UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

= ESERCITAZIONI DI CONTROLLI AUTOMATICI =

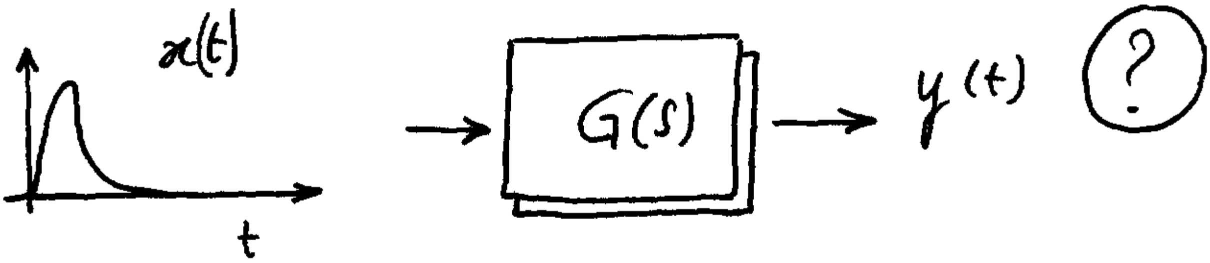
II INCONTRO : • Stabilità e sistemi in retroazione
• luogo delle radici.

I PARTE:

- Definizione di stabilità
- criterio di Routh
- Errori a regime e sensibilità a disturbi e variazioni di parametri.
- Criterio Nyquist
- Margini di fase e di ampiezza

II PARTE:

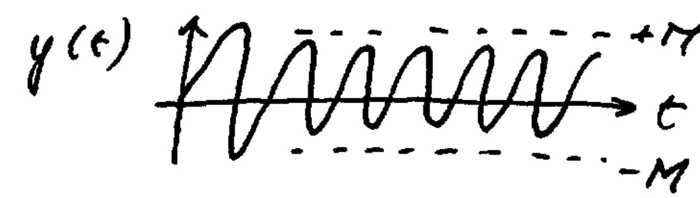
- luogo delle radici
- proprietà del luogo delle radici.
- esempi di luogo delle radici.
- contorno delle radici



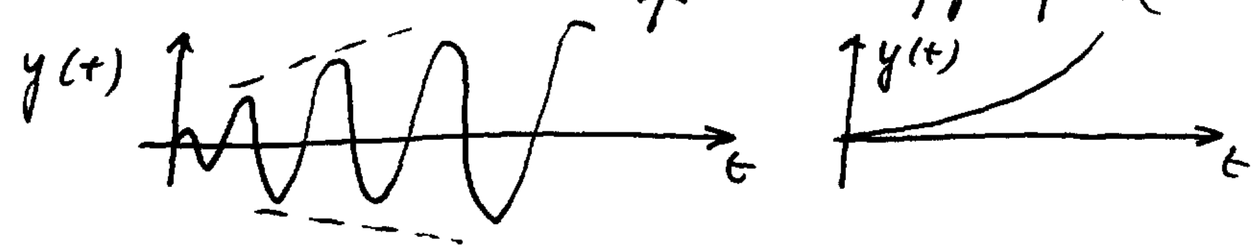
- G(s) è un sistema in equilibrio
- vado a perturbare il sistema con $x(t)$

<u>HO 3 POSSIBILITÀ PER QUANTO RIGUARDA LA RISPOSTA:</u>

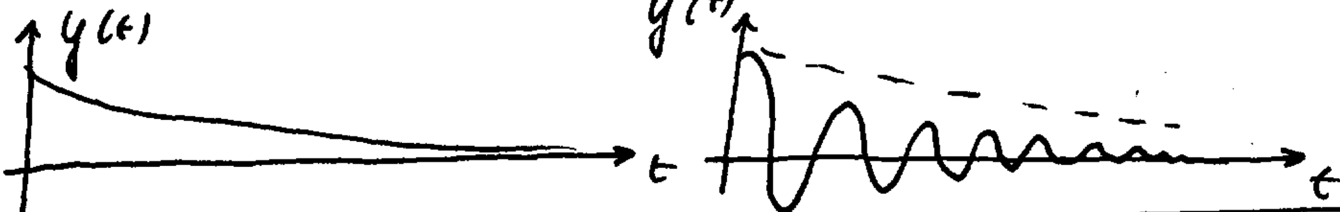
1) risposta LIMITATA: $\exists M$ t.c. $|y(t)| \leq M \ \forall t > t_0$



2) risposta DIVERGENTE: $\nexists M$ t.c. $|y(t)| \leq M (\forall t \geq$

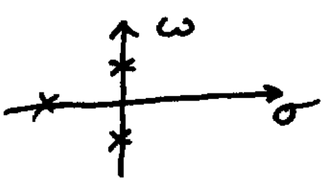


3) risposta CONVERGENTE ASINTOTICAMENTE A ZERO:
$\exists M$ t.c. $|y(t)| \leq M \ \forall t > t_0$ e $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$

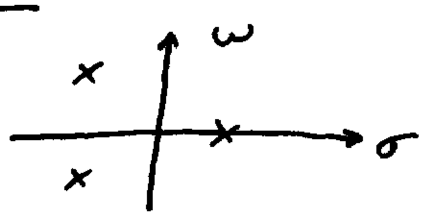


IL COMPORTAMENTO NON DIPENDE NÉ DAL P.TO DI EQUILIBRIO
NÉ DAL TIPO DI PERTURBAZIONE

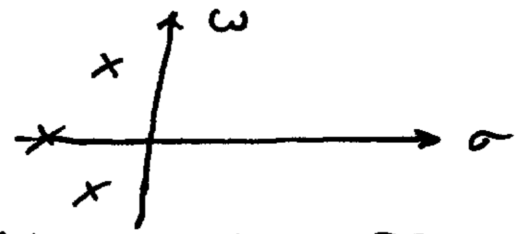
Un sistema lineare stazionario è <u>STABILE</u> se e solo se la funzione di trasferimento non presenta alcun polo a <u>parte REALE POSITIVA</u> e gli eventuali poli a <u>PARTE REALE NULLA</u> <u>SONO SEMPLICI</u>. Un sistema lineare stazionario è <u>ASINTOTICAMENTE STABILE</u> se e solo se <u>TUTTI I POLI HANNO PARTE REALE NEGATIVA</u>.



STABILE



INSTABILE



ASINTOTICAMENTE STABILE

IL CRITERIO DI ROUTH

EQ.NE CARATTERIST. $\left\{ a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \right.$

$\Longrightarrow$ CONDIZIONE NECESSARIA (E NON SUFFICIENTE!!) AFFINCHE' LE RADICI DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA ABBIANO TUTTE PARTE REALE NEGATIVA (STAB. ASINTOTICA) E' CHE SIA:

$a_0 > 0, \ a_1 > 0, \ a_2 > 0, \ \ldots, \ a_n > 0$

(<u>NOTA</u>: oppure che siano tutte negative!!)

Tabella di Routh:

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	...
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	...
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}		
$n-3$	...	...	...		
$n-4$					

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-2} - a_n\, a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-4} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-4} - a_n\, a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-6} = \frac{a_{n-1}\, a_{n-6} - a_n\, a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

completata la riga "n-2" si costruisce la riga "n-3" dalle due righe precedenti

TEOREMA ROUTH: Ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella considerati successivamente (cioè $a_n, a_{n-1}, b_{n-2} \dots$) corrisponde una radice con parte reale positiva, ad ogni permanenza, una radice con parte reale negativa

- i termini di una stessa riga si possono moltiplicare tutti per un coefficiente positivo, senza variare il risultato.
- il primo termine di una riga è nullo

$\Rightarrow$ METODO ε

si completa la tabella con "$+\varepsilon$" o "$-\varepsilon$" piccoli a piacere

- il primo (o alcuni) termine di una riga è nullo

$\Rightarrow$ ogni riga iniziante con un certo numero h di zeri viene sommata alla riga che essa ottiene moltiplicando per $(-1)^h$ e traslando a sx. di h posizioni

ESEMPIO: $s^3+3s-2=0$

METODO "ε":

3	1	3
2	$+\varepsilon$	-2
1	$3\varepsilon+2$	
0	-2	

$+\varepsilon \rightarrow 0$

METODO "ALTERNATIVO":

3	1	3
2'	0	-2
2''	2	0
2	2	-2
1	4	
0	-2	

TUTTI I TERMINI DI UNA RIGA SONO NULLI:

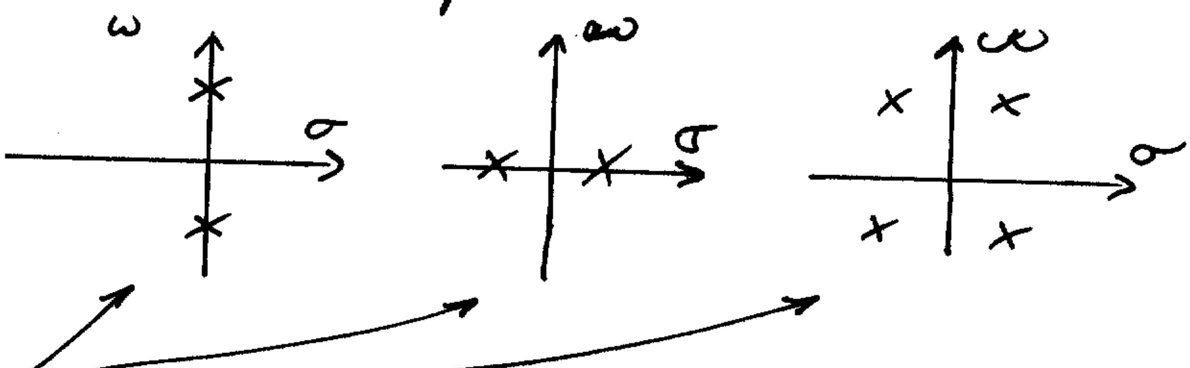
$$
\begin{array}{c|cccc}
2m & b_{2m} & b_{2m-2} & \dots & b_0 \\
2m-1 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}
\leftarrow
$$

Termini della riga immediatamente precedente la riga degli zeri.

eq.ne AUSILIARIA: $b_{2m} s^{2m} + b_{2m-2} s^{2m-2} + \dots + b_0 = 0$

OCCHIO! non ci sono i termini di grado dispari!

le soluzioni dell'eq.ne ausiliaria (le sue radici) sono le radici su cui il criterio di Routh non ha saputo dare informazioni.



possibili posizioni delle radici dell'eq.ne ausiliaria. $(s^2 = z)$

PROBLEMA: L'eq.ne ausiliaria non si riesce a risolvere!

SI PROCEDE COSÌ: Si deriva l'eq.ne ausiliaria e i coefficienti vengono utilizzati in sostituzione della riga degli zeri. Le eventuali radici immaginarie pure, non portano variazioni di segno (come le radici a parte reale negative)

→ OCCORRE RAGIONARE SUL PROBLEMA!

ESEMPIO: $s^6+s^5-2s^4-3s^3-7s^2-4s-4=0$

6	1	-2	-7	-4
5	1	-3	-4	0
4	1	-3	-4	0
3	0	0	0	0

eq.ne ausiliaria:

$$s^4-3s^2-4=0$$

derivando l'eq. aux.: $4s^3-6s=0$

3'	4	-6	0
2	-6	-16	
1	-100	0	
0	-16		

→ diventa la nuova riga 3!

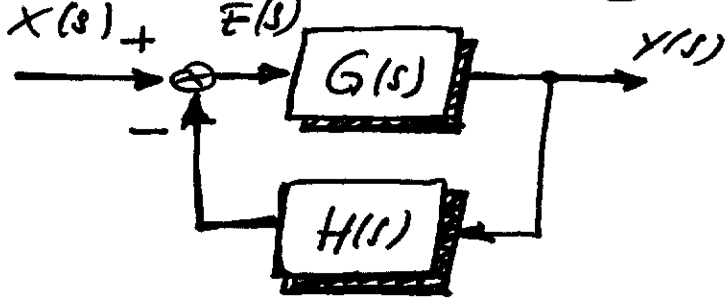
SOLUZIONE:

- dalla riga 6 alla 3 → 2 radici a parte reale negativa
- dalla riga 3 in poi → 1 radice a parte reale positiva, quindi, PER COME SONO DISPOSTE LE RADICI DELL'EQ. AUX., avremo 1 radice a parte reale neg. e 2 IMMAGINARIE

PROPIETA' DELLA RETROAZIONE:

(paragrafo 4.3 pag. 185 del "Marro" IV edizione)

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



1) SENSIBILITA' ALLA VARIAZIONE DI PARAMETRI:

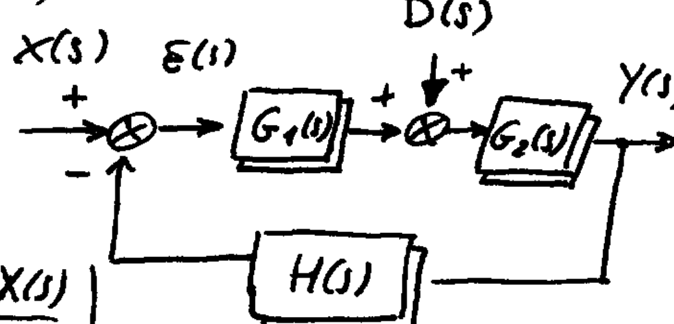
- $\Delta G_0(s) = \frac{\partial}{\partial G}\left(\frac{G}{1+GH}\right) \cdot \frac{\partial G}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha = \frac{1}{(1+GH)^2}\,\Delta G(s)$

$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}\left(\frac{\Delta G(s)}{G(s)}\right) \leftarrow \text{VARIAZIONI RELATIVE}$$

- $\Delta G_0(s) = \frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{G}{1+GH}\right) \frac{\partial H}{\partial \beta}\Big|_{\beta=\beta_0} \Delta\beta = -\frac{G^2}{(1+GH)^2}\,\Delta H(s)$

$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{-G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \cdot \left(\frac{\Delta H(s)}{H(s)}\right) \leftarrow \text{VAR. RELATIVE}$$

2) SENSIBILITA' AI DISTURBI:



- SENZA retroazione:

$$N'(s) = G_2(s)\,D(s) \rightarrow \frac{S(s)}{N'(s)} = \frac{G_0(s)\,X(s)}{G_2(s)\,D(s)}$$

- CON retroazione:

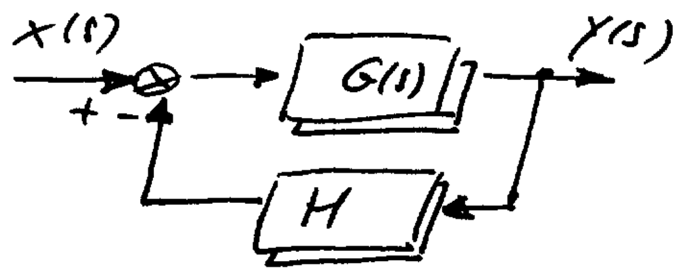
$$N''(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\,D(s) \rightarrow \frac{S(s)}{N''(s)} = \left(1+G_1(s)G_2(s)H(s)\right)\cdot\frac{G_0(s)\,R(s)}{G_2(s)\,D(s)}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

3) LARGHEZZA DI BANDA: ω_f

pulsazione alla quale il modulo della risposta armonica, cioè $|G(j\omega)|_{dB}$ è inferiore di 3 dB al valore statico $G(0)$ - (Oppure è pari a $\frac{1}{\sqrt{2}} G(0)$ nel caso non si usino i dB)

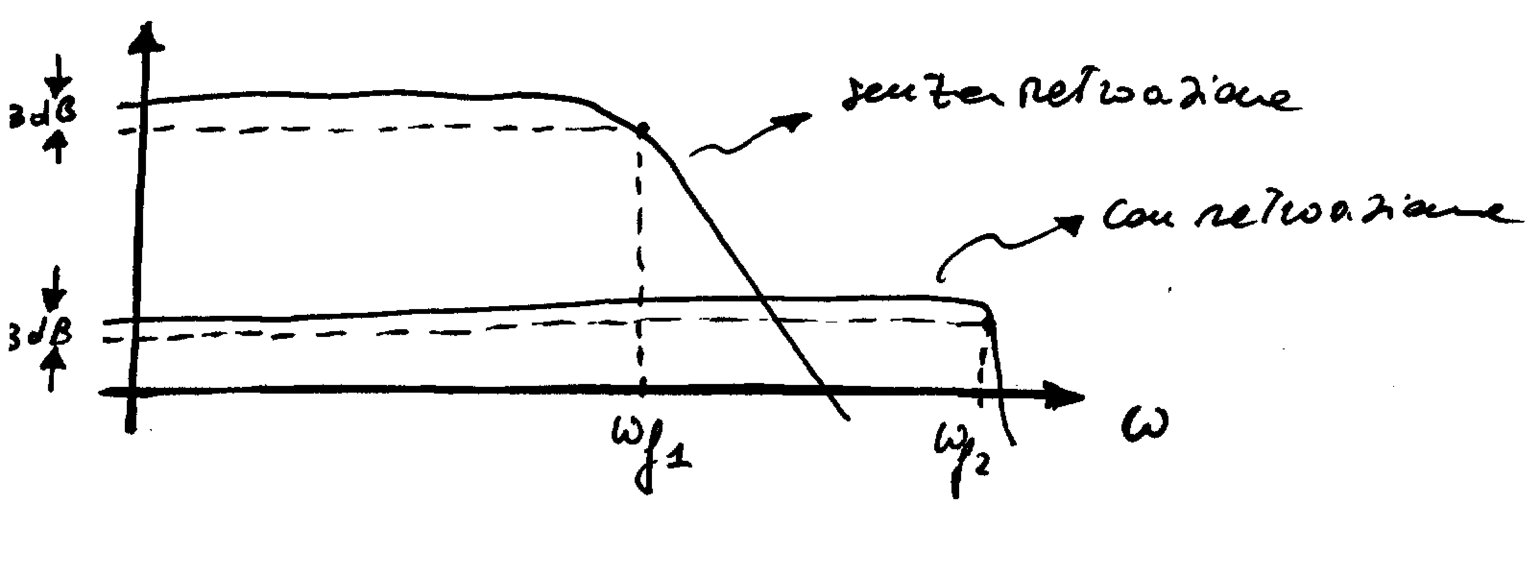
se $H(s) = H$



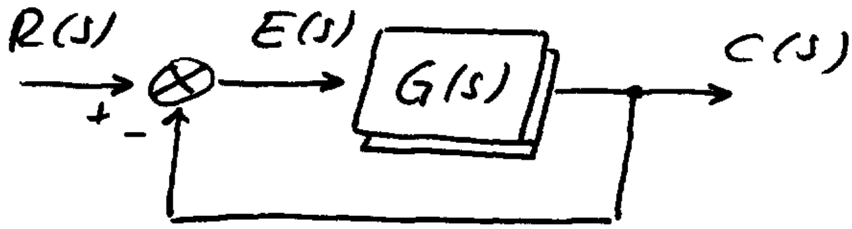
$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + HG(s)}$$

$$G_0(j\omega) = \frac{1}{H + \left(\frac{1}{G(j\omega)}\right)} \qquad \text{se } |H\,G(j\omega)| \gg 1$$

$$G_0(j\omega) \approx \frac{1}{H} \text{ costante} \rightarrow \text{BANDA ELEVATA}$$



ERRORI A REGIME



$e(t) = r(t) - c(t)$ errore

$G(s)$ può essere di tipo "0", "1", "2", ecc...

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

$$\boxed{\text{teorema del valore finale: } \lim_{t\to+\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)}$$

• ERRORE A REGIME NELLA RISPOSTA AL GRADINO:

$r(t) = u(t)$ $\quad R(s) = \frac{1}{s}$ $\quad \lim_{t\to+\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{1+K_p}$

$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)$ (guadagno)

• ERRORE A REGIME NELLA RISPOSTA ALLA RAMPA:

$r(t) = t$ $\quad \lim_{t\to+\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)}$

$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)$

• ERRORE A REGIME NELLA RISPOSTA ALLA PARABOLA:

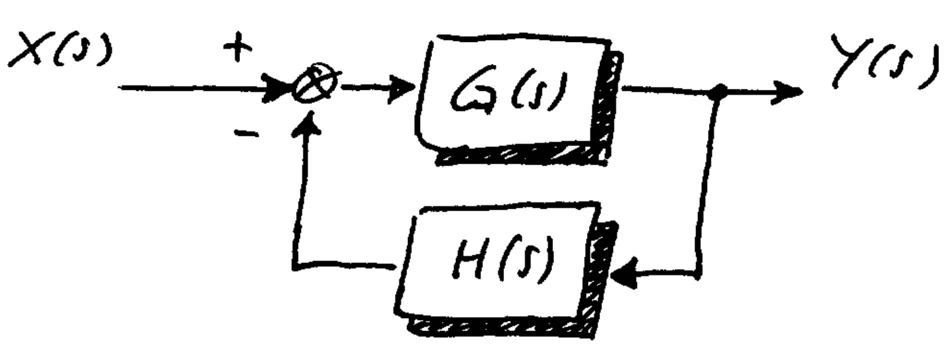
$r(t) = t^2$ $\quad \lim_{t\to+\infty} e(t) = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2 G(s)}$ $\quad \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = K_a$

IL CRITERIO DI NYQUIST

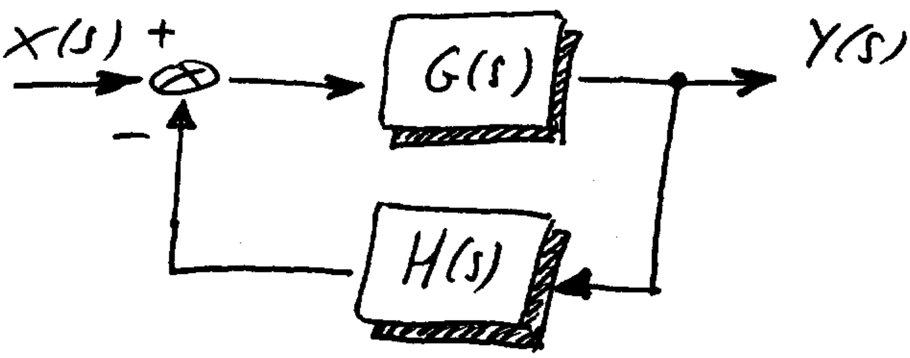
• noto il comportamento dei sistemi ad anello aperto ⟹ voglio il comportamento dei sistemi in retroazione (chiudendo l'anello)

• Diagramma polare → $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$
= CHIUSO =

TEOREMA 1: Nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $G(s)H(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa ad eccezione di un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema chiuso in retroazione sia STABILE ASINTOTICAMENTE, è che il diagramma polare completo di $G(j\omega)H(j\omega)$ non circondi né tocchi il punto critico $-1+j0$



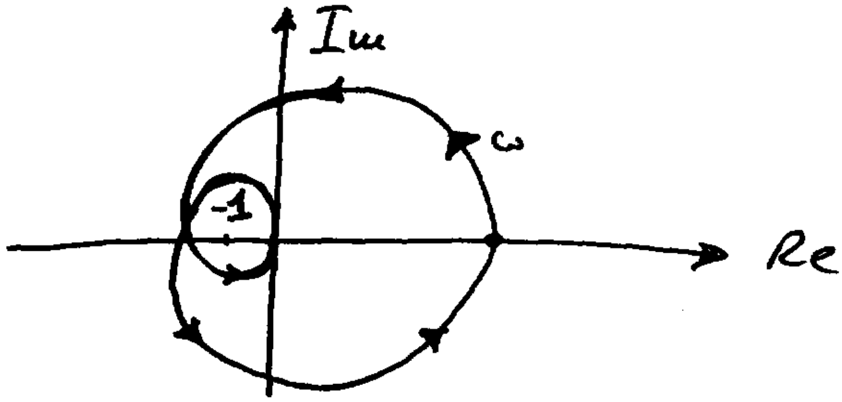
TEOREMA 2: Nell'ipotesi che il guadagno di anello $G(s)H(s)$ non presenti poli immaginari, ad eccezione di un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(j\omega)H(j\omega)$ circondi il punto critico $-1+j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $G(s)H(s)$ con parte reale positiva.
Ogni giro in meno in senso antiorario o ogni giro in più in senso orario, corrisponde alla presenza di un polo instabile nel sistema retroazionato



ESEMPIO:

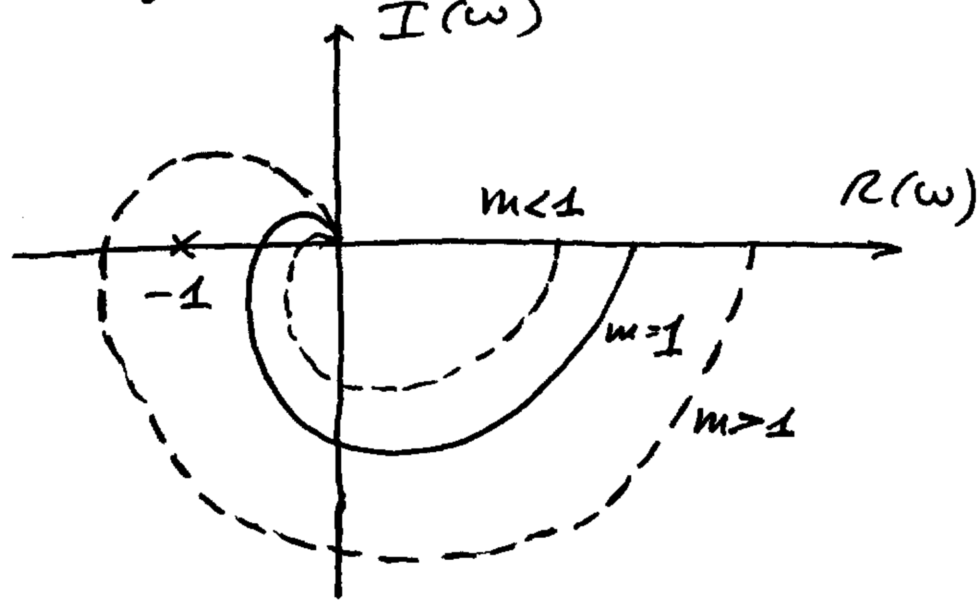
$$G(s)H(s) = \frac{K(1+\tau_0 s)}{(1-\tau_1 s)(1-\tau_2 s)}$$

Ha 2 poli a parte reale positiva!

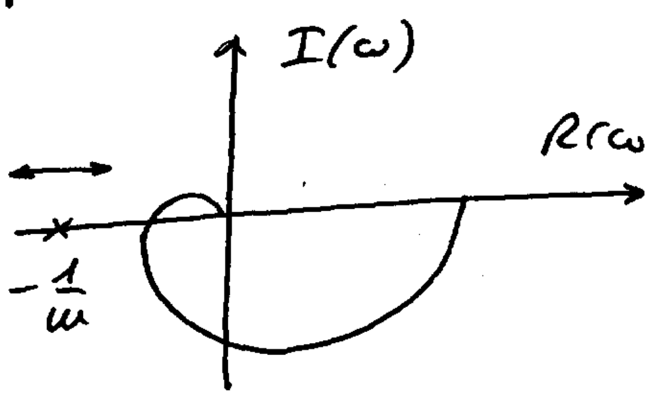


studio della stabilità al variare della costante di guadagno K:

$\boxed{K = m K_0}$



oppure considero $-\frac{1}{m}$ come il punto critico variabile



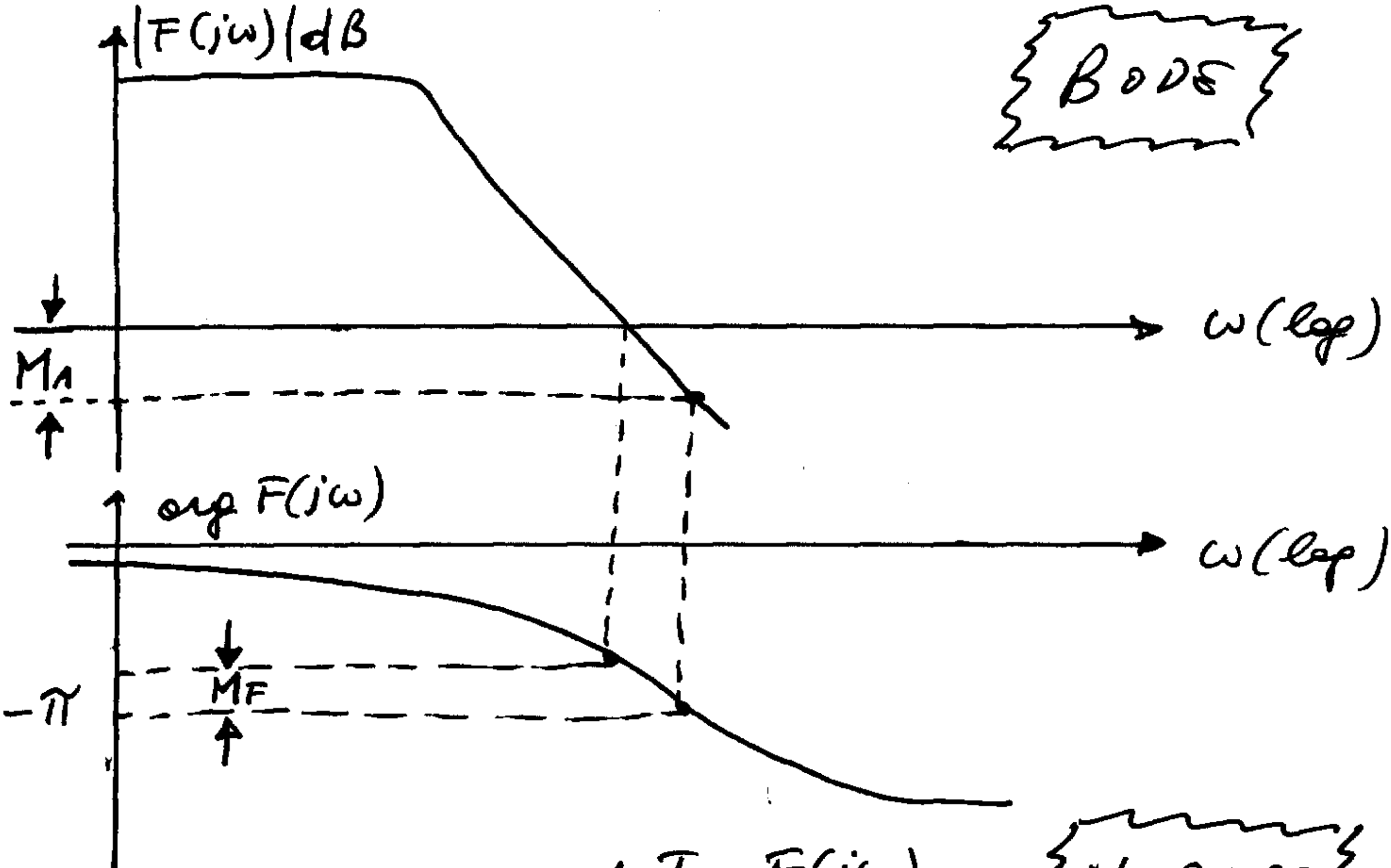
MARGINI DI FASE E DI AMPIEZZA

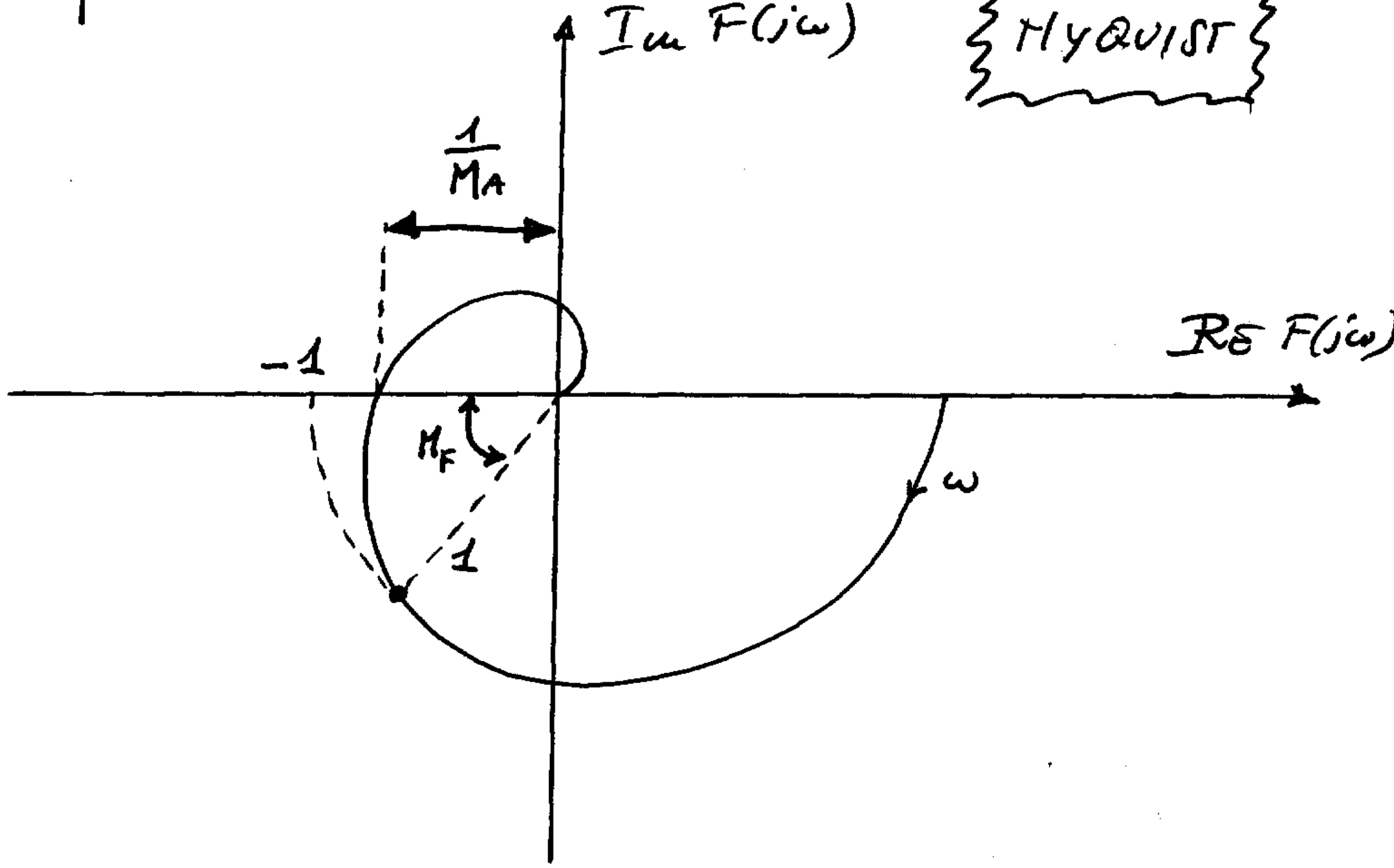
- si sfrutta il criterio di Nyquist
- maggiore o minore tendenza all'instabilità
- poli dominanti, se il diagramma di Nyquist ad anello aperto si avvicina a -1, i poli dominanti si avvicinano all'asse immaginario e possono nel semipiano dx

• **MARGINE DI AMPIEZZA**: è l'inverso del modulo del guadagno ad anello alla pulsazione corrispondente alla fase $(-\pi)$

• **MARGINE DI FASE**: è l'angolo che occorre sottrarre alla fase (in genere negativa) del guadagno di anello alla pulsazione corrispondente al valore unitario del modulo.

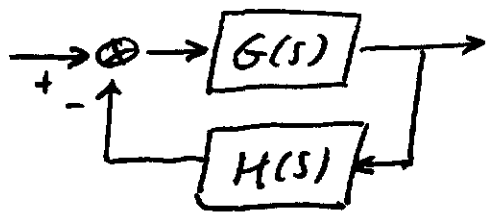
di solito il margine di ampiezza M_A viene espresso in dB, quindi valori negativi di M_F (margine fase) e di M_A (dB) corrispondono all'instabilità


BODE
|F(jω)| dB
ω (log)
M_A
arg F(jω)
ω (log)
$-\pi$
M_F


NYQUIST
Im F(jω)
Re F(jω)
$\frac{1}{M_A}$
-1
M_F
1
ω

IL METODO DEL LUOGO DELLE RADICI

procedimento grafico per la costruzione del tracciato descritto nel piano complesso dalle radici dell'eq.ne caratteristica (del sistema retroazionato) al variare di un parametro che (di solito) è la costante di guadagno di anello.



eq.ne caratteristica: $1+G(s)H(s)=0$

RISOLVENDOLA TROVO I POLI!

in genere avrò $G(s)=\dfrac{K(1+\tau s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$ K varia da "0" a "+∞" e è un PARAMETRO

esprimo $G(s)H(s)$ così:

$$G(s)H(s)=\tilde{K}\,\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$\tilde{K}$ è il GUADAGNO DI ANELLO

l'eq.ne caratt. diventa: $1+\tilde{K}\,\tilde{G}(s)=0$

1) $\tilde{K}>0 \rightarrow |\tilde{G}(s)|=\dfrac{1}{\tilde{K}}$; $\arg \tilde{G}(s)=(2\nu+1)\pi \quad \forall \nu\in\mathbb{N}$

2) $\tilde{K}<0 \rightarrow |\tilde{G}(s)|=\dfrac{1}{-\tilde{K}}$; $\arg \tilde{G}(s)=2\nu\pi \quad \nu\in\mathbb{N}$

NOTA: si suppone $G(s)H(s)$ non ha zeri nell'origine

PROPIETA' DEL LUOGO DELLE RADICI:

PR1: Ogni ramo parte da un polo di $G(s)H(s)$ e termina in uno zero di $G(s)H(s)$ o all'infinito. Ci sono tanti rami quanti poli di $G(s)H(s)$ e si intersecano nelle radici multiple.

PR2: Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale

PR3: Se $\tilde{K}>0$ allora un punto dell'asse reale appartiene al luogo se si lascia alla sua dx. un numero dispari di poli e zeri, se $\tilde{K}<0$ allora un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua dx un numero totale pari di zeri e poli.

PR4: l'angolo col quale il luogo delle radici lascia un polo p_i è:

$$\cdot\ \tilde{K}>0 \qquad \underline{(2\nu+1)\pi} + \sum_{j=1}^{m} \underline{\arg(p_i - z_j)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \underline{\arg(p_i - p_j)}$$

$$\cdot\ \tilde{K}<0 \qquad \underline{2\nu\pi} + \sum_{j=1}^{m} \underline{\arg(p_i - z_j)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \underline{\arg(p_i - p_j)}$$

l'angolo secondo il quale il luogo delle radici tende ad uno zero z_i è:

• $\tilde{K} > 0 \quad (2\nu+1)\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} arg(z_i - z_j) + \sum_{j=1}^{n} arg(z_i - p_j)$

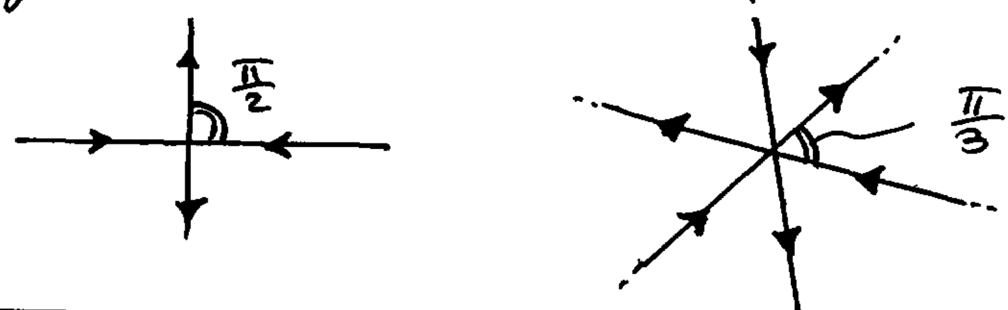
• $\tilde{K} < 0 \quad (2\nu\pi) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} arg(z_i - z_j) + \sum_{j=1}^{n} arg(z_i - p_j)$

$\boxed{PR. 5}$: PUNTI DI DIRAMAZIONE. Una radice multipla di ordine h dell'eq.ne caratteristica $1 + G(s)H(s) = 0$ corrisponde ad un punto del luogo delle radici comune a h rami. Sono soddisfatte anche le $\frac{d\, G(s)H(s)}{ds}$, $\frac{d^2\, G(s)H(s)}{ds^2}$, …, $\frac{d^{h-1}\, G(s)H(s)}{ds^{h-1}}$ che per punti di diramazione di 2 rami, diventa:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s - z_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - p_i} = 0}$$

le radici di questa equazione sono le stesse delle radici di $\frac{d}{ds}(G(s)H(s)) = 0$

PR.6: in corrispondenza di una radice di $G(s)K(s)+1=0$ di ordine h, il luogo presenta h rami entranti e h rami uscenti ALTERNATI TRA LORO e le CUI TANGENTI dividono lo spazio circostante in settori uguali di $\left(\frac{\pi}{h}\right)$ radianti.



PR.7: Se il # di poli è maggiore del # di zeri (di $G(s)K(s)$) allora ci sono rami del luogo che vanno all'infinito. Gli asintoti di questi rami formano una stella con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\boxed{\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right)}$$

(n: # poli, m: # zeri)

e, gli asintoti, formano con l'asse reale gli angoli:

- $\tilde{K}>0$ $\quad \vartheta_\nu = \frac{(2\nu+1)\pi}{n-m} \quad \nu = 0,1,\dots,n-m-1$
- $\tilde{K}<0$ $\quad \vartheta_\nu = \frac{2\nu\pi}{n-m} \quad \nu = 0,1,\dots,n-m-1$

IL CONTORNO DELLE RADICI:

- col LUOGO DELLE RADICI faccio variare la costante di amplificazione K e vado a vedere dove vanno a finire i poli dominanti
- col CONTORNO DELLE RADICI faccio variare un altro parametro (ad esempio una costante di tempo, ecc...) e vado a vedere dove vanno a finire i poli dominanti

ESEMPIO: varia un polo di $G(s)H(s)$:

$$G(s)H(s) = R(s)\cdot\frac{1}{1+\tau s} \quad \left(\tau \text{ varia da "0" a "}+\infty\text{"}\right)$$

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$ f.ne trasferimento sist. retroaz.

$$1+G(s)H(s) = 1 + R(s)\frac{1}{1+\tau s} \overset{\text{impongo io}}{\equiv} 0$$

$$1+\tau s + R(s) = 0 \longrightarrow 1 + \frac{\tau s}{1+R(s)} = 0$$

$\Rightarrow$ MI SONO RICONDOTTO ALLA FORMA $1+K\,G(s)H(s)=0$ DEL LUOGO DELLE RADICI! ORA BASTA TRACCIARE IL LUOGO DELLE RADICI dove, al posto di $G(s)H(s)$ avrò $\frac{s}{1+R(s)}$