

# Appunti di Controlli Automatici 1

## Capitolo 7 – parte I

### Criterio di stabilità di Nyquist

<i>Introduzione</i> .....	1
<i>Premesse teoriche</i> .....	2
<i>Enunciato del criterio di stabilità di Nyquist</i> .....	5
Criterio di Nyquist in forma ridotta .....	8
Metodo del “raggio vettore” .....	8
Esempio .....	10
Caso particolare: presenza di un polo nell’origine.....	15
Caso particolare: presenza di un polo a parte reale positiva .....	19

## Introduzione

Il problema fondamentale che si presenta quando si progetta un **dispositivo di controllo** è il seguente: *dato un sistema in anello aperto, del quale si conosce il comportamento dinamico (quindi essenzialmente la stabilità), si vuole studiare il comportamento dinamico dello stesso sistema chiuso in un anello di retroazione.*

In relazione a questo problema, il **criterio di stabilità di Nyquist** costituisce un valido aiuto, in quanto consente di stabilire se un sistema, del quale si conosce (per esempio grazie a misure sperimentali) la risposta armonica  $G(j\omega)$  ad anello aperto, sia stabile o meno una volta chiuso in retroazione.

Data la sua natura sostanzialmente grafica, il criterio di Nyquist risulta di notevole aiuto per il progettista: infatti, oltre a fornire indicazioni sulla stabilità del sistema in retroazione (a tal fine sarebbe sufficiente l’impiego del solo criterio di Routh), questo criterio costituisce anche, come vedremo, un’utile guida per giudicare l’efficacia di possibili interventi che, attraverso opportune modifiche della funzione di risposta armonica ad anello aperto, migliorino il comportamento dinamico del sistema in retroazione.

L’enunciato del *criterio di stabilità di Nyquist* risulta molto semplice qualora ci si limiti a considerare sistemi che non presentino né poli né zeri immaginari, escluso al più un polo semplice o doppio nell’origine (che, come si è visto in precedenza, spesso viene volutamente introdotto per migliorare il comportamento a regime del sistema): ci limiteremo, perciò, a considerare questi casi al fine di non complicare eccessivamente l’applicazione di un criterio che trae appunto dalla sua semplicità i più forti motivi di interesse.

## Premesse teoriche

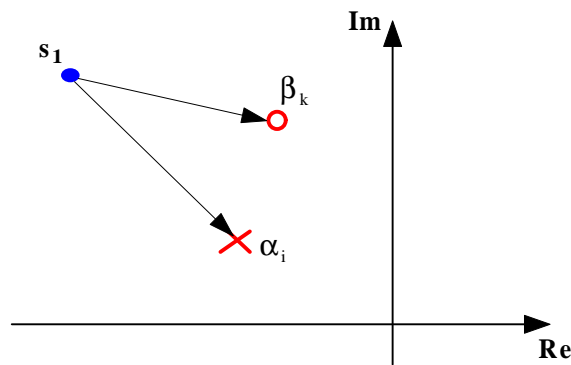
Per comprendere il criterio di Nyquist, dobbiamo premettere alcuni fondamentali concetti teorici.

Consideriamo una generica funzione razionale  $Q(s)$  del tipo seguente:

$$Q(s) = \frac{(s - \beta_1)(s - \beta_2) \dots (s - \beta_p)}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots (s - \alpha_q)}$$

Ogni fattore, sia a numeratore sia a denominatore, di questa funzione rappresenta, geometricamente, un vettore come quelli rappresentati nella figura di prima.

Scelti un generico polo  $\alpha_i$  e un generico zero  $\beta_k$  di questa funzione, li riportiamo nel piano di Gauss e congiungiamo ciascuno di essi con un generico altro punto  $s_1$ , come nella figura seguente:



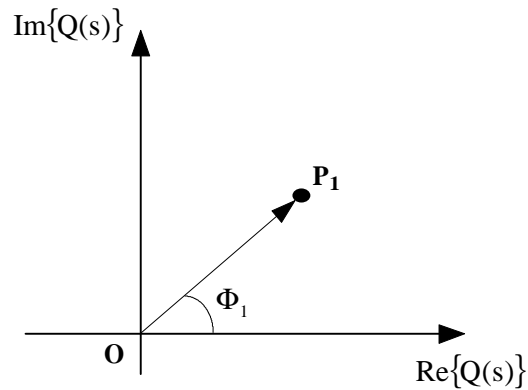
Adesso calcoliamo la funzione  $Q(s)$  proprio in  $s_1$ :

$$Q(s_1) = \frac{(s_1 - \beta_1)(s_1 - \beta_2) \dots (s_1 - \beta_p)}{(s_1 - \alpha_1)(s_1 - \alpha_2) \dots (s_1 - \alpha_q)}$$

La quantità  $Q(s_1)$  è dunque un numero, in generale complesso. Immaginiamo allora di riuscire a separare la quantità  $Q(s_1)$  in una parte reale e in una parte immaginaria:

$$Q(s_1) = \text{Re}\{Q(s_1)\} + j \text{Im}\{Q(s_1)\}$$

Consideriamo ora un altro piano cartesiano: in ascisse riportiamo  $\text{Re}\{Q(s)\}$ , mentre in ordinate riportiamo  $\text{Im}\{Q(s)\}$ :



Il punto  $P_1$  riportato corrisponde appunto ai valori  $\text{Re}\{Q(s_1)\}$  e  $\text{Im}\{Q(s_1)\}$ .

Tramite questo piano, detto **piano-Q** (in quanto vi riportiamo i valori di  $Q(s)$ ) o tramite dei semplici conti analitici, è immediato ricavare il modulo  $\overline{OP_1} = |Q(s_1)|$  e la fase  $\Phi_1 = \arg Q(s_1)$  della quantità  $Q(s_1)$ .

In definitiva, quindi, abbiamo trovato una corrispondenza tra un qualunque punto  $s_1$  nel piano di Gauss ed il punto  $P_1$  nel piano-Q. Ci chiediamo se questa corrispondenza sia biunivoca: evidentemente no, in quanto, *mentre a ciascun punto  $s_1$  del piano di Gauss corrisponde un solo punto  $P_1$  nel piano-Q, non è vero il contrario*, nel senso che ad un generico punto  $P_1$  nel piano-Q possono corrispondere anche più punti nel piano di Gauss.

Facciamo un esempio concreto per comprendere il fatto che non esiste necessariamente una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano di Gauss ed i punti del piano-Q: consideriamo la funzione

$$Q(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Prendiamo nel piano-Q il punto  $P_1 = 5 + j0$ , cui corrispondono quindi i valori  $\overline{OP_1} = |Q(s_1)| = 5$  e  $\Phi_1 = \arg Q(s_1) = 0$ .

Il modulo di  $Q(s)$ , ricavato dall'espressione analitica di tale funzione, è

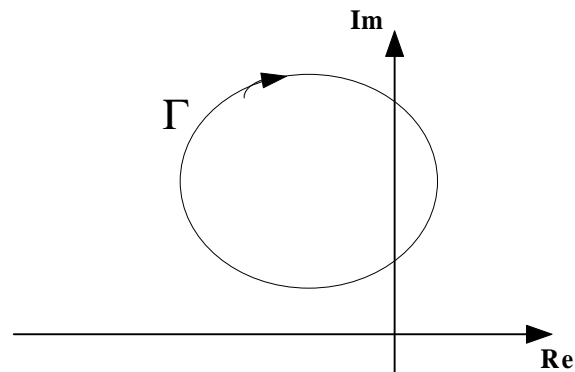
$$|Q(s)| = \left| \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right|$$

Imponiamo che questo modulo sia uguale a 5, in modo da ricavare  $s_1$ :

$$(s+1)(s+2)(s+3) = \frac{1}{5} = 0.2$$

Questa è una equazione di 3° grado, che quindi ammette 3 diverse soluzioni: siamo cioè nella situazione per cui a ciascun punto del piano-Q corrispondono 3 diversi punti del piano di Gauss.

Consideriamo adesso nuovamente il piano di Gauss generale e, in particolare, una generica **curva**  $\Gamma$  al suo interno. Su questa curva stabiliamo un **verso di percorrenza**, che può essere ad esempio quello orario (ma non necessariamente):

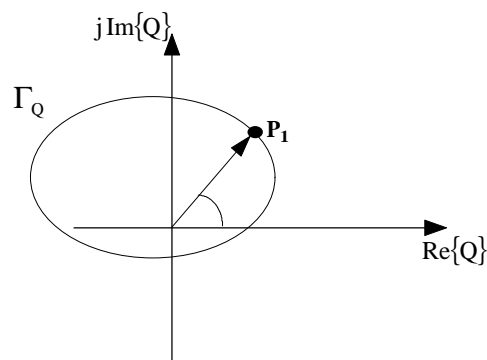


Facciamo una importante ipotesi su tale curva: essa non deve passare né per uno zero né per un polo della funzione  $Q(s)$  di partenza.

Diremo invece che *la curva  $\Gamma$  abbraccia uno zero (risp. un polo) se tale zero (risp. polo) appartiene alla superficie delimitata dalla curva stessa, ossia si trova all'interno della curva.*

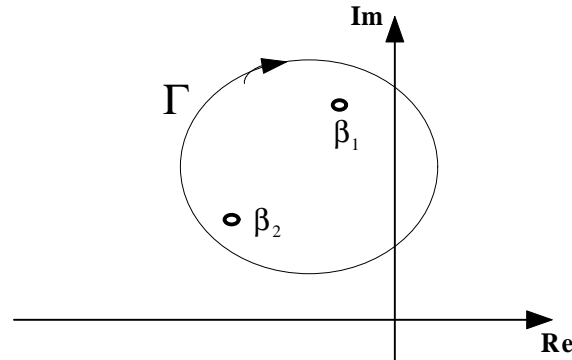
Supponiamo ora di porre un punto esploratore  $s_1$  sulla curva  $\Gamma$  e supponiamo di farlo muovere lungo questa curva secondo il verso di percorrenza da noi fissato. In base a quanto visto prima, ad ogni posizione del punto  $s_1$  sulla curva, corrisponde un punto  $P_1$  sul piano- $Q$ : muovendosi  $s_1$ , si muove anche  $P_1$ , descrivendo a sua volta una curva che chiamiamo  $\Gamma_Q$ .

In particolare, dato che  $s_1$  torna, dopo un giro completo, nella posizione iniziale, anche  $P_1$  deve tornare nella posizione iniziale, per cui anche  $\Gamma_Q$  sarà una curva chiusa, come per esempio quella indicata nella figura seguente:



E' importante precisare che il modulo del vettore  $\overline{OP_1}$  varia al variare di  $s_1$  sulla curva  $\Gamma$ , per cui la curva  $\Gamma_Q$  non necessariamente ha una forma regolare come quella di una circonferenza o una ellisse o altro.

Accertato comunque che  $\Gamma_Q$  sia una curva chiusa, facciamo una ulteriore ipotesi: supponiamo che la curva  $\Gamma$  nel piano di Gauss racchiuda due zeri  $\beta_1$  e  $\beta_2$  della funzione  $Q(s)$ :



In questo caso, si può dimostrare analiticamente che, a seguito di una rotazione completa di  $s_1$  lungo  $\Gamma$ , il vettore  $\overline{OP_1}$  nel piano-Q compie due rotazioni complete in senso orario.

Il discorso è, anzi, ancora più generale: se la curva  $\Gamma$  nel piano di Gauss abbraccia un numero  $Z$  di zeri, il vettore  $\overline{OP_1}$  nel piano-Q compie  $Z$  rotazioni complete in senso orario.

In modo del tutto analogo, se la curva  $\Gamma$  nel piano di Gauss abbraccia un numero  $P$  di poli, il vettore  $\overline{OP_1}$  nel piano-Q compie  $P$  rotazioni complete in senso antiorario.

In definitiva, vale il seguente risultato fondamentale: se la curva  $G$  nel piano di Gauss abbraccia un numero  $P$  di poli e un numero  $Z$  di zeri, il vettore  $\overline{OP_1}$  nel piano-Q compie  $P$  rotazioni complete in senso antiorario e  $Z$  rotazioni complete in senso orario. Nel complesso, quindi, indicato con  $N$  il numero di giri compiuti dal vettore  $\overline{OP}$  nel piano-Q, risulterà

$$\boxed{N = P - Z}$$

dove il **segno di  $N$**  indica se sono percorsi più giri in senso antiorario ( $N$  positivo) oppure più giri in senso orario ( $N$  negativo).

La conclusione da trarre è la seguente: se individuiamo quante rotazione orarie (risp. antiorarie) compie il vettore  $\overline{OP_1}$  nel piano-Q, siamo in grado di stabilire quanti zeri (risp. poli) della funzione  $Q(s)$  sono abbracciati dalla curva  $\Gamma$  da noi fissata arbitrariamente nel piano di Gauss. Questo principio va sotto il nome di **principio dell'argomento**.

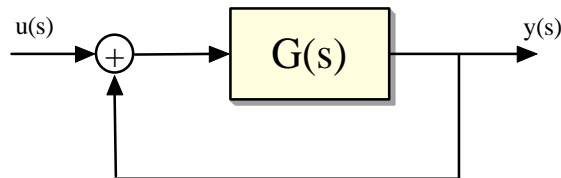
## Enunciato del criterio di stabilità di Nyquist

Quelle espone nel paragrafo precedente sono dunque le premesse teoriche che ci servono per enunciare il *criterio di stabilità Nyquist*.

Consideriamo un generico sistema avente la seguente funzione di trasferimento in anello aperto:

$$G(s) = k \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Supponiamo di chiudere questo sistema in un *anello di retroazione unitaria*:



Sappiamo che la *funzione di trasferimento ad anello chiuso* assume la seguente espressione:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{k \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i) + k \prod_{j=1}^m (s - z_j)}$$

Questa espressione evidenzia il fatto che la *retroazione non modifica la posizione degli zeri rispetto a quella in anello aperto, mentre invece influisce sulla posizione dei poli*.

I poli di  $G_0(s)$  non sono altro che gli zeri della funzione  $Q(s) = 1 + G(s)$ :

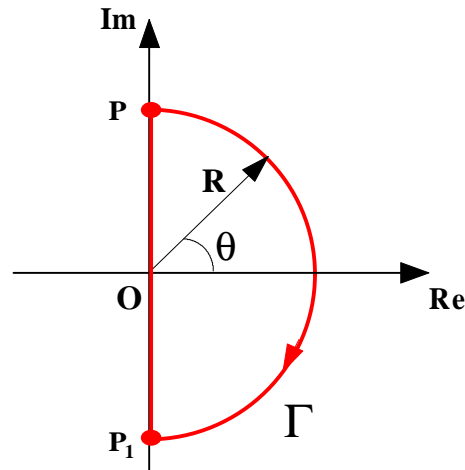
$$Q(s) = 1 + G(s) = 1 + k \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{\prod_{i=1}^n (s - p_i) + k \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Questa funzione  $Q(s)$  presenta gli stessi poli di  $G(s)$ , mentre sono diversi gli zeri: possiamo allora scriverla nella forma

$$Q(s) = \frac{\prod_{j=1}^n (s - z_{oj})}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

In base a questa espressione, possiamo affermare che *il sistema in anello chiuso sarà stabile se e solo se tutti gli zeri  $z_{o1}, z_{o2}, \dots, z_{on}$  della funzione  $Q(s)$  si trovano nel semipiano sinistro di Gauss*. Il nostro obiettivo è quello di individuare la posizione di questi zeri  $z_{o1}, z_{o2}, \dots, z_{on}$  nel piano di Gauss.

Con riferimento a quanto esposto nel paragrafo precedente, gli zeri  $z_{o1}, z_{o2}, \dots, z_{on}$  appena indicati non sono altro che le quantità che avevamo indicato con  $\beta_1, \beta_2, \dots$ . La differenza, con i discorsi fatti nel paragrafo precedente, è che, in questo caso, non conosciamo a priori il valore numerico di tali zeri. Allora, anziché considerare, come nel paragrafo precedente, una curva  $\Gamma$  generica nel piano di Gauss, consideriamo una curva  $\Gamma$  molto particolare, che prende il nome di **curva di Nyquist** ed è fatta nel modo seguente:



Si tratta di una semicirconferenza centrata nell'origine, di raggio  $R$ , tutta contenuta nel semipiano destro di Gauss (cioè con valori dell'angolo  $\theta$  compresi tra  $-\pi/2$  e  $+\pi/2$ ).

E' chiaro che, se facciamo tendere  $R$  ad infinito, la curva  $\Gamma$  abbraccia tutto il semipiano destro di Gauss. Ricordiamo, inoltre, che stiamo facendo l'ipotesi per cui questa curva  $\Gamma$  non passi né per uno zero né per un polo della funzione  $Q(s)$ .

Detto questo, applichiamo il **principio dell'argomento** esposto nel paragrafo precedente: fissato un punto esploratore  $s^*$  sulla curva  $\Gamma$ , ogni giro completo che tale punto compie lungo la curva corrisponde ad una rotazione completa del vettore  $\overline{OP^*}$  nel piano- $Q$  con  $P^*$  che si muove su una certa curva  $\Gamma_Q$ .

Indichiamo con  $P$  il numero di rotazioni antiorarie che il vettore  $\overline{OP^*}$  compie nel piano- $Q$  e con  $Z$  il numero di rotazioni orarie compiute dallo stesso vettore: in base a quanto detto nel paragrafo precedente, la quantità  $P$  corrisponde al numero di poli di  $Q(s)$  abbracciati dalla curva  $\Gamma$ , mentre la quantità  $Z$  corrisponde al numero di zeri di  $Q(s)$  abbracciati da tale curva. Tuttavia, dato che, per ipotesi, questa curva spazia solo sul semipiano destro di Gauss, deduciamo che  $P$  e  $Z$  rappresentano il numero, rispettivamente, di poli e di zeri di  $Q(s)$  a parte reale positiva.

D'altra parte, noi conosciamo numericamente i poli di  $Q(s)$ , in quanto corrispondono ai poli di  $G(s)$  che sono a noi noti, per cui conosciamo il numero  $P$  di poli di  $Q(s)$  a parte reale positiva. Resta quindi indeterminata solo la quantità  $Z$ , cioè il numero di zeri di  $Q(s)$  a parte reale positiva, ossia anche il numero di poli di  $G_0(s)$  a parte reale positiva. Avendo trovato prima che il sistema ad anello chiuso è stabile se e solo se  $G_0(s)$  non ha poli a parte reale positiva, possiamo concludere che il sistema ad anello chiuso è stabile se e solo se risulta  $Z=0$ , ossia quindi se  $N=P$ .

Questa è dunque una prima formulazione generale del **criterio di stabilità di Nyquist**.

## Criterio di Nyquist in forma ridotta

Esiste una *forma ridotta* del criterio di stabilità di Nyquist, che tiene conto delle seguenti considerazioni:

- abbiamo detto che la quantità  $P$  rappresenta il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento in anello aperto  $G(s)$ ;
- dire che  $P \neq 0$  equivale a dire che il sistema in anello aperto è instabile; tuttavia, nella maggior parte dei casi, il sistema ad anello aperto è di per sé stabile, ossia la funzione  $G(s)$  non presenta poli a parte reale positiva, ossia risulta  $P=0$ ;
- in aggiunta, stiamo supponendo che non ci siano poli di  $G(s)$  sulla curva di Nyquist, ossia poli immaginari: di conseguenza, dire che  $P=0$  significa dire, per le ipotesi fatte, che il sistema è asintoticamente stabile in anello aperto.

Allora, il **criterio di stabilità di Nyquist in forma ridotta** afferma che *un sistema asintoticamente stabile in anello aperto risulta asintoticamente stabile anche in anello chiuso se e solo se risulta  $Z=0$ , ossia quindi  $N=0$ .*

Dire che  $N=0$  significa dire che il vettore  $\overline{OP^*}$  non deve compiere alcuna rotazione completa nel piano- $Q$ : si capisce subito che questo può accadere solo se la curva  $\Gamma_Q$  non circonda l'origine del piano- $Q$ . Possiamo dunque esprimere anche in altro modo il **criterio di stabilità di Nyquist in forma ridotta**: *un sistema asintoticamente stabile in anello aperto risulta asintoticamente stabile anche in anello chiuso se e solo se la corrispondente curva  $G_Q$  non "circonda" l'origine del piano  $Q$ .*

## Metodo del "raggio vettore"

A questo punto, si pone il seguente problema: l'applicazione del criterio di stabilità di Nyquist esposto nei paragrafi precedenti presuppone la conoscenza o comunque la possibilità di tracciare la curva  $\Gamma_Q$ , ossia il modo con cui la funzione  $Q(s)=1+G(s)$  varia al variare di  $s$ ; noi, però, non conosciamo alcun particolare criterio per tracciare tale curva, se non quello di tracciarla per punti: fissati un certo numero di valori di  $s$ , calcoliamo per ognuno di essi il corrispondente valore di  $Q(s)$  e lo riportiamo nel piano  $Q$ . Questo metodo, però, è tutt'altro che comodo. Possiamo allora sfruttare il fatto che, partendo dalla relazione  $Q(s)=1+G(s)$ , risulta evidentemente

$$G(s) = Q(s) - 1$$

Questa relazione dice che, fissato un qualsiasi valore di  $s$ , il valore di  $G(s)$  si ricava da quello di  $Q(s)$  sottraendo l'unità. In modo del tutto equivalente, ciò significa che la curva  $\Gamma_G$  (nel piano- $G$ ) si ottiene dalla curva  $\Gamma_Q$  sottraendo, ad ogni punto, l'unità.

Allora, è evidente che *il numero di "rotazioni" che la curva  $G_Q$  compie intorno all'origine è esattamente pari al numero di "rotazioni" che la curva  $G_G$  compie intorno al punto  $s=-1$ .*



In base a questo, possiamo enunciare in altro modo ancora il **criterio di stabilità di Nyquist in forma ridotta**: *un sistema  $G(s)$  asintoticamente stabile in anello aperto risulta asintoticamente stabile anche in anello chiuso se e solo se la corrispondente curva  $\Gamma_G$  non "circonda" il punto  $-1$ .*

Diventa dunque cruciale, per l'applicazione del criterio di Nyquist, la capacità di tracciare la curva  $\Gamma_G$  nel piano-G (nel piano che cioè riporta in ascisse  $\text{Re}\{G\}$  e in ordinate  $\text{Im}\{G\}$ ); questa curva corrisponde ai valori assunti dalla funzione  $G(s)$  per  $s$  che varia sulla curva di Nyquist; quest'ultima si può dividere in due parti:

- la prima parte comprende i punti dell'asse immaginario, ossia i punti  $s=j\omega$  per  $\omega$  che varia tra  $-\infty$  a  $+\infty$ : allora, tracciare l'andamento di  $G(s)$  per  $s$  che varia sull'asse immaginario significa tracciare il **diagramma polare di  $G(j\omega)$** , per la costruzione del quale conosciamo le opportune regole;
- la seconda parte della curva di Nyquist comprende invece il percorso di  $s$  lungo la semicirconferenza (di raggio  $R$  tendente ad infinito): un punto generico  $s^*$  lungo questa semicirconferenza si può esprimere come  $s^* = Re^{j\theta}$ , dove  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ ; sostituendo allora nell'espressione di  $G(s)$  e trascurando i termini di ordine inferiore (dato che  $R \rightarrow \infty$ ), abbiamo che

$$G(s^*) = k \frac{R^m e^{jm\theta} + b_1 R^{m-1} e^{j(m-1)\theta}}{R^n e^{jn\theta} + a_1 R^{n-1} e^{j(n-1)\theta}} \cong kR^{m-n} e^{j(m-n)\theta}$$

In base a questa espressione, il modulo di  $G(s^*)$ , per  $s^*$  che varia sulla semicirconferenza, ossia per  $R \rightarrow \infty$ , va all'infinito anch'esso. Questo accade tranne nel caso limite in cui  $m=n$ : in questo caso, infatti, risulta  $G(s^*)=k$ , per cui il modulo vale  $k$  mentre la fase vale  $0$ .

In conclusione, per l'applicazione del **criterio di stabilità di Nyquist in forma ridotta** dobbiamo procedere nel modo seguente:

- l'ipotesi di partenza è che la funzione di trasferimento del sistema in anello aperto  $G(s)$  non abbia poli a parte reale positiva e, inoltre, non abbia singolarità situate sulla curva di Nyquist; il sistema in anello aperto deve cioè essere asintoticamente stabile
- possiamo in questo modo ricavare  $G(j\omega)$  da  $G(s)$  ponendo semplicemente  $s=j\omega$ ;
- successivamente, dobbiamo tracciare il diagramma polare di  $G(j\omega)$ , incluse le eventuali curve all'infinito;
- infine, dobbiamo verificare se il diagramma così costruito circonda o meno il punto  $-1$ , detto **punto critico**; se lo circonda, il sistema ad anello chiuso è instabile, mentre, in caso contrario, il sistema ad anello chiuso è stabile.

Se invece vogliamo metterci in un caso più generale (**criterio di stabilità di Nyquist in forma completa**), dobbiamo affermare quanto segue: *dato un sistema generico  $G(s)$  che, in anello aperto, presenta  $P$  poli a parte reale positiva ed un eventuale polo nell'origine, semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica*

stabilità in anello chiuso è che il diagramma polare completo di  $G(j\omega)$  circonda il punto critico  $P$  volte in senso orario.

In questo secondo caso, resta da capire, come ultimo problema, come determinare il numero di giri che il diagramma polare effettua intorno al punto critico  $s_c = -1$ . Esiste, a questo proposito, un metodo pratico che prende il nome di **metodo del raggio vettore**:

- si prende un vettore con il piede nel punto critico e la punta in un punto del piano-G scelto a proprio arbitrio;
- questo vettore interseca il diagramma polare (ossia la curva  $\Gamma_G$ ) in un certo numero di punti ed in ognuno di questi punti il diagramma presenta un certo verso di percorrenza;
- allora, si sommano algebricamente le intersezioni, associando valore +1 alle intersezioni in cui il diagramma ha verso di percorrenza orario e valore -1 a quelle in cui il diagramma ha verso di percorrenza antiorario;
- il risultato della somma algebrica è il numero di giri che il diagramma polare compie intorno al punto critico. Affinché il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile, la somma algebrica delle intersezioni deve risultare nulla.

## Esempio

Consideriamo un sistema avente la seguente funzione di trasferimento in anello aperto:

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)(1+2s)(1+5s)}$$

Vogliamo applicare il criterio di Nyquist per sapere se questo sistema è stabile in anello chiuso.

La prima cosa che osserviamo è che il sistema non presenta zeri e presenta tre poli reali negativi (quindi non presenta poli a parte reale positiva, ossia  $P=0$ ): si tratta, dunque, di un sistema asintoticamente stabile ad anello aperto, il che ci consente di applicare il *criterio di stabilità di Nyquist in forma ridotta*.

Determiniamo, allora, la funzione di risposta armonica di tale sistema: ci basta porre  $s=j\omega$ , per cui abbiamo che

$$G(s) = \frac{10}{(1+j\omega)(1+j2\omega)(1+j5\omega)}$$

Dobbiamo tracciare il diagramma polare di questa funzione, ossia l'andamento della parte reale e della parte immaginaria di  $G(j\omega)$  al variare di  $\omega$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Appliciamo allora le regole a noi ben note per la costruzione di tale diagramma: in particolare, sappiamo che ci basta costruire il diagramma per  $\omega \in (0^+, +\infty)$ , in quanto quello per  $\omega \in (-\infty, 0^-)$  si otterrà tramite un semplice ribaltamento del precedente rispetto all'asse delle ascisse.

Cominciamo dallo studio del diagramma alle basse frequenze, ossia per  $\omega \rightarrow 0^+$ , in modo da individuare il punto di partenza del diagramma: a livello del tutto generale,  $G(j\omega)$ , per  $\omega \rightarrow 0^+$ , può essere approssimata trascurando (sia a numeratore

sia a denominatore) i termini in  $j\omega$ , per cui, nel nostro caso,  $G(j\omega)$  può essere approssimata con

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 10$$

In base a questa espressione, deduciamo che il diagramma parte dal punto (10,0) situato sull'asse reale. Inoltre, dato sempre che  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 10 > 0$ , deduciamo che il diagramma ha, in tale punto, fase nulla.

Calcolando invece la fase di  $G(j\omega)$  per frequenze piccole ma non troppo, possiamo dedurre "come" il diagramma parte dal punto (10,0): dato che

$$G(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)(1+j2\omega)(1+j5\omega)} = \frac{10}{1+j8\omega-17\omega^2-j10\omega^3} \cong \frac{10}{1+j8\omega}$$

abbiamo che

$$\arg G(j\omega) = \arg(10) - \arg(1+j8\omega) = 0 - \arctg(8\omega) \cong -8\omega < 0$$

Avendo trovato una fase negativa, deduciamo che il diagramma polare parte dall'asse reale "scorrendo" in verso antiorario.

Passiamo al comportamento alle alte frequenze: dato che il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore (sistema passa-basso), abbiamo che

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg G(j\omega) = \varphi - (n-m)\frac{\pi}{2} = 0 - (3-0)\frac{\pi}{2} = -3\frac{\pi}{2}$$

dove  $\varphi = \arg\left(k_1 \frac{b_0}{a_\mu}\right) = 0$  è la fase di  $G(j\omega)$  calcolata per  $\omega \rightarrow 0^+$ .

Deduciamo dunque che il diagramma termina nell'origine con fase  $-3\pi/2$ , ossia tangente all'asse verticale.

A questo punto, possiamo per esempio determinare eventuali intersezioni della  $G(j\omega)$  con gli assi coordinati. A tal fine, conviene esprimere  $G(j\omega)$  separando la parte reale e la parte immaginaria: possiamo allora scrivere, eseguendo semplicemente i prodotti a denominatore, che

$$G(j\omega) = \frac{10}{(1-17\omega^2) + j\omega(8-10\omega^2)}$$

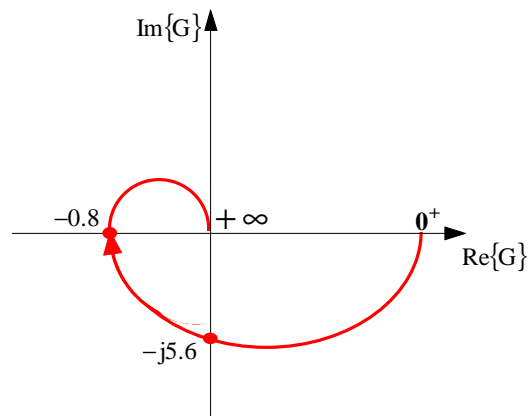
A questo punto, dobbiamo verificare se le due equazioni  $\text{Re}\{G(j\omega)\}=0$  e  $\text{Im}\{G(j\omega)\}=0$  ammettono una soluzione:

$$\text{Re}\{G(j\omega)\}=0 \rightarrow 1-17\omega^2=0 \rightarrow \omega_1 = \sqrt{1/17} \rightarrow G(j\omega_1) = -j5.6$$

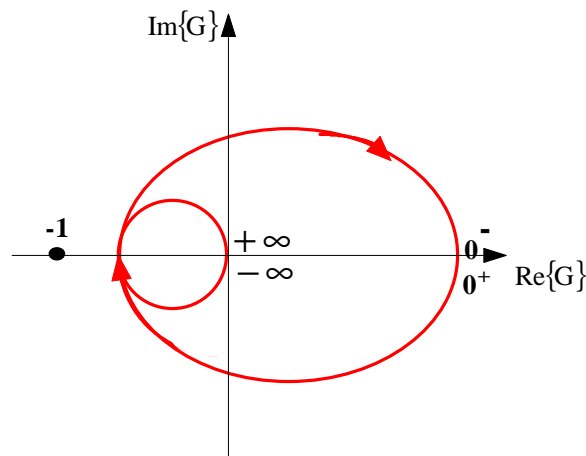
$$\text{Im}\{G(j\omega)\}=0 \rightarrow \omega(8-10\omega^2)=0 \rightarrow 8-10\omega^2=0 \rightarrow \omega_2 = \sqrt{0.8} \rightarrow G(j\omega_2) = -0.8$$

**Osservazione** - Per determinare gli eventuali valori di  $\omega$  in corrispondenza dei quali il diagramma polare interseca l'asse delle ascisse è anche possibile sfruttare il diagramma di Bode delle fasi: infatti, è chiaro che l'eventuale intersezione del diagramma polare con l'asse delle ascisse è un punto in cui la fase di  $G(j\omega)$  vale  $-\pi$ , mentre l'eventuale intersezione con l'asse delle ordinate è un punto in cui la fase di  $G(j\omega)$  ha fase  $-\pi/2$ .

Siamo a questo punto in grado di tracciare il diagramma polare relativo all'intervallo  $\omega \in (0^+, +\infty)$ :

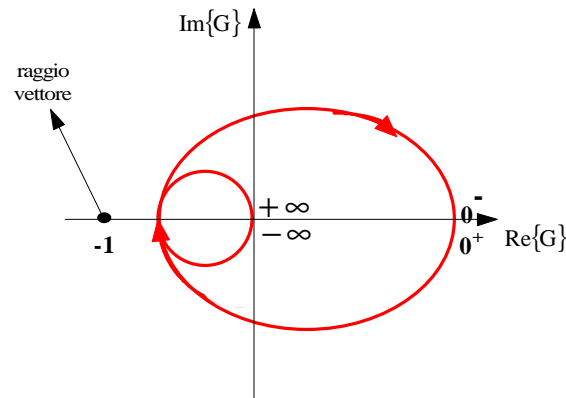


Il diagramma relativo all'intervallo  $\omega \in (-\infty, 0^-)$  si ottiene semplicemente ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, quello appena ottenuto, per cui concludiamo che il diagramma polare (ovviamente qualitativo) della funzione  $G(j\omega)$  considerata è fatto nel modo seguente:



A questo punto, possiamo applicare il *criterio di stabilità di Nyquist in forma ridotta* e lo possiamo fare in modo assolutamente immediato: infatti, osserviamo subito che il diagramma non "abbraccia" il punto critico, dal che deduciamo che il sistema in anello chiuso risulta asintoticamente stabile.

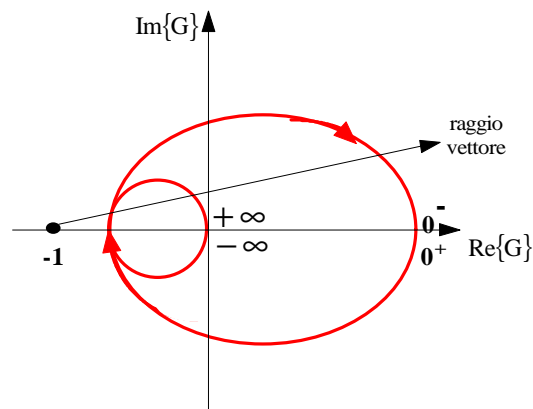
Se volessimo essere più rigorosi ed applicare il *metodo del raggio vettore*, potremmo procedere come illustrato nella figura seguente:



E' evidente che possiamo tracciare il vettore in modo che non intersechi mai il diagramma polare: questo significa, dunque, che  $N=0$ : da qui, essendo anche  $P=0$  (il sistema ad anello aperto non ha poli a parte reale positiva), deduciamo che risulta anche  $Z=0$ , ossia che il sistema ad anello chiuso non ha poli a parte reale positiva, ossia quindi che tale sistema è stabile.

La conclusione è dunque che la stabilità del sistema ad anello aperto non viene pregiudicata dall'anello di reazione.

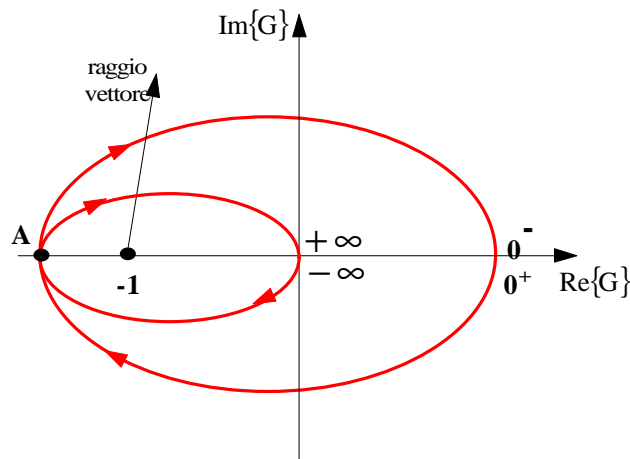
Accertato questo, possiamo fare una serie di importanti osservazioni. La prima riguarda il raggio vettore appena utilizzato: la direzione di tale raggio vettore, come detto, è del tutto arbitraria, per cui nessuno ci vieta di scegliere quella indicata nella figura seguente:



E' ovvio che dobbiamo ottenere sempre la stessa conclusione ed infatti è così: il raggio vettore qui considerato ha 4 intersezioni con il diagramma polare; in due di queste il diagramma ha verso di percorrenza orario, mentre nelle rimanenti due ha verso di percorrenza antiorario, per cui la somma algebrica fa ancora una volta  $N=0$ .

In ogni caso, risulta senz'altro più comodo riferirsi alla posizione del diagramma rispetto al punto critico: finché il punto critico rimane a sinistra del diagramma, come nel caso che stiamo considerando, risulta comunque  $N=0$ , ossia sistema stabile anche ad anello chiuso.

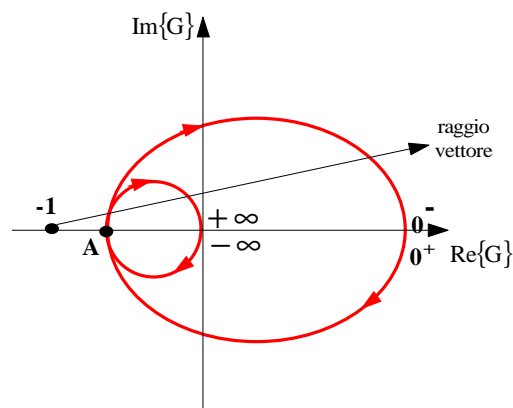
Supponiamo, invece, che la funzione di trasferimento ad anello aperto  $G(s)$  sia tale che il diagramma polare ed il punto  $-1$  siano disposti come nella figura seguente:



In questo caso, il raggio vettore ha due intersezioni con il diagramma polare e in entrambe tali intersezioni il diagramma ha verso di percorrenza orario: ciò significa che  $N=2$ , ossia che  $Z=2$ , ossia che la funzione  $G_0(s)$  ha due poli a parte reale positiva, ossia che il sistema ad anello chiuso è instabile. In termini di intersezioni del raggio vettore, come illustrato nella figura, ce ne sono due in corrispondenza di punti in cui il diagramma “corre” in verso orario, per cui  $N=2$ .

Queste osservazioni mostrano il motivo per cui, in linea del tutto generale, *il diagramma polare possa essere tracciato anche in maniera molto qualitativa, ai fini dell’applicazione del criterio di stabilità di Nyquist, a patto però di individuare con precisione la posizione del punto critico -1 rispetto al diagramma stesso.* In particolare, nell’esempio che stiamo considerando, è importante conoscere la posizione del punto indicato A rispetto al punto critico -1: finché A si trova a destra di -1, il sistema è stabile ad anello chiuso; non appena A viene a coincidere con -1 oppure viene a trovarsi a sinistra di -1, il sistema risulta instabile ad anello chiuso. Diventa dunque importante conoscere la posizione esatta del punto A e noi l’abbiamo calcolata prima, in quanto si tratta dell’intersezione del diagramma con l’asse delle ordinate.

A proposito sempre del punto A, possiamo osservare ancora un’altra cosa. Consideriamo nuovamente il primo diagramma polare che abbiamo tracciato:



Come abbiamo visto, questo diagramma è relativo alla funzione di risposta armonica  $G(j\omega) = \frac{k}{(1+j\omega)(1+j2\omega)(1+j5\omega)}$ , con guadagno  $k=10$ . Se aumentiamo il valore di questo guadagno, otteniamo un aumento del modulo di  $G(j\omega)$  (in quanto  $k$  è semplicemente un fattore di scala per il modulo della risposta armonica), il che

equivale semplicemente ad una maggiore estensione del diagramma polare riportato in figura. In altre parole, il diagramma conserva intatta la propria forma, ma diventa tanto più "grande" quanto maggiore è il valore di  $k$ .

Allora, anziché assegnare il valore di  $k$  e richiedere lo studio della stabilità ad anello chiuso, il problema da risolvere potrebbe essere il seguente: calcolare per quali valori del guadagno  $k$  il sistema ad anello chiuso risulta stabile.

Tutto sta, evidentemente, a determinare per quali valori di  $k$  il punto A si trova a destra del punto critico  $-1$ : solo per questi valori del guadagno, il sistema risulta stabile ad anello chiuso.

Un modo di procedere, per risolvere questo problema, è il seguente: in primo luogo, possiamo porre

$$G(j\omega) = k \frac{1}{\underbrace{(1+j\omega)(1+j2\omega)(1+j5\omega)}_{G_1(j\omega)}} = kG_1(j\omega)$$

Con questa posizione, l'equazione caratteristica  $Q(s) = 1 + G(s) = 0$  assume l'espressione  $1 + kG_1(s) = 0$ , ossia  $G_1(s) = -\frac{1}{k}$ : allora, è sufficiente tracciare il diagramma polare di  $G_1(j\omega)$ , che è del tipo di quello disegnato prima, e studiare la posizione di tale diagramma non più rispetto a  $-1$ , ma rispetto a  $-1/k$ . Essendo la posizione di quest'ultimo variabile con  $k$ , si possono individuare eventuali valori di  $k$  per i quali il punto critico  $-1/k$  si trova a sinistra del diagramma.

Così facendo, risolviamo il problema della cosiddetta **stabilità condizionata** (cioè della stabilità ad anello chiuso condizionata appunto dal valore di  $k$ ), che abbiamo precedentemente descritto e risolto facendo uso del luogo delle radici.

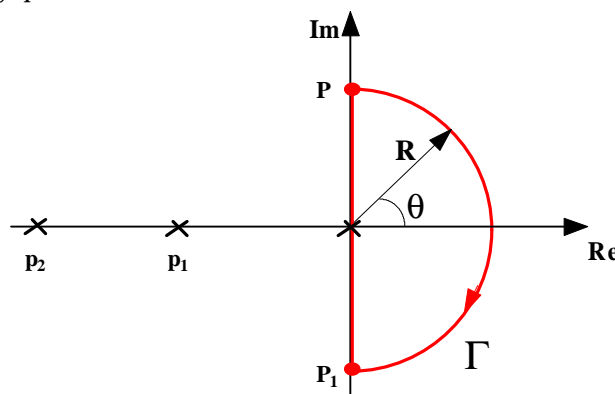
## Caso particolare: presenza di un polo nell'origine

Consideriamo adesso un sistema avente la seguente funzione di trasferimento ad anello aperto:

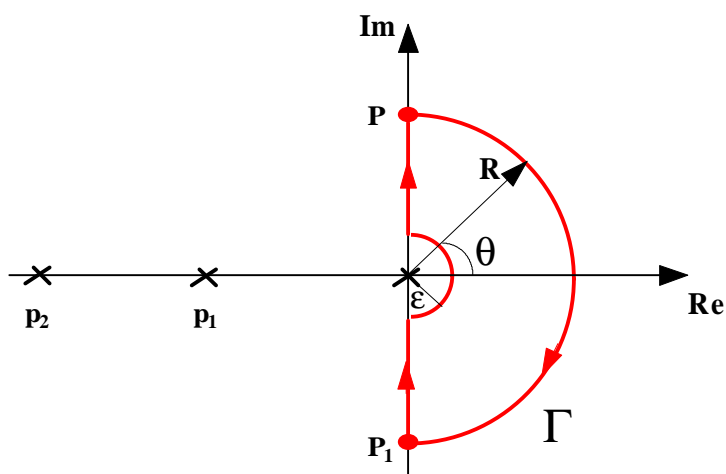
$$G(s) = \frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad T_1, T_2 > 0$$

Vogliamo studiare la stabilità ad anello chiuso di questo sistema usando il criterio di stabilità di Nyquist.

A tale scopo, ci accorgiamo subito di una particolarità: il sistema presenta due poli reali negativi ed un polo nell'origine. Questo polo nell'origine viola una delle ipotesi da noi enunciate per l'applicazione del criterio di Nyquist, in quanto esso si trova sulla curva di Nyquist:



Per ovviare a questo inconveniente ed applicare ugualmente il criterio di Nyquist, si opera una leggera modifica della curva di Nyquist, facendo in modo che essa non passi per il polo nell'origine:



Si considera, cioè, un'altra semicirconfenza, di raggio  $\epsilon$ , che circonda il polo nell'origine: facendo tendere  $\epsilon \rightarrow 0$ , di fatto si considera una curva  $\Gamma$  che continua a inglobare in se tutto l'asse immaginario (oltre il semipiano destro di Gauss).

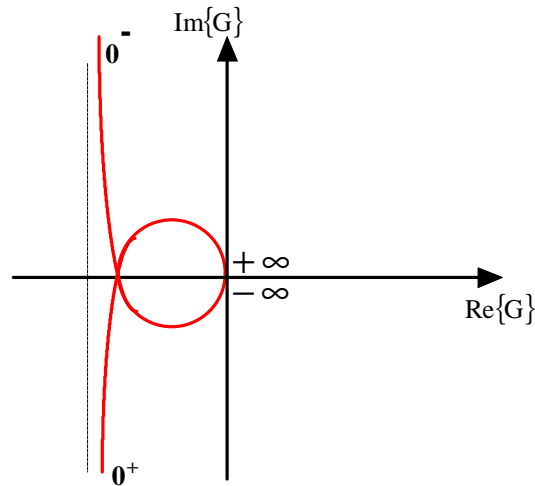
**Osservazione** - Sottolineiamo che il polo che ha comportato questa modifica della curva di Nyquist non necessariamente deve trovarsi nell'origine, ma può trovarsi in un qualsiasi punto dell'asse immaginario: quale che sia la sua posizione, si considera sempre una semicirconfenza che consenta alla curva di Nyquist di aggirare il polo stesso. Ovviamente, quando il polo è nell'origine, i calcoli (che saranno mostrati tra un attimo) risultano sicuramente semplificati rispetto a quelli che si dovrebbero fare nel caso di un polo puramente immaginario ma non nullo.

Così facendo, quindi, il tracciamento della curva  $\Gamma_G$  va fatto facendo variare il punto esploratore  $s^*$  (nel piano di Gauss) su tre differenti percorsi:

- il primo percorso è ancora coincidente con l'asse immaginario del piano di Gauss, per cui si tratta ancora di tracciare il diagramma polare della funzione  $G(j\omega)$ ;
- il secondo percorso è la semicirconfenza di raggio  $R \rightarrow \infty$ , che, come visto, serve a descrivere l'andamento di  $G(s)$  nei pressi dell'origine del piano-G;
- il terzo percorso è la semicirconfenza di raggio  $\epsilon \rightarrow 0$ , la quale, come vedremo, serve a descrivere l'andamento di  $G(s)$  all'infinito.

Premesso questo, andiamo intanto a tracciare il diagramma polare della funzione  $G(j\omega)$ . Usando le classiche regole, si ottiene un diagramma qualitativo, relativo all'intervallo completo  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ , del tipo seguente:





Abbiamo così individuato l'andamento della funzione  $G(s)$  per  $s$  che si muove lungo la parte della curva di Nyquist  $\Gamma$  che coincide con l'asse immaginario. Dobbiamo adesso esaminare l'andamento di  $G(s)$  per  $s$  che si muove sulla semicirconferenza di raggio  $R \rightarrow \infty$  e su quella di raggio  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Per quanto riguarda la circonferenza di raggio  $R$ , dobbiamo porre  $s = Re^{j\theta}$ , dove  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ , e sostituire nell'espressione di  $G(s)$ :

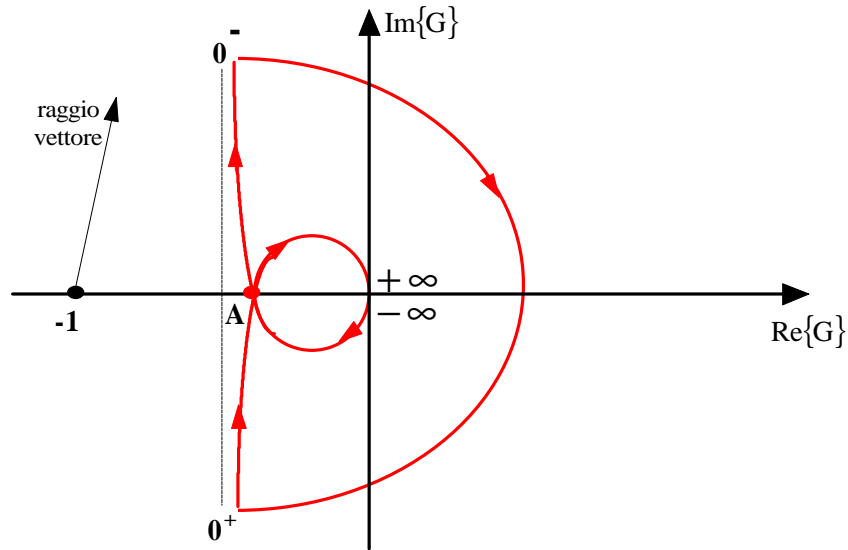
$$G(s) = \frac{1}{Re^{j\theta}(1+T_1 Re^{j\theta})(1+T_2 Re^{j\theta})} \cong \frac{1}{T_1 T_2 R^3 e^{j3\theta}}$$

Da questa relazione, ponendo  $R \rightarrow \infty$  e facendo variare  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ , si deduce semplicemente che il diagramma di  $G(s)$ , nei pressi dell'origine del piano- $G$ , si "arrotola". Tuttavia, ai fini dell'applicazione del criterio di stabilità di Nyquist, questa è una informazione che non ha alcun rilievo (ci interessa l'andamento qualitativo del diagramma e non certo quello dettagliato nei pressi dell'origine), per cui possiamo ignorarla.

Passiamo alla circonferenza di raggio  $\epsilon$ : dobbiamo questa volta porre  $s = \epsilon e^{j\theta}$ , dove  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ , per cui

$$G(s) = \frac{1}{\epsilon e^{j\theta}(1+T_1 \epsilon e^{j\theta})(1+T_2 \epsilon e^{j\theta})} \cong \frac{1}{\epsilon e^{j3\theta}} = \frac{1}{\epsilon} e^{-j3\theta}$$

Da questa relazione, ponendo  $\epsilon \rightarrow 0$  e facendo variare  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ , deduciamo che il diagramma di  $G(s)$  descrive, all'infinito, una singola rotazione in senso orario, per cui possiamo completare il diagramma disegnato prima nel modo seguente:



A questo punto, possiamo applicare il criterio di stabilità di Nyquist: dobbiamo dunque individuare il punto critico  $-1$ , mandare da esso, in direzione qualsiasi, un raggio vettore e determinare il numero di intersezioni di tale raggio con il diagramma. E' evidente, allora, dalla figura precedente, che è possibile tracciare il raggio vettore in modo che non abbia alcuna intersezione con il diagramma: ciò significa che  $N=0$  e quindi, essendo  $P=0$ , che  $Z=0$ , ossia che il sistema ad anello chiuso non presenta poli a parte reale positiva. Deduciamo, quindi, che il sistema è asintoticamente stabile ad anello chiuso.

Possiamo anche perfezionare lo studio di stabilità supponendo che la funzione di trasferimento in anello aperto presenti un guadagno  $k$  diverso da 1:

$$G(s) = k \frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

Così come fatto anche nell'esempio precedente, ci chiediamo per quali valori di  $k$  il sistema avente questa funzione di trasferimento ad anello aperto risulta stabile anche in anello chiuso.

Sempre in base alle considerazioni dell'esempio precedente, ci basta studiare come varia, al variare di  $k$ , la posizione del punto critico  $-1/k$  rispetto al diagramma della funzione di trasferimento  $\frac{1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$  tracciato poco fa. Per

fare questo, è sufficiente conoscere la posizione del punto che nella figura precedente è stato indicato con A. Tale punto non è altro che l'intersezione del diagramma polare con l'asse delle ascisse: ci basta dunque calcolare il valore  $\omega_1$  della pulsazione in corrispondenza della quale la funzione  $G(j\omega)$  risulta essere reale e poi calcolare quanto vale la quantità  $G(j\omega_1)$ .

Vediamo i dettagli di questo calcolo: in primo luogo, possiamo scrivere che

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)} = \frac{1}{-(T_1+T_2)\omega^2 + j\omega(1-T_1T_2\omega^2)}$$

In base a questa espressione, l'equazione  $\text{Im}\{G(j\omega)\}=0$  corrisponde all'equazione  $\omega(1-T_1T_2\omega^2)=0$ , la cui soluzione (oltre ovviamente ad  $\omega=0$ ) è  $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{T_1T_2}}$ . In corrispondenza di questo valore della pulsazione, la funzione di risposta armonica vale

$$G(j\omega_1) = \frac{-T_1T_2}{T_1+T_2}$$

per cui deduciamo che il punto A ha coordinate  $\left(\frac{-T_1T_2}{T_1+T_2}, 0\right)$ .

Come era ovvio che fosse, la posizione del punto A dipende dal valore delle due costanti di tempo: supponiamo allora che sia  $T_1=1$  e  $T_2=2$ , per cui  $A(-0.67,0)$ .

Possiamo a questo punto valutare la posizione del punto critico  $-1/k$  rispetto al punto A: il valore critico di  $k$  si ottiene quando il punto critico coincide con il punto A, il che avviene evidentemente per  $k_c = \frac{3}{2}$ . Affinché, invece, il sistema sia stabile ad anello chiuso, il punto critico deve trovarsi a sinistra del punto A, il che avviene per  $k < k_c = \frac{3}{2}$ .

In conclusione, il sistema avente funzione di trasferimento in anello aperto  $G(s) = \frac{k}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$  risulta stabile in anello chiuso (così come in anello aperto) solo per  $k < k_c = \frac{3}{2}$ . Avremmo potuto trovare questo stesso risultato usando il luogo delle radici, ossia osservando come varia, all'aumentare di  $k$ , la posizione dei poli del sistema in anello chiuso rispetto a quella del sistema in anello aperto.

## Caso particolare: presenza di un polo a parte reale positiva

Consideriamo adesso un sistema avente la seguente funzione di trasferimento ad anello aperto:

$$G(s) = -\frac{1+0.5s}{s(1-0.2s)}$$

Vogliamo studiare la stabilità ad anello chiuso di questo sistema usando il criterio di stabilità di Nyquist. A tale scopo, ci accorgiamo di due particolarità:

- in primo luogo, il sistema presenta un polo semplice nell'origine;
- in secondo luogo, l'altro polo del sistema è a parte reale positiva, il che ci dice che il sistema ad anello aperto è instabile.

Queste due caratteristiche di  $G(s)$ , in particolare la seconda, violano le ipotesi sotto le quali abbiamo in precedenza enunciato il criterio di stabilità di Nyquist: per quanto riguarda il polo nell'origine, abbiamo visto nel paragrafo precedente come ovviare all'inconveniente; resta perciò da capire come comportarsi davanti al polo a parte reale positiva.

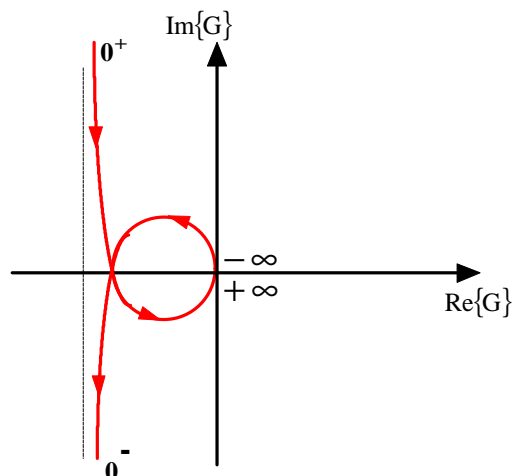
Prima ancora, però, facciamo osservare una cosa: l'idea di chiudere il sistema mediante un anello di retroazione è, in questo caso, l'unico strumento con il quale possiamo tentare di stabilizzare il comportamento del sistema. Si tratta dunque di un tipico caso in cui la retroazione si rende necessaria per "tentare" di ottenere stabilità su un sistema che invece, in anello aperto, stabile non è.

Dobbiamo capire se è ancora possibile applicare il criterio di Nyquist per dedurre conclusioni circa l'effetto ottenuto appunto con la reazione.

Allora, ignorando il fatto che il sistema sia instabile in anello aperto, applichiamo per intero il criterio di Nyquist, costruendo perciò la curva  $\Gamma_G$  al variare del punto esploratore  $s^*$  sui seguenti percorsi (nel piano di Gauss):

- il primo percorso è ancora coincidente con l'asse immaginario del piano di Gauss, per cui si tratta ancora di tracciare il diagramma polare della funzione  $G(j\omega)$ ;
- il secondo percorso è la semicirconferenza di raggio  $R \rightarrow \infty$ , che serve a descrivere l'andamento di  $G(s)$  nei pressi dell'origine del piano-G;
- il terzo percorso è la semicirconferenza di raggio  $\epsilon \rightarrow 0$ , la quale serve a descrivere l'andamento di  $G(s)$  all'infinito.

Cominciamo a tracciare il diagramma polare della funzione  $G(j\omega)$ . Usando le solite regole, si ottiene un diagramma qualitativo, relativo all'intervallo completo  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ , del tipo seguente:



Abbiamo così individuato l'andamento della funzione  $G(s)$  per  $s$  che si muove lungo la parte della curva di Nyquist  $\Gamma$  che coincide con l'asse immaginario. Dobbiamo adesso esaminare l'andamento di  $G(s)$  per  $s$  che si muove sulla semicirconferenza di raggio  $R \rightarrow \infty$  e su quella di raggio  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Per quanto riguarda la circonferenza di raggio  $R$ , dobbiamo porre  $s = Re^{j\theta}$ , dove  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ , e sostituire nell'espressione di  $G(s)$ :

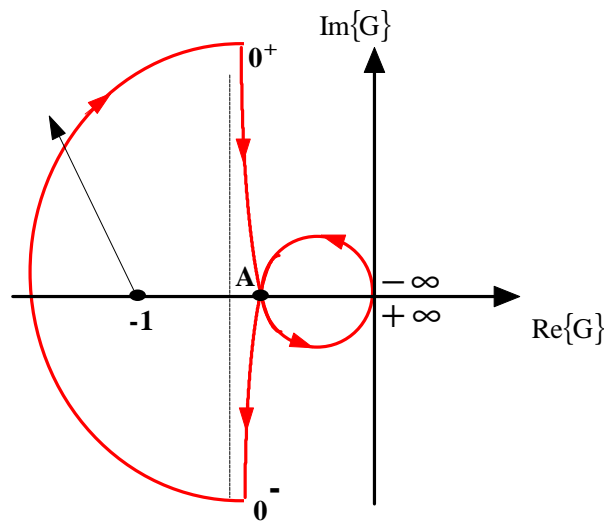
$$G(s) = -\frac{(1+0.5 Re^{j\theta})}{Re^{j\theta}(1-0.2 Re^{j\theta})} \cong \frac{0.5}{0.2 Re^{j\theta}}$$

Da questa relazione, ponendo  $R \rightarrow \infty$  e facendo variare  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ , si deduce semplicemente che il diagramma di  $G(s)$ , nei pressi dell'origine del piano-G, si "arrotola". Tuttavia, abbiamo già avuto modo di dire nell'esempio precedente che questa informazione non ha alcun rilievo ai fini dell'applicazione del criterio di stabilità di Nyquist, per cui possiamo ignorarla.

Per quanto riguarda, invece, la circonferenza di raggio  $\varepsilon$ , dobbiamo questa volta porre  $s = \varepsilon e^{j\theta}$ , dove  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ , per cui

$$G(s) = -\frac{(1+0.5\varepsilon e^{j\theta})}{\varepsilon e^{j\theta}(1-0.2\varepsilon e^{j\theta})} \cong -\frac{1}{\varepsilon e^{j\theta}} = -\frac{1}{\varepsilon} e^{-j\theta}$$

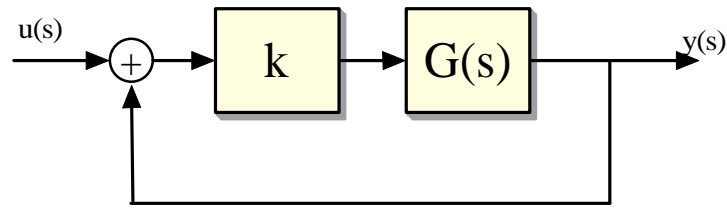
Da questa relazione, ponendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  e facendo variare  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ , deduciamo che il diagramma di  $G(s)$  descrive, all'infinito, una singola rotazione in senso orario, per cui possiamo completare il diagramma disegnato prima nel modo seguente:



A questo punto, applichiamo il criterio di stabilità di Nyquist. In particolare, osservando che il sistema ad anello aperto presenta un polo a parte reale positiva (cioè  $P=1$ ), dobbiamo applicare il *criterio in forma completa*.

Dobbiamo dunque individuare il punto critico -1, mandare da esso, in direzione qualsiasi, un raggio vettore e determinare il numero di intersezioni di tale raggio con il diagramma. E' evidente, allora, che se consideriamo il raggio vettore indicato nella figura precedente, esso interseca il diagramma in un solo punto, nel quale il diagramma ha verso di percorrenza orario: ciò significa che  $N=-1$  e quindi, avendo detto che  $P=1$ , deduciamo che  $Z=P-N=1-(-1)=2$ . Dire che  $Z=2$  significa dire che il sistema ad anello chiuso presenta 2 poli a parte reale positiva, per cui è instabile. Quindi, la chiusura del sistema in un anello di reazione non porta alcun vantaggio in termini di stabilità.

Sembrerebbe dunque di non poter ottenere la stabilità desiderata. In realtà non è così. Infatti, osservando che il sistema in anello aperto presenta un guadagno solo unitario, si può pensare di realizzare uno schema del tipo seguente:



In pratica, prima di chiudere il sistema  $G(s)$  in un anello di retroazione (unitaria), possiamo porlo in cascata ad un altro sistema (un **controllore**) che ha il semplice scopo di aumentarne il guadagno (è quindi un semplice amplificatore). In tal modo, possiamo chiederci se esistono uno o più valori di  $k$  tali che il sistema ad anello

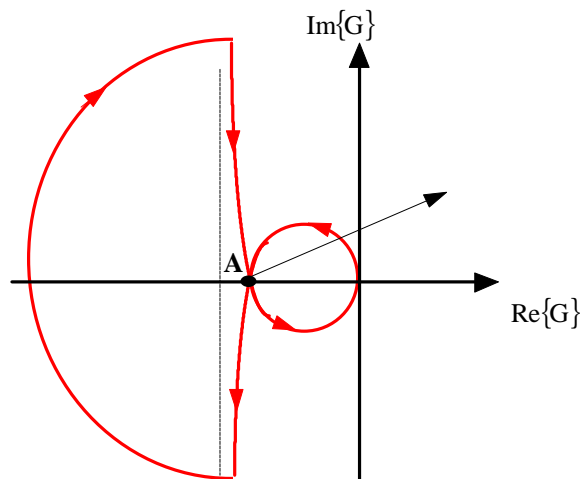
chiuso  $G_0(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$  risulti stabile.

La funzione di trasferimento in anello aperto è dunque ora la seguente:

$$G_1(s) = kG(s) = -k \frac{1+0.5s}{s(1-0.2s)} = k_1 \frac{1+0.5s}{s(1-0.2s)}$$

Per studiare la stabilità di questo sistema una volta chiuso in retroazione unitaria, possiamo ancora una volta seguire il procedimento seguito nei due esempi precedenti: dobbiamo determinare il diagramma della funzione  $G(j\omega)$  (cioè quello calcolato prima) e poi capire come varia, al variare di  $k_1$ , la sua posizione rispetto al punto critico  $-1/k_1$ .

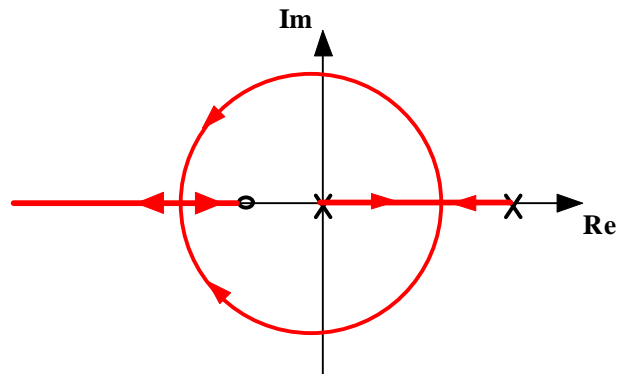
Allora, se facciamo riferimento al diagramma di  $G(j\omega)$  tracciato prima, ci accorgiamo subito che, se il punto critico viene a coincidere con il punto indicato con A, il sistema risulta essere sicuramente stabile:



Infatti, mandando un raggio vettore come in figura, abbiamo una sola intersezione e in un punto in cui il diagramma ha verso di percorrenza antiorario: risulta cioè  $N=+1$  e quindi  $Z=P-N=1-(+1)=0$ , ossia il sistema ad anello chiuso non ha poli a parte reale positiva.

Esiste, dunque, un valore critico di  $k_1$  oltre il quale il sistema ad anello chiuso risulta essere stabile: per determinare questo valore critico, dobbiamo individuare le coordinate del punto A, procedendo così come fatto nell'esempio precedente, ossia quindi tenendo conto che A è il punto di intersezione del diagramma polare con l'asse reale.

Concludiamo osservando che, anche in questo caso, avremmo potuto trarre le stesse conclusioni usando il luogo delle radici, che per il sistema in esame è fatto nel modo seguente:



Il diagramma evidenzia che i due poli sono inizialmente entrambi nel semipiano destro, ma si arriva ad un certo valore critico del guadagno oltre il quale essi passano nel semipiano sinistro e ci restano, garantendo così la stabilità del sistema ad anello chiuso.

Autore: **Sandro Petrizzelli**  
e-mail: [sandry@iol.it](mailto:sandry@iol.it)  
sito personale: <http://users.iol.it/sandry>