Università di Parma – Facoltà di Ingegneria

Prova Scritta di Controlli Automatici A del 17 Dicembre 2009

Corso Teledidattico

Esercizio N. 1

Il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)^3}$ presenta un asintoto verticale parallelo all'asse immaginario. Determinare l'ascissa reale σ_a di tale asintoto.

Esercizio N. 2

Enunciare e dimostrare il teorema di analisi armonica per un sistema descritto da una funzione di trasferimento razionale con modi tutti convergenti a zero per $t \rightarrow +\infty$.

Esercizio N. 3

Fornire una definizione generale di <u>margine di ampiezza</u> e <u>margine di fase.</u> Giustificare tale definizione per via geometrica.

Esercizio N. 4

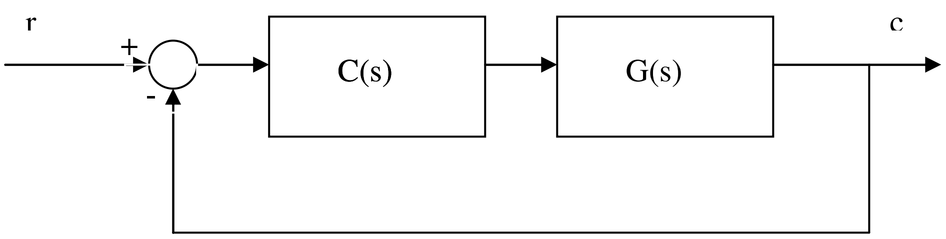
Si tracci il luogo delle radici della seguente equazione caratteristica:

$$1+10\frac{1+\tau s}{(1+2\tau s)(1+s)}=0, \quad \tau \in [0;+\infty)$$

determinando in particolare asintoti e radici doppie.

Esercizio N. 5

Sia dato il sistema in retroazione unitaria:



dove $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)^2 (s+4)}$

1) Posto $C(s) = 8$ studiare la stabilità del sistema retroazionato con il criterio di Nyquist

2) Progettare un controllore con una rete a ritardo e anticipo di struttura

$$C(s) = K_c \cdot C_r(s) = K_c \, \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s) + \tau_{12} s}$$

affinché il sistema retroazionato sia stabile con margine di ampiezza $M_A = 4$ ed abbia la costante di posizione $K_P = 20$. Si assuma $\dfrac{\tau_1}{\tau_2} = 10$.

ESERCIZIO 1

$$L(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^3}$$

Il sistema $L(s)$ è di Tipo 1 in quanto presenta un polo nell'origine.
Mi aspetto che il diagramma polare associato alla P.d.T. $L(s)$ presenti un asintoto parallelo all'asse immaginario.

Determino l'ascissa reale σ_a dell'asintoto:

Scrivo la risposta armonica associata alla $L(s)$

$$L(j\omega) = \frac{j\omega+2}{j\omega(j\omega+1)^3} = \frac{j\omega+2}{j\omega(j^3\omega^3+3j^2\omega^2+3j\omega+1)} \ldots$$

Calcolo ora:

$\lim_{\omega \to 0^+} L(j\omega)$ posso non considerare i termini in ω^2 o superiori, riscrivo quindi:

per $\omega \to 0^+$

$$L(j\omega) = \frac{j\omega+2}{j\omega(3j\omega+1)} = \frac{(j\omega+2)(3j\omega-1)}{j\omega(3j\omega+1)(3j\omega-1)} =$$

$$\frac{3j^2\omega^2 - j\omega + 6j\omega - 2}{j\omega(9j^2\omega^2-1)} = \frac{-2-3\omega^2+j\omega(-1+6)}{j\omega(9\omega^2-1)}$$

$$= \frac{j\omega(-1+6)}{j\omega(9\omega^2-1)} + \frac{-2-3\omega^2}{j\omega(9\omega^2-1)} =$$

$$Re[L(j\omega)] = \frac{5}{9\omega^2-1}$$

Osservo che per $\omega \to 0^+$ la parte reale di $L(j\omega) \to -5$

Esercizio 4

$$G(s) = 1 + 10\,\frac{1+\tau s}{(1+2\tau s)(1+s)} = 0 \qquad \tau \in [0, +\infty]$$

Non è possibile procedere al calcolo del luogo delle radici utilizzando l'attuale forma della $G(s)$; occorre eseguire qualche operazione su di essa; al fine di esplicitare il parametro τ ed avere l'equazione caratteristica scritta nella forma

$$1 + K\, L(s) = 0$$

$$G(s) = (1+2\tau s)(1+s) + 10\,(1+\tau s) = 0$$

$$(1 + s + 2\tau s + 2\tau s^2) + 10 + 10\tau s = 0$$

$$1 + s + 2\tau s + 2\tau s^2 + 10 + 10\tau s = 0$$

$$2\tau s^2 + 12\tau s + s + 11 = 0$$

$$\tau(2s^2 + 12s) + (s + 11) = 0$$

$$1 + \tau\frac{(2s^2+12s)}{(s+11)} = 1 + \tau\frac{s(2s+12)}{(s+11)} = 1 + 2\tau\frac{s(s+6)}{(s+11)}$$

L'equazione così ottenuta può essere utilizzata per tracciare il luogo delle radici. Osservo che $\# m = 2 \quad \{0, -6\}$ cioè $m > n$ questo può accadere

$\# n = 1 \quad \{-11\}$

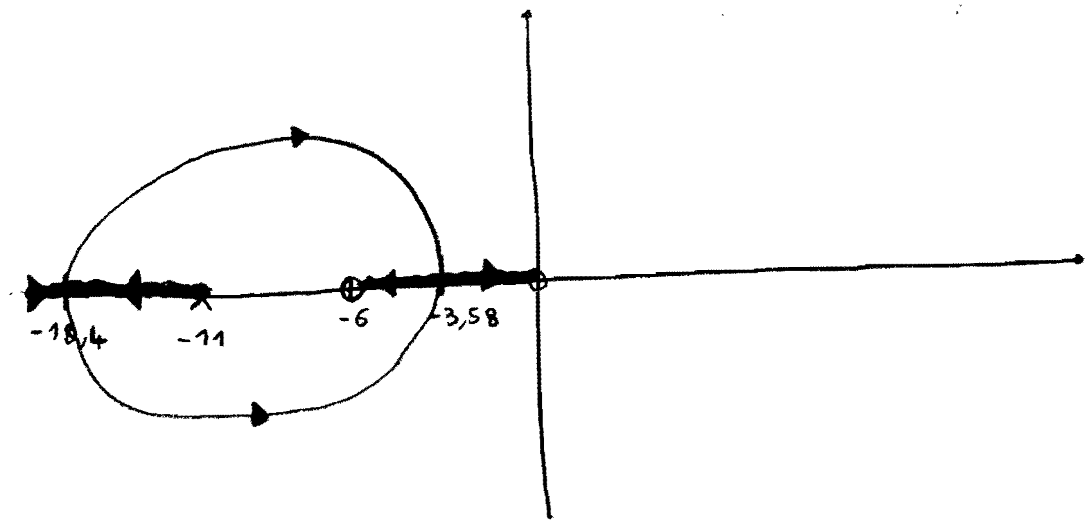
nel caso del contorno delle radici, occorre fare attenzione in quanto i rami asintotici, sono percorsi dall'infinito al finito invece che dal finito al finito, come avviene solitamente nel tracciamento del luogo delle radici.

Devo dunque tracciare il luogo delle radici della seguente eq. caratteristica

$$1 + 2\tau \frac{s(s+6)}{(s+11)}$$

$\# m = 2 \ \{0, -6\}$ zeri

$\# n = 1 \ \{-11\}$ poli



Mi aspetto che il luogo presenti $|n-m| = 1$ asintoto.
Determino il centro degli asintoti

$$\sigma_A = \frac{1}{|n-m|}\left[\sum p_i - \sum z_i\right] = \frac{1}{+1}\left[(-11) - (-6)\right] = +1(-5) = -4$$

PROBLEMA

È corretto utilizzare $|n-m|$ piuttosto che $(n-m)$ sia nel calcolo del numero degli asintoti; sia nel calcolo del centro degli asintoti
Se al posto di $|n-m|$ utilizzo $(n-m)$ ottengo -1 asintoti e il centro degli asintoti nel punto $+6$

Gli asintoti formano con l'asse reale, angoli di

$\phi = \pi$

Determino eventuali radici doppie.

$$\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+6}\right] - \left[\frac{1}{s+11}\right] = \phi \qquad s = \{-18{,}4\,,\ -3{,}58\}$$

Riporto le informazioni e traccio il grafico del luogo delle radici

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)^2 (s+4)}$$

Con $C(s) = 8$, studiare la stabilità del sistema retroazionato con il criterio di Nyquist

$$L(s) = C(s)\,G(s) = 8 \frac{10}{(s+1)^2 (s+4)}$$

Traccio il diagramma di Nyquist

Il sistema è di tipo $\emptyset$ in quanto non presenta poli nell'origine.

Mi aspetto che il d.d.n. parta da un punto sull'asse reale e termini nello zero

$\# z \quad \emptyset \qquad\qquad \# z_{-z} \quad \emptyset \qquad\qquad \mu = \emptyset$

$\# p \quad 3 \quad \{-1, -1, -4\} \qquad \# p_{-p} \quad \emptyset \qquad\qquad \nu = \emptyset$

$$G(j\omega) = \frac{80}{(j\omega+1)^2 (j\omega+4)} = \frac{80}{\left[\sqrt{1+\omega^2}\, e^{j \arctan \omega}\right]^2 \left[\sqrt{4^2+\omega^2}\, e^{j \arctan \frac{\omega}{4}}\right]}$$

$$\frac{80}{\left[\sqrt{1+\omega^2}\right]^2 \sqrt{4^2+\omega^2}}\, e^{-j\left[2 \arctan \omega + \arctan \frac{\omega}{4}\right]}$$

$$\lim_{\omega \to 0^+} |G(j\omega)| = \frac{80}{1 \cdot 4} = 20$$

$$\lim_{\omega \to 0} \arg[G(j\omega)] = \emptyset$$

$$\lim_{\omega \to \infty} |G(j\omega)| = \emptyset$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \arg[G(j\omega)] = \lim_{\omega \to \infty} -\left[2 \arctan \omega + \arctan \frac{\omega}{4}\right] = -\left[2\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = -\frac{3}{4}\pi$$

Calcolo il punto di intersezione con l'asse reale negativo

$\omega = \{ 0 ; 3 \}$

Verifica che per

$\omega^* = 3 \qquad |L(j\omega)| = \dfrac{80}{\left[\sqrt{1+3^2}\right]^2 \sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{8}{5}$

Calcolo le intersezioni con l'asse immaginario

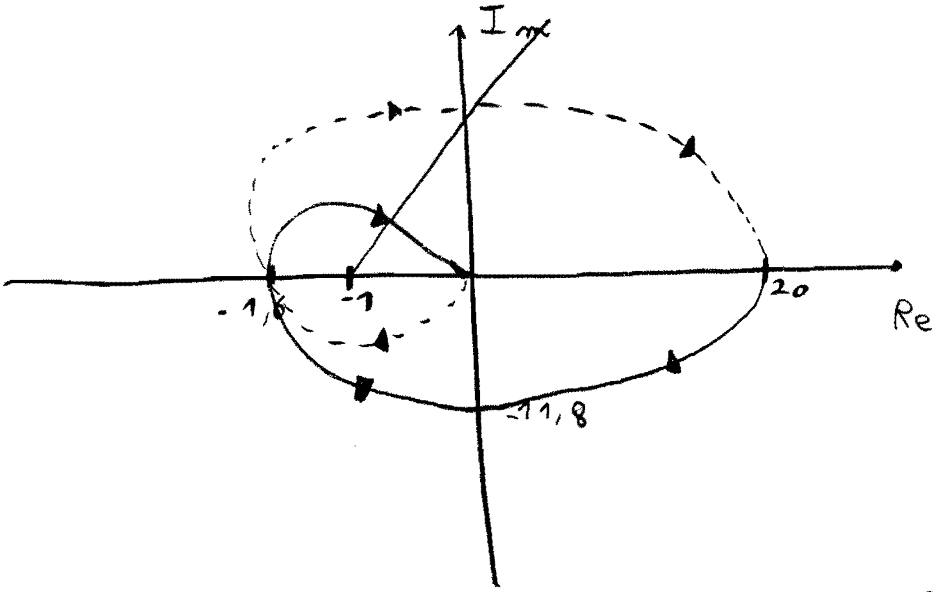
$\omega = \left\{ \dfrac{\sqrt{6}}{3} \right\}$

Verifica che per $\omega^* = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \qquad |L(j\omega)| = \dfrac{+24\sqrt{6}}{5} \simeq 11,8$

Il diagramma polare, compie nel complesso, una rotazione di

$\Delta \arg [G(j\omega)] = (m-n)\dfrac{\pi}{2} - (\mu - \nu)\dfrac{\pi}{2} - (n_z - n_p)\pi$

$= -3 \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{3\pi}{2}$



Il sistema ad anello aperto risulta asintoticamente stabile. Il criterio di Nyquist mi dice che affinchè il sistema chiuso in retroazione sia asintoticamente stabile, è che il diagramma polare non tocchi o circondi il punto critico di Nyquist. Dal disegno vedo che il diagramma circonda il punto critico per due volte in senso orario. Il sistema chiuso in retroazione sarà INSTABILE.

Progetto con il controllore

Posso iniziare a verificare le specifiche statiche:

costante di posizione

e le specifiche dinamiche:

margine di guadagno

Inizio con il soddisfare le specifiche statiche, dove chiedo che K_p cioè la costante di posizione sia uguale a 20.

$$r(t) = R_0 u(t) \qquad R(s) = R_0 \frac{1}{s}$$

$$e_r = \lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{R_0}{\cancel{s}} \cdot \frac{1}{1+L(s)} =$$

$$\lim_{s \to 0} R \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} L(s)} = R_0 \cdot \frac{1}{1+K_p}$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} L(s)$$

$$L(s) = G(s) \cdot C(s)$$

$$\lim_{s \to 0} L(s) = \frac{10}{1 \cdot 4} \cdot K_p = \frac{5}{2} K_p$$

Per soddisfare la specifica occorre che $\frac{5}{2} K_p = 20$ $\boxed{K_p = 8}$

Devo ora definire le specifiche statiche cioè:

$$\frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)+\tau_{12} s}$$

Al fine di determinare il valore dei parametri τ_1, τ_2, τ_{12}, determino inizialmente il valore di ω_π che è la pulsazione con cui il sistema ha fase pari a $-\pi$. Dal punto precedente ho determinato $\omega_\pi = 3 \frac{rad}{sec}$

Il margine di fase è definito come l'inverso del modulo del guadagno di anello alla pulsazione $-\pi$.

Determino $\omega_\pi = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$ Dalle specifiche ho che $\tau_1 = 10\, \tau_2$

$$\frac{1}{\sqrt{10\, \tau_2^2}} = 3 \Rightarrow \tau_2 = 0{,}105 \qquad \tau_1 = 1{,}05$$

In base alla definizione precedente di margine di fase, posso scrivere che

$$\frac{1}{|G(j\omega)|_{\omega=\omega_m}} = 4 \Rightarrow |G(j\omega)|_{\omega=\omega_m} = 0,25$$

Posso ora applicare la seguente:

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}} = 0,25 \Rightarrow \tau_{12} = 3,46$$

Concludendo posso dire che il controllore deve essere della forma:

$$C(s) = 8 \cdot \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s) + \tau_{12} s}$$

Con

$$\tau_1 = 1,05 \qquad \tau_2 = 0,105 \qquad \tau_{12} = 3,46$$

Se provo inserire in MATLAB il sistema, non mi torna il margine di fase uguale a 4. Mi aspetto che 4 convertito in DB debba essere 20log(4) = 12dB. Se introduco il sistema con i parametri determinati in MATLAB ottengo i seguenti margini: