema in retroazione di un polo con parte reale positiva

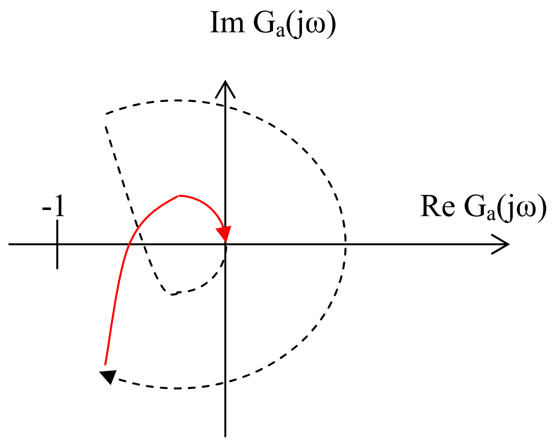
3) il criterio di Nyquist non vale solo per sistemi la cui funzione di trasferimento sia razionale e fratta, ma anche per sistemi che che presentino ritardi puri e quindi termini esponenziali

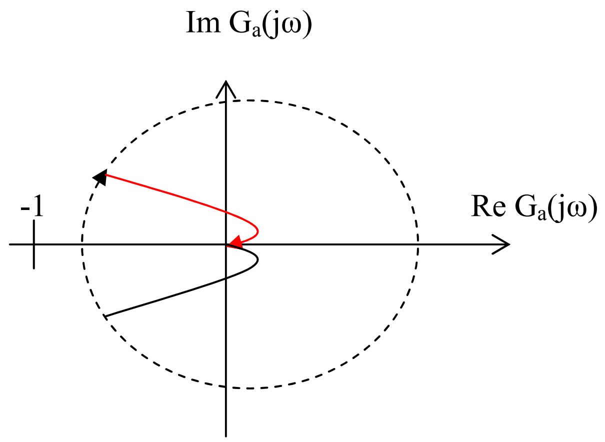
Nel caso di sistemi di tipo zero, il diagramma di Nyquist è di tipo chiuso:





Nel caso di sistemi di tipo 1 o 2 o superiore i diagrammi polari presentano rami all'infinito e pertanto i corrispondenti diagrammi di Nyquist non risultano chiusi.
Se tuttavia si conviene di completare questi diagrammi con una semicirconferenza (o una circonferenza) all'infinito percorsa in senso orario, anche questi diagrammi si possono considerare chiusi con andamenti di questo tipo:





Il criterio di Nyquist permette di studiare l'influenza sulla stabilità delle variazioni dei parametri del sistema anche se non permette di dare valutazioni generali di robustezza della stabilità
Particolarmente importante è l'influenza sulla stabilità della costante di guadagno d'anello k, infatti al crescere di k il diagramma polare tende ad avvicinarsi al punto critico -1, conseguentemente aumentando k diminuisce l'errore a regime ma il sistema tende all'instabilità

<u>CONSIDERAZIONI</u>

Per fornire una misura della distanza del diagramma di Nyquist dal punto critico sono introdotti i *margini di stabilità*:

- *margine di fase* m_f: l'angolo che, per ottenere il valore $-\Pi$, occorre sottrarre alla fase della funzione di risp armonica di anello in corrispondenza della pulsazione per la quale il suo modulo assume valore unitario.
  Questa pulsazione è detta pulsazione di guadagno unitario o di incrocio con riferimento al diagramma di Bode delle ampiezze che, in corrispondenza a questa pulsazione, interseca l'asse delle ascisse

- *margine di ampiezza* m_a: l'inverso del guadagno di anello in corrispondenza della pulsazione cui corrisponde l'angolo di fase $-\Pi$

Il criterio di Nyquist è un criterio a tutto o a niente, cioè dà informazioni solo sul fatto che il sistema sia stabile o meno, ma non dà informazioni circa la criticità della stabilità

- se la funzione di risp armonica di anello passa vicino al punto critico, la stabilità è certamente critica, dato che piccole variazioni di alcuni parametri possono fare in modo che la funzione di risp armonica stessa vada a toccare il punto critico
- tuttavia non è vero il viceversa: se la funzione di risp armonica si mantiene lontana dal punto critico, ciò non significa affatto che la stabilità non possa essere critica

LUOGHI AD M E AD N COSTANTI

Come per la stabilità sarebbe assai utile che anche le altre specifiche (prontezza, ampiezza delle oscillazioni, ecc.) potessero essere date con riferimento alla funzione di risp armonica d'anello piuttosto che alla funzione di risposta armonica del sistema di controllo in retroazione.
A questo scopo sono introdotti i luoghi ad M e ad N costanti, diagrammi che permettono di passare dalla funzione di risp armonica di anello a quella del sistema in retroazione

CARATTERISTICHE FREQUENZIALI DI UN SISTEMA DEFINITE CON RIFERIMENTO ALLA SUA FUNZIONE DI RISPOSTA ARMONICA

Nel caso di un sistema dinamico, lineare, stazionario di tipo SISO, le caratteristiche più frequentemente impiegate per valutare il comportamento della risposta al gradino unitario del sistema stesso sono:

- massima sovraelongazione
- tempo di salita
- istante di massima sovraelongazione
- tempo di assestamento

dove le ultime tre grandezze sono quelle che definiscono la prontezza di un sistema, e minori sono i valori assunti da queste tre grandezze più pronto risulta il sistema

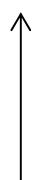
Quando si usa come modello del sistema la sua funzione di risposta armonica, cioè una funzione la cui variabile indipendente è la pulsazione, le caratteristiche che descrivono il comportamento del sistema devono essere espresse nel dominio delle frequenze.
Le caratteristiche frequenziali più usate e le correlazioni che esse presentano con le caratteristiche nel dominio dei tempi sono le seguenti:

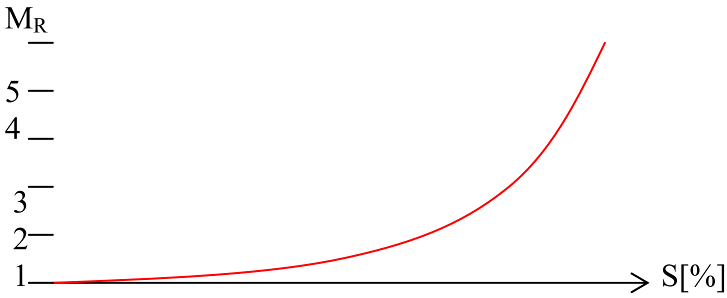
***Picco di risonanza M_R* (massima sovraelongazione)**

DEF. Il picco di risonanza M_R della funzione di risposta armonica di un sistema è il rapporto tra il massimo valore del modulo ed il valore di quest'ultimo per frequenza nulla

La caratteristica nel dominio dei tempi che più risulta correlata con il picco di risonanza è la massima sovraelongazione, tuttavia la determinazione di un legame analitico tra queste due grandezze risulta semplice solo nel caso di sistemi del secondo ordine, mentre per sistemi di ordina superiore bisogna ricorrere a formule costruite empiricamente

- sistemi del secondo ordine senza zeri
  in un sistema del secondo ordine senza zeri sia il picco di risonanza che la massima sovraelongazione dipendono soltanto dal coefficiente di smorzamento, pertanto tra queste due grandezze esiste una corrispondenza biunivoca del seguente tipo:





conseguentemente dalla misura del picco di risonanza è facile risalire ad una stima della sovraelongazione
d'altra parte per $1/\sqrt{2} <= \delta <= 1$ il diagramma di Bode delle ampiezze di un sistema del II ordine senza zeri non presenta un massimo (quindi il picco di risonanza è unitario), e per questi valori di δ il valore della massima sovraelongazione è certamente piccolo ma non è possibile determinarlo esattamente

- <u>sistemi di ordine qualunque</u>

Nel caso di sistemi di ordine superiore al secondo, per esprimere il legame tra picco di risonanza e massima sovraelongazione esistono molte relazioni empiriche , una delle quali è:

$$S \approx M_R - 1$$

che è utilizzabile solo nel caso $1{,}02 < M_R < 1{,}25$

Larghezza di banda ω_f (prontezza del sistema)

DEF. La larghezza di banda ω_f (o banda passante) di una funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ è misurata dalla pulsazione ω_f (detta pulsazione di taglio) alla quale il modulo della sua funzione di risposta armonica si riduce nel rapporto $1/\sqrt{2}$ rispetto al suo valore per frequenza nulla

La caratteristica nel dominio dei tempi che più risulta correlata con la larghezza di banda è la prontezza del sistema: più ampia è la banda passante del sistema, maggiore è la possibilità che le componenti ad alta frequenza in ingresso non vengano attenuate attraversando il sistema e che quindi, il tempo di salita e l'istante di massima sovraelongazione della funzione di uscita risultino ridotti.
Quanto alla possibilità di determinare un legame analitico tra la larghezza di banda ed i tempi di salita, di assestamento e l'istante di massima sovraelongazione, è semplice solo per sistemi fino al secondo ordine.

- <u>sistemi del secondo ordine senza zeri</u>

in un sistema del secondo ordine la pulsazione di taglio assume l'espressione:

$$\omega_f = \omega_n \sqrt{[(1-2\delta^2) + \sqrt{(4\delta^4 - 4\delta^2 + 2)}\,]}$$

- per una data pulsazione naturale ω_n, la larghezza di banda, come il picco di risonanza, diminuisce al crescere del coefficiente di smorzamento, quindi a parità di pulsazione naturale la larghezza di banda cresce al crescere del picco di risonanza
- la larghezza di banda è direttamente proporzionale a ω_n
- il legame tra larghezza di banda e tempo di assestamento è:
  $\omega_f = (3 / t_a \cdot \delta) \sqrt{[(1-2\delta^2) + \sqrt{(4\delta^4 - 4\delta^2 + 2)}\,]}$
- il legame tra larghezza di banda e istante di massima sovraelongazione è:

$\omega_f = (\Pi / t_m \sqrt{(1-\delta^2)}) \ \sqrt{[(1-2\delta^2) + \sqrt{(4\delta^4 - 4\delta^2 + 2)}]}$

• il legame tra larghezza di banda e tempo di salita è:

$\omega_f \approx (1{,}8 / t_s \cdot (1{,}5 - \delta)) \ \sqrt{[(1-2\delta^2) + \sqrt{(4\delta^4 - 4\delta^2 + 2)}]}$

Quindi in un sistema del secondo ordine, al crescere della larghezza di banda diminuiscono sia il tempo di salita sia il tempo di assestamento sia l'istante di massima sovraelongazione, cioè aumenta la prontezza del sistema.
Ovviamente per la valutazione di questi tempi a partire dalla funzione di risp armonica del sistema è necessario determinare anche il picco di risonanza dal quale si può ottenere il coefficiente di smorzamento

- sistemi di ordine qualunque

nel caso di sistemi di ordine superiore al secondo esistono molte relazioni per esprimere il legame tra larghezza di banda e tempo di salita, una delle più usate è data da:

$t_s = 2\Pi k / \omega_f$ dove $0{,}3 <= k <= 0{,}5$

Pulsazione di risonanza ***(prontezza del sistema)***

DEF. La pulsazione ω_R alla quale si ha il picco di risonanza è dette pulsazione di risonanza

La caratteristica nel dominio dei tempi che più risulta correlata con la pulsazione di risonanza è la prontezza del sistema.
Per sistemi del secondo ordine è facile ottenere relezioni tra ω_f e i tempi che caratterizzano la prontezza del sistema, ma queste sono utilizzabili solo per $0 <= \delta <= 1/\sqrt{2}$, dato che per valori maggiori il picco di risonanza e quindi la pulsazione di risonanza non esistono
Questa è la ragione per cui la pulsazione di risonanza viene usata poco per determinare la prontezza del sistema e si preferisce usare la larghezza di banda

CARATTERISTICHE FREQUENZIALI DI UN SISTEMA IN RETROAZIONE DEFINITE CON RIFERIMENTO ALLA SUA FUNZIONE DI RISPOSTA ARMONICA DI ANELLO

Le caratteristiche frequenziali descritte precedentemente fanno riferimento alla funzione di risp armonica del sistema e sono usate per definire il comportamento del sistema (la sua analisi)
Se invece queste caratteristiche sono assunte come specifiche di progetto nel caso di un sistema di controllo in retroazione, non è facile capire come si debbano modificare le parti che effettuano le manipolazioni simboliche affinché il sistema assuma il comportamento desiderato.
Assai più semplici sono le cose se le specifiche sono date con riferimento alla funzione di risp armonica d'anello:

Margine di fase m_f ***(massima sovraelongazione)***

DEF. l'angolo che, per ottenere il valore –Π, occorre sottrarre alla fase della funzione di risp armonica di anello in corrispondenza della pulsazione per la quale il suo modulo assume valore unitario.

La caratteristica nel dominio dei tempi che più risulta correlata con il margine di fase è la massima sovraelongazione, tuttavia la determinazione di un legame analitico tra queste due grandezze risulta semplice solo nel caso di sistemi del secondo ordine, mentre per sistemi di ordina superiore bisogna ricorrere a formule costruite empiricamente

- <u>sistemi del secondo ordine senza zeri</u>
  il margine di fase di un sistema del secondo oridine è dato da:

$$m_f = \text{arctg} \frac{2\delta}{\sqrt{[-2\delta^2 + \sqrt{(1 + 2\delta^4)}]}}$$

  cioè dipende solo dal coefficiente di smorzamento, quindi siccome anche la massima sovraelongazione dipende solamente dal coefficiente di smorzamento, esiste una corrispondenza biunivoca tra margine di fase e massima sovraelongazione
  Conseguentemente disponendo della funzione di risp armonica d'anello di un sistema del secondo ordine si può misurare il margine di fase e da questo risalire al coefficiente di smorzamento, dal quale è possibile passare alla massima sovraelongazione

- <u>sistemi di ordine qualunque</u>
  nel caso di sistemi di ordine superiore al secondo per esprimere il legame tra margine di fase e massima sovraelongazione si può ricorrere a formule empiriche ricavate utilizzando i luoghi a M costante

<u>Pulsazione di guadagno unitario</u> (prontezza del sistema)

DEF. La pulsazione di guadagno unitario ω_A (o di incrocio) è la pulsazione in corrispondenza della quale il cerchio unitario incrocia il diagramma polare della funzione di risp armonica d'anello

La caratteristica nel dominio dei tempi che più risulta correlata con la pulsazione di guadagno unitario è la prontezza del sistema, tuttavia la determinazione di un legame analitico tra queste due grandezze risulta semplice solo nel caso di sistemi del secondo ordine, mentre per sistemi di ordina superiore bisogna ricorrere a formule costruite empiricamente

- <u>sistemi del secondo ordine senza zeri</u>
  in un sistema del secondo ordine la pulsazione di guadagno unitario è data da:

$$\omega_A = \omega_n \sqrt{[-2\delta^2 + \sqrt{(1 + 4\delta^4)}]}$$

  analogamente a quanto fatto per la larghezza di banda è possibile determinare il tempo di assestamento, quello di salita e l'istante di massima sovraelongazione in funzione di ω_A e del coefficiente di smorzamento

- <u>sistemi di ordine qualunque</u>
  nel caso di sistemi di ordine superiore al secondo per esprimere il legame tra pulsazione di guadagno e prontezza si può ricorrere a formule empiriche ricavate utilizzando i luoghi a M costante

OSSERVAZIONE
Il margine di fase è correlato con la pendenza, in corrispondenza della pulsazione di guadagno unitario, del diagramma di Bode delle ampiezze della funzione di risp armonica di anello

LA SINTESI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE DEI SINTEMI DI CONTROLLO SISO

La maggior parte dei regolatori si possono progettare anche nel dominio delle frequenze, utilizzando le specifiche precedentemente viste.
Il principale vantaggio di questa modalità di sintesi è dato dal fatto che essa rimane sostanzialmente la stessa qualunque sia l'ordine del sistema dato.
Di contro la precisione del progetto risulta piuttosto modesta, a causa del fatto che il legame tra le specifiche nel dominio dei tempi e quelle nel dominio delle frequenze presenta una scarsa approssimazione.
Va inoltre notato che non c'è nessuna specifica nel dominio delle frequenze che corrisponda a una condizione sul tempo di assestamento.

Analogamente a quanto visto per la sintesi nel dominio dei tempi, anche nel caso della sintesi nel dominio delle frequenze i regolatori possono essere disposti in catena diretta e in retroazione.
Per ragioni di semplicità esaminiamo sistemi nei quali la funzione di trasferimento del dispositivo di trasduzione si possa ritenere di tipo algebrico e la funzione di trasferimento $G_s(s)$ del plant, non solo sia senza zeri, ma presenti soltanto poli reali.
Per effettuare la sintesi nel dominio delle frequenze è necessario disporre dei diagrammi frequenziali dei regolatori che si vogliono impiegare.

regolatori std → nel dominio dei tempi

reti corretrici → nel dominio delle frequenze

Reti corretrici: sistemi dinamici di ordine max 2 (2 poli), introdotti nel sistema in catena diretta a valle del comparatore, la cui funzione di trasferimento contiene dei parametri che modificano le caratteristiche del sistema: scegliendo opportunamente questi parametri si possono raggiungere le specifiche sul sistema

Reti più utilizzate:

a. rete anticipatrice
b. rete ritardatrice

c. rete anticipo/ritardo

RETI DI TIPO ANTICIPO

Le reti di tipo anticipo sono fondamentalmente quella derivatrice e quella anticipatrice:

funzione di trasferimento della rete derivatrice: $G_r(s) = k_p\ (\ s\ /\ 1+\ \tau\cdot s)$

funzione di trasferimento della rete anticipatrice: $G_r(s) = K_p\ [(1+\tau\cdot s)\ /\ (1+\alpha\cdot\tau\cdot s)]$ $\alpha < 1$

RETE ANTICIPATRICE

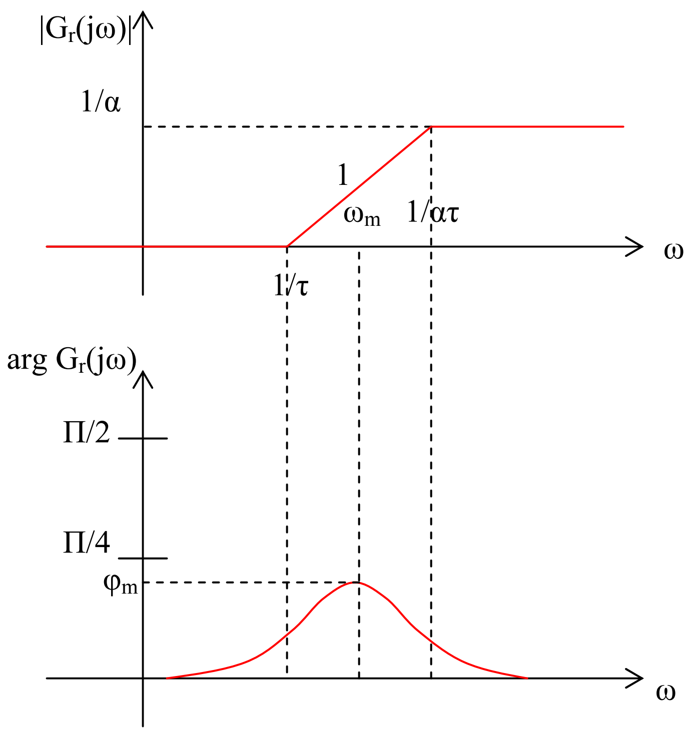
$$\boxed{G_r(s) = K_p \frac{(1+\tau\cdot s)}{(1+\alpha\cdot\tau\cdot s)}}$$

$\alpha < 1$

K_P costante di proporzionalità

il progetto viene fatto mettendo a posto prima la stabilità e gli errori a regime (usando k_p) e infine il comportamento dinamico (usando τ e α)

diagrammi di Bode della rete anticipatrice (con $k_p = 1$):



la rete anticipatrice anticipa la fase per tutte le pulsazioni finite, in particolare per pulsazione nulla essa non sfasa e non amplifica mentre per pulsazione infinita essa non sfasa e amplifica di $1/\alpha$

il massimo anticipo di fase in funzione del parametro α è:

$$\boxed{\varphi_m = \text{arcsen}\ \frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

il valore della pulsazione ω_n in corrispondenza della quale si ha tale massimo é:

$\omega_m = 1 / (\tau \sqrt{\alpha})$

⇨ la rete anticipatrice dando un'amplificazione e un anticipo di fase serve nei sistemi che hanno bisogno di aumentare la prontezza

RETI DI TIPO RITARDO

Le reti di tipo ritardo sono fondamentalmente quella integratrice e quella ritardatrice:

funzione di trasferimento della rete integratrice: $G_r(s) = k_p\ (\ 1 / 1+ \tau \cdot s)$

funzione di trasferimento della rete ritardatrice: $G_r(s) = K_p\ [(1+\tau \cdot s) / (1+\alpha \cdot \tau \cdot s)]$ $\alpha > 1$

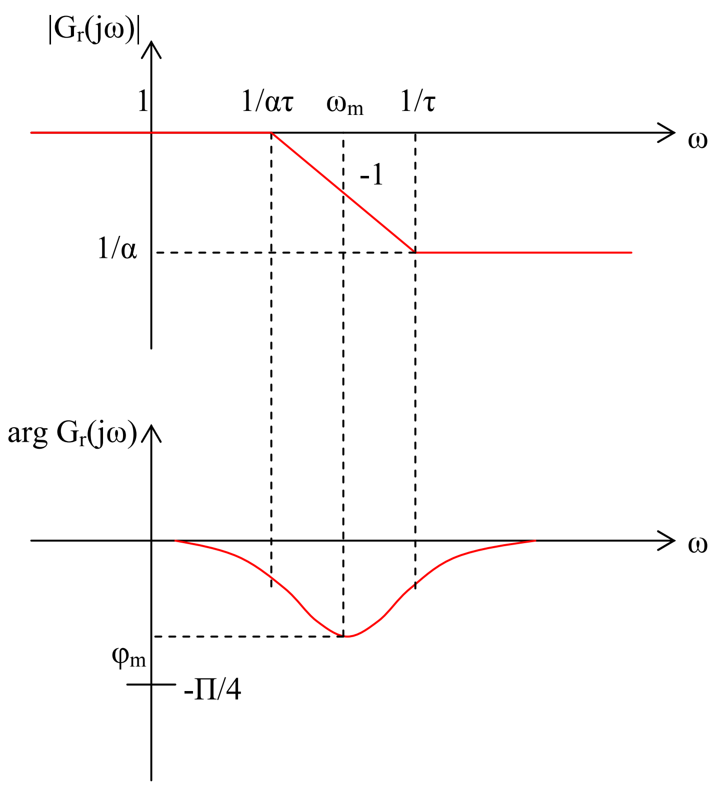
RETE RITARDATRICE

$$\boxed{G_r(s) = K_p \frac{(1+\tau \cdot s)}{(1+\alpha \cdot \tau \cdot s)}}$$

$\alpha > 1$

K_P costante di proporzionalità

diagrammi di Bode della rete ritardatrice (con $k_p = 1$):



la rete ritardatrice ritarda la fase per tutte le pulsazioni finite, in particolare per pulsazione nulla essa non sfasa e non amplifica mentre per pulsazione infinita essa non sfasa e attenua di $1/\alpha$

il massimo ritardo di fase in funzione del parametro α è:

$$\boxed{\varphi_m = -\operatorname{arcsen} \frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

⇨ la rete ritardatrice dando un'attenuazione e un ritardo di fase serve nei sistemi molto pronti e quindi molto oscillatori per ridurre la prontezza

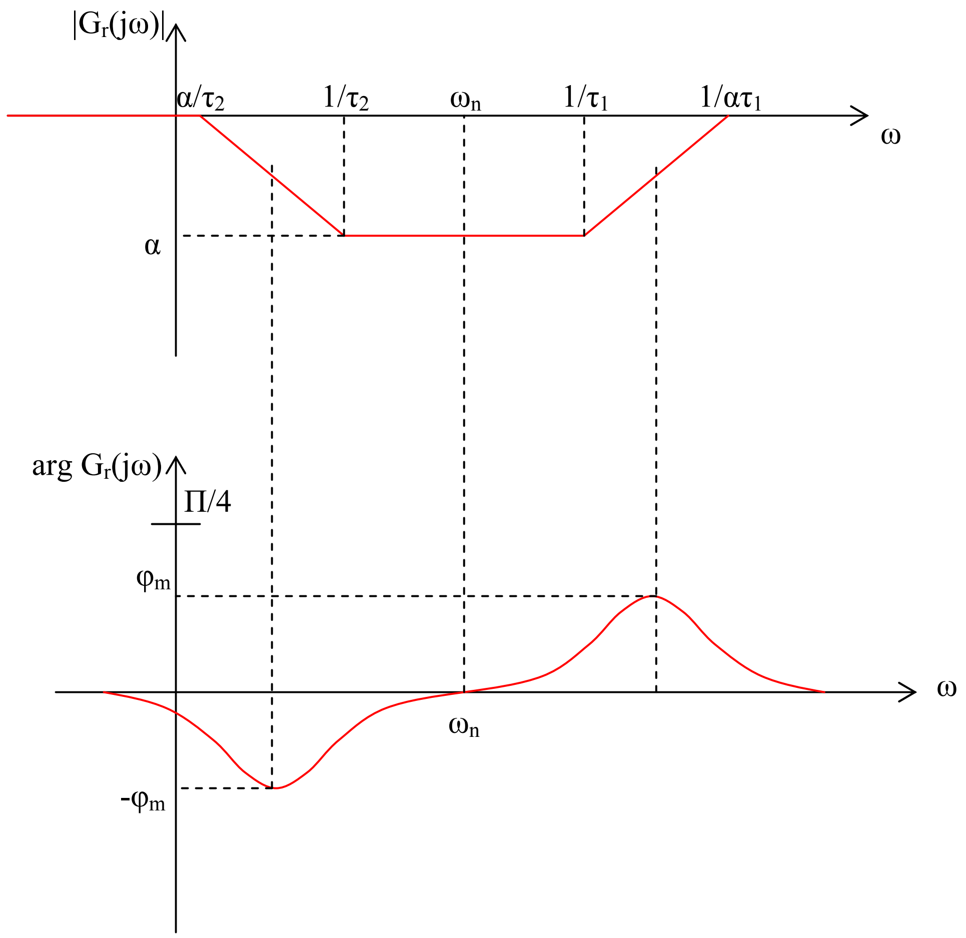
Le reti di tipo ritardo e di tipo anticipo, se progettate nel dominio delle frequenze, sono usate quasi sempre singolarmente, e non in cascata come nel dominio dei tempi

RETE DI TIPO ANTICIPO-RITARDO

$$\boxed{G_r(s) = K_p \frac{(1+\tau_1 \cdot s)\,(1+\tau_2 \cdot s)}{(1+\alpha \cdot \tau_1 \cdot s)\,(1+(\tau_2/\alpha) \cdot s)}}$$

$\alpha < 1$
K_P costante di proporzionalità

supponendo $\tau_1 < \tau_2$ e $k_p = 1$ i diagrammi di Bode della rete anticipo-ritardo sono:



$-\Pi/4$

la pulsazione per la quale la rete presenta sfasamento nullo vale: $\omega_n = 1 / \sqrt{(\tau_1\tau_2)}$

in corrispondenza a questa pulsazione l'attenuazione della rete vale: $|G_r(j\omega)| = \frac{(\tau_1+\tau_2)}{[\alpha\tau_1+(\tau_2/\alpha)]}$

che nel diagramma di Bode viene approssimato con α

⇨ la rete anticipo-ritardo si usa quando bisogna soddisfare molti obiettivi, perchè ha diversi parametri su cui è possibile agire