UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

III INCONTRO – DIPLOMI A DISTANZA DI INGEGNERIA INFORMATICA

MODULO DI "CONTROLLI AUTOMATICI"

PROGRAMMA:

I - PROGETTO DI CONTROLLORI:

- i principali compensatori - esempi di reti correttrici
- compensazione mediante reti ritardatrici
- compensazione mediante reti anticipatrici
- compensazione mediante reti a ritardo/anticipo
- progetto analitico di regolatori
- il regolatore PID

II - LE APPROSSIMANTI DI PADÉ:

- approssimazioni razionali di $e^{-t_0 s}$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

PRINCIPALI TIPI DI CONTROLLORI

- reti correttrici
- regolatori "standard" ad azione { proporzionale / integrale / derivativa
- per poi passare a "sintesi del regolatore"

STABILITÀ IN SENSO STRETTO SEMPRE PRESENTE. CHE "MIGLIORIAMO" È LA STABILITÀ IN SENSO LATO (M_F, M_A)

SPECIFICHE:

- PRECISIONE:
  - comportamento in presenza di disturbi e/o variazioni di parametri
  - errori a regime.
- STABILITÀ (in senso lato):
  - massima sovraelongazione $S\%$
  - picco risonanza (ω_R, M_R)
  - M_A e M_F
  - δ (coeff. smorzamento poli dom.)
- VELOCITÀ DI RISPOSTA:
  - Tempo salita
  - Tempo assestamento
  - larghezza di banda

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

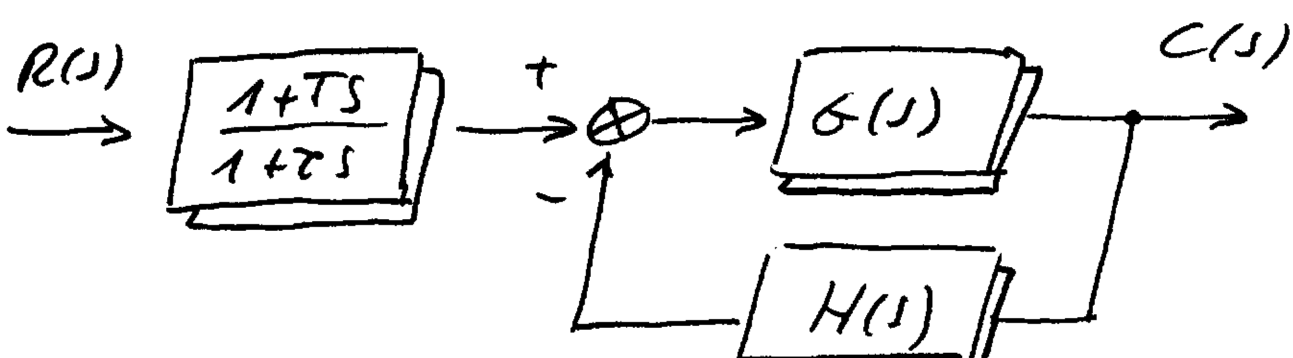
PROCEDIMENTO:

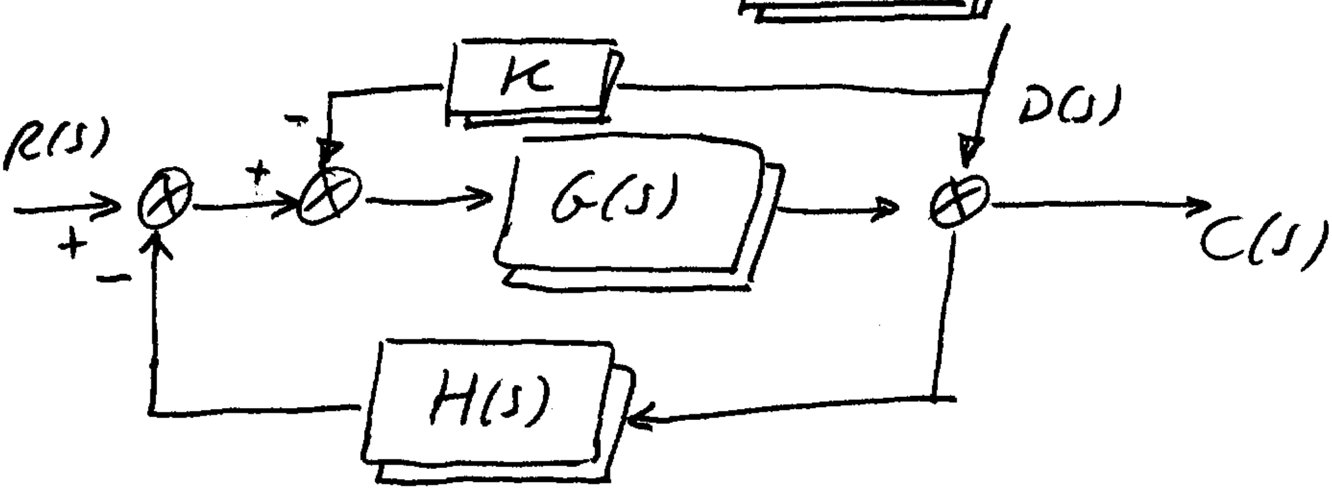
1) DATI SPECIFICA ⟶ COSTANTE DI GUADAGNO K
(precisione...) sufficientem. elevata

2) STABILITA' DEL SISTEMA IN RETROAZIONE

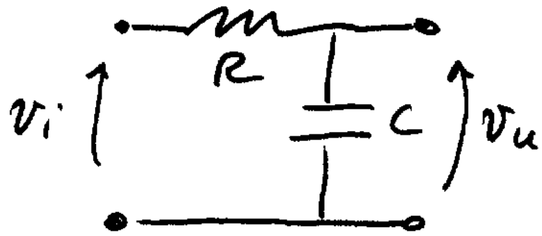
SE NON C'E' ⟶ RETE CORRETTRICE
(CONTROLLORE / COMPENSATORE)

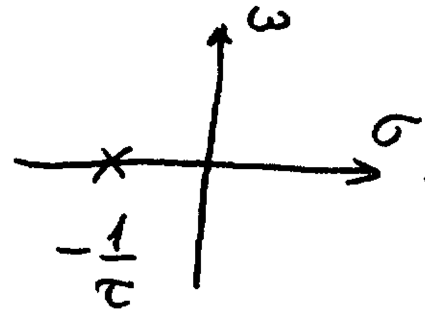
3) SE NEMMENO LA RETE CORRETTRICE RIESCE a GARANTIRE LA STABILITA' ⟶ compensatore ad <u>AZIONE DIRETTA</u>

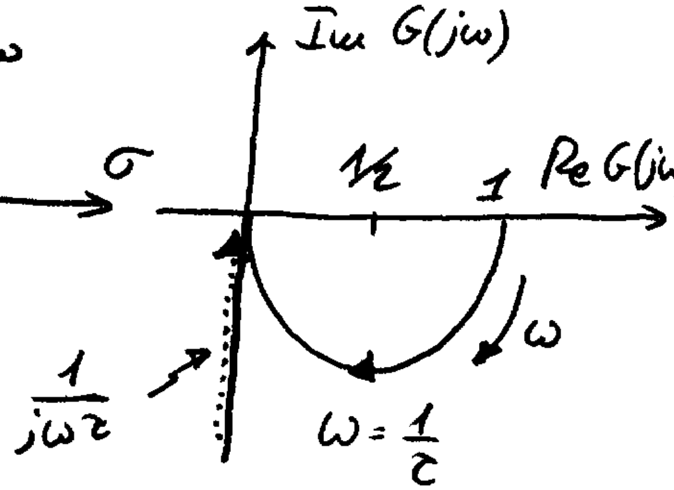




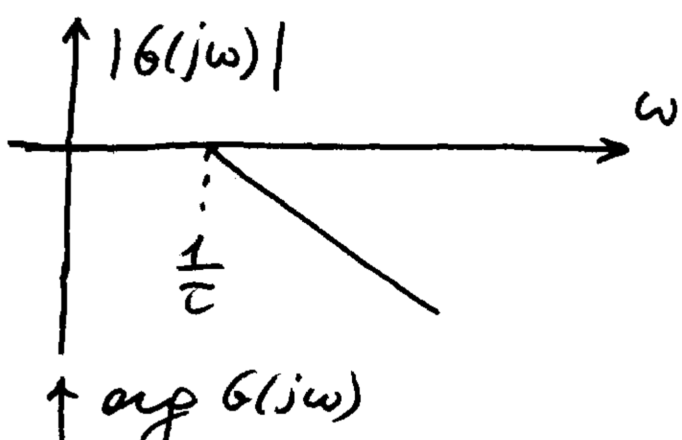
RETE INTEGRATRICE:

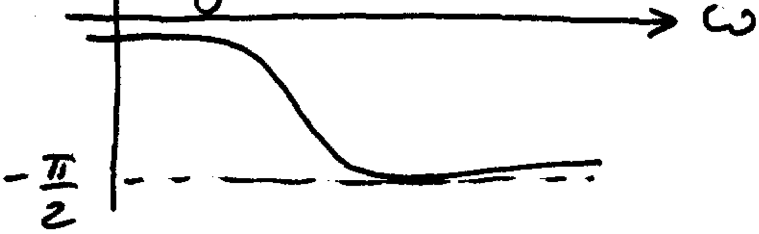






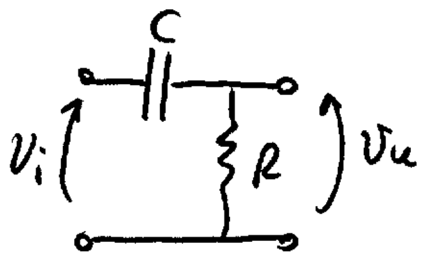
$$G(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{1+\tau s} \qquad (\tau = RC)$$



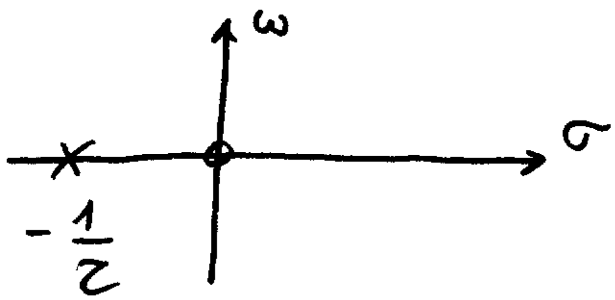


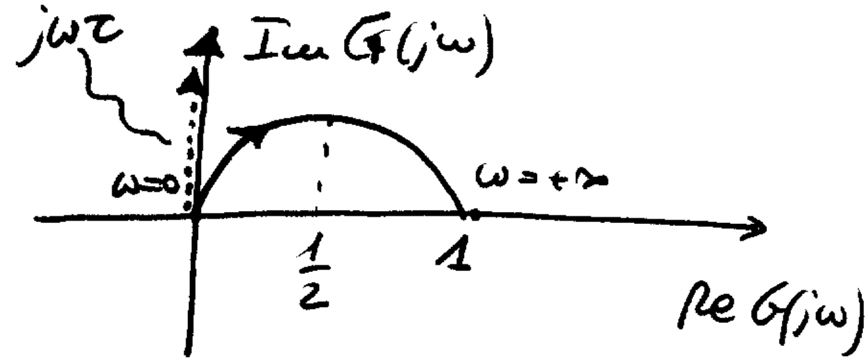
- PER ALTE FREQUENZE ($\omega\tau \gg 1$) $G(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega\tau}$
- È UN PASSA-BASSO
- PER ω elevate V_u è l'integrale di V_i
- RITARDA LA FASE

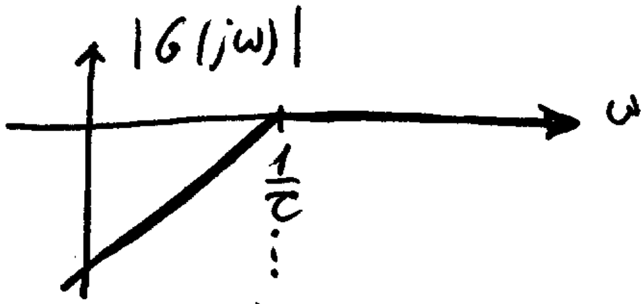
RETE DERIVATRICE:

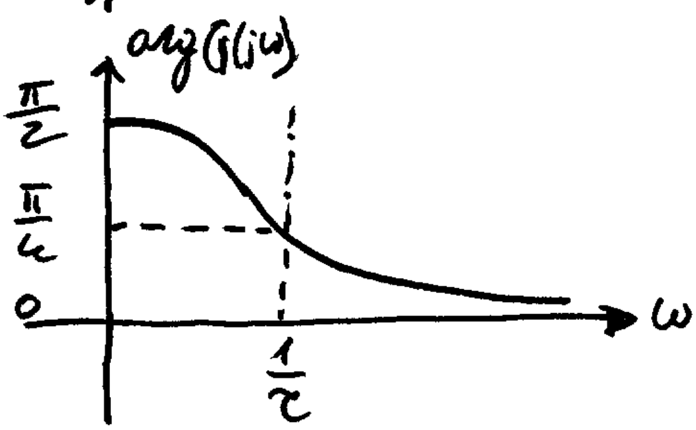


$$G(s) = \frac{R}{R+\frac{1}{Cs}} = \frac{\tau s}{1+\tau s} \qquad \tau = RC$$







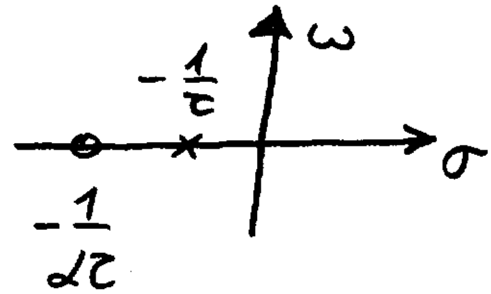


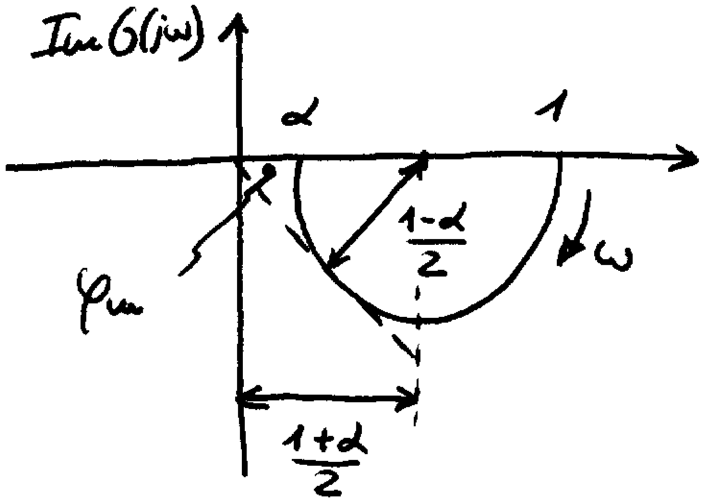
- PER ω piccole ($\omega\tau \ll 1$) $G(j\omega) \simeq j\omega\tau$
- È UN PASSA-ALTO
- PER ω PICCOLE V_u è LA DERIVATA DI V_i

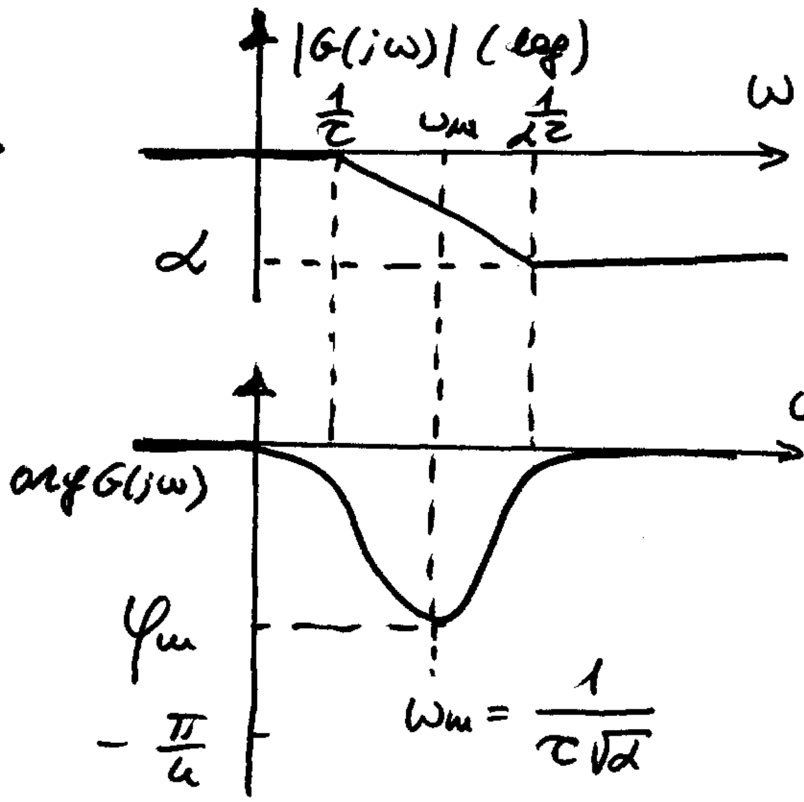
$\Longrightarrow$ non potrebbe mai essere usata in cascata dell'anello di retroazione perché blocca la continua

COMPENSAZIONE RITARDATRICE (RETE RITARDATRICE)

$$G(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \qquad \alpha < 1$$







- RITARDA LA FASE PER PULSAZIONI FINITE
- $\omega = 0$ e $\omega = +\infty$ <u>non</u> SFASA
- $\omega = +\infty$ ATTENUA DI α
- $\varphi_m = -\arcsin\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$ max ritardo di FASE
- IN GENERE $\arg G(j\omega) = \operatorname{arctg} \alpha\omega\tau - \operatorname{arctg} \omega\tau$

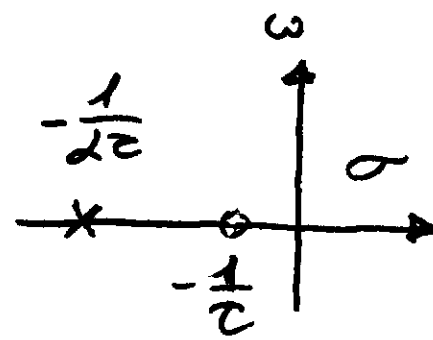
$$\frac{d \arg G(j\omega)}{d\omega} = 0 \implies \omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$$

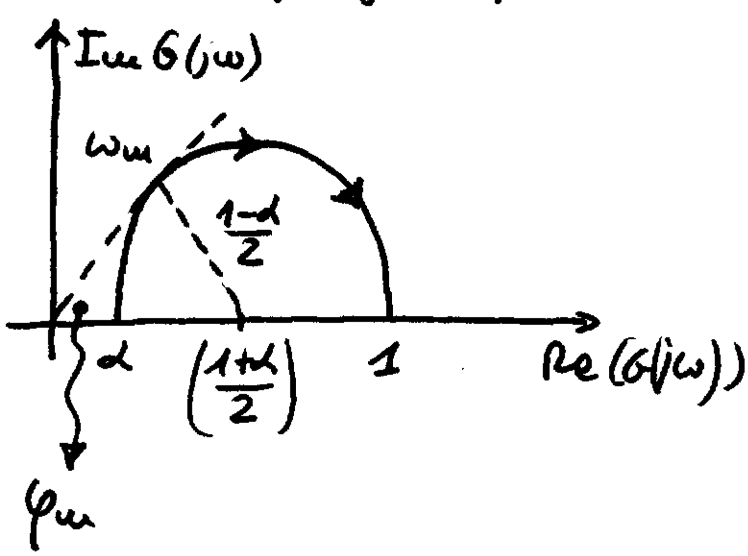
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

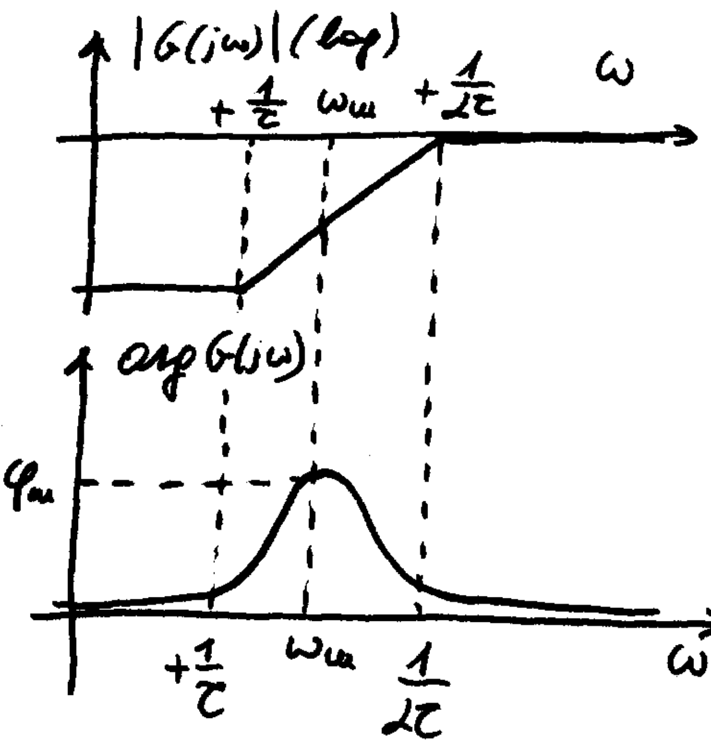
RETE ANTICIPATRICE (COMPENSAZIONE ANTICIP.)

→ la + usata!

$$G(s) = \underbrace{\alpha}_{\text{superfluo!}} \cdot \left(\frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \right) \qquad (\alpha < 1)$$







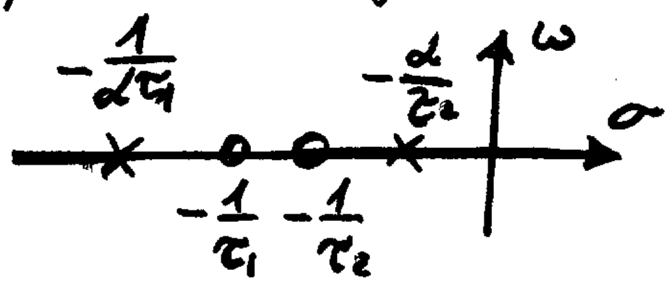
- ANTICIPA LA FASE $\forall \omega$
- $\omega = 0$ e $\omega = +\infty$ NON SFASA
- $\omega = +\infty$ NON ATTENUA, $\omega = 0$ ATTENUA DI α
- $\varphi_m = \arcsin\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$
- $\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$ ("coi logaritmi": $\omega_m = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{\tau} + \ln\frac{1}{\alpha\tau}\right] = \ln\sqrt{\frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{\alpha\tau}} = \dots$)

COMPENSAZIONE CON RETE A RITARDO/ANTICIPO

$$G(s) = \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)+\tau_{12} s} = \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\tau_a s)(1+\tau_b s)}$$

$-\frac{1}{\tau_1}$ e $-\frac{1}{\tau_2}$ sono radici negative

con l'aggiunta di $\tau_{12} s$ aumenta il coefficiente del termine in s $\rightarrow$ il discriminante aumenta $\rightarrow$ aumenta la distanza tra i poli rispetto a quella tra gli zeri:



$$\tau_1 < \tau_2$$

1) $\tau_1 \tau_2 = \tau_a \tau_b$ $\leftarrow$ del termine in s^2

2) $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_a < \tau_b$ $\leftarrow$ per fissare le idee!

3) $$\frac{\tau_a}{\tau_1} = \frac{\tau_2}{\tau_b} = \alpha < 1$$

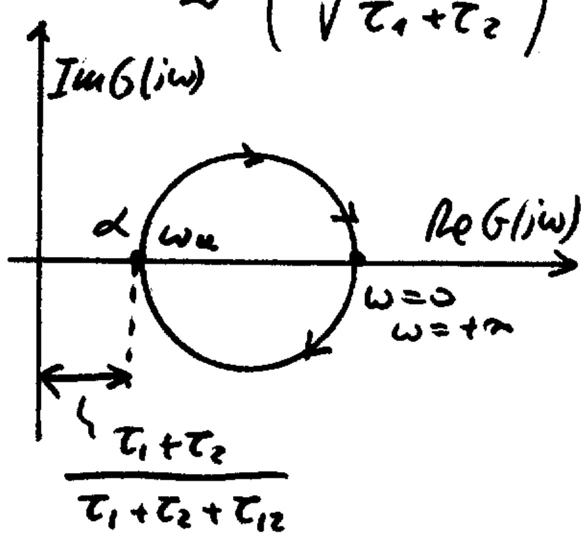
$$G(s) = \left(\frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{\left(1+\left(\frac{\tau_2}{\alpha}\right)s\right)\left(1+\alpha\tau_1 s\right)} \right) \quad \text{oppure}$$

$$G(s) = \left(\frac{s^2 + 2\delta'\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \right)$$

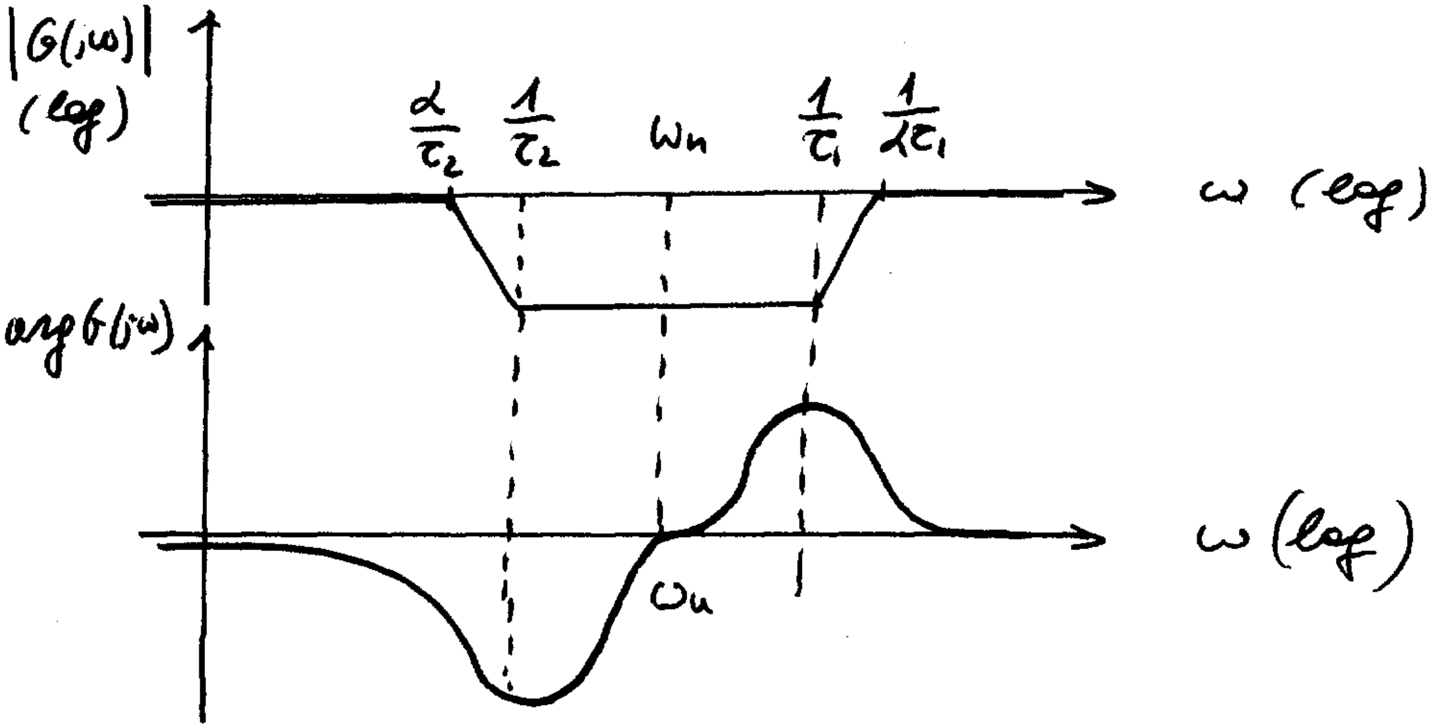
→ NOTA!! ω_n è lo stesso a denominatore e a numeratore, mentre $\delta \neq \delta'$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} \qquad \delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_1+\tau_2+\tau_{12}}{\sqrt{\tau_1+\tau_2}}\right) > 1$$

$$\delta' = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{\sqrt{\tau_1+\tau_2}}\right) > 1 \qquad \boxed{\delta > \delta'}$$



Per $\omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$ la rete attenua di $\dfrac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1+\tau_2+\tau_{12}}$ ma NON SFASA



OCCHIO: $\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12} = \tau_a + \tau_b$

$$\left| G(j\omega) \right| \Bigg|_{\omega = \omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}} =$$

$$= \left| \frac{1 + 2\delta' \frac{j\omega_n}{\omega_n} + \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}}{1 + 2\delta \frac{j\omega_n}{\omega_n} + \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}} \right| = \left| \frac{2(1 + j\delta')}{2(1 + j\delta)} \right| = \sqrt{\frac{\delta'^2 + 1}{\delta^2 + 1}} =$$

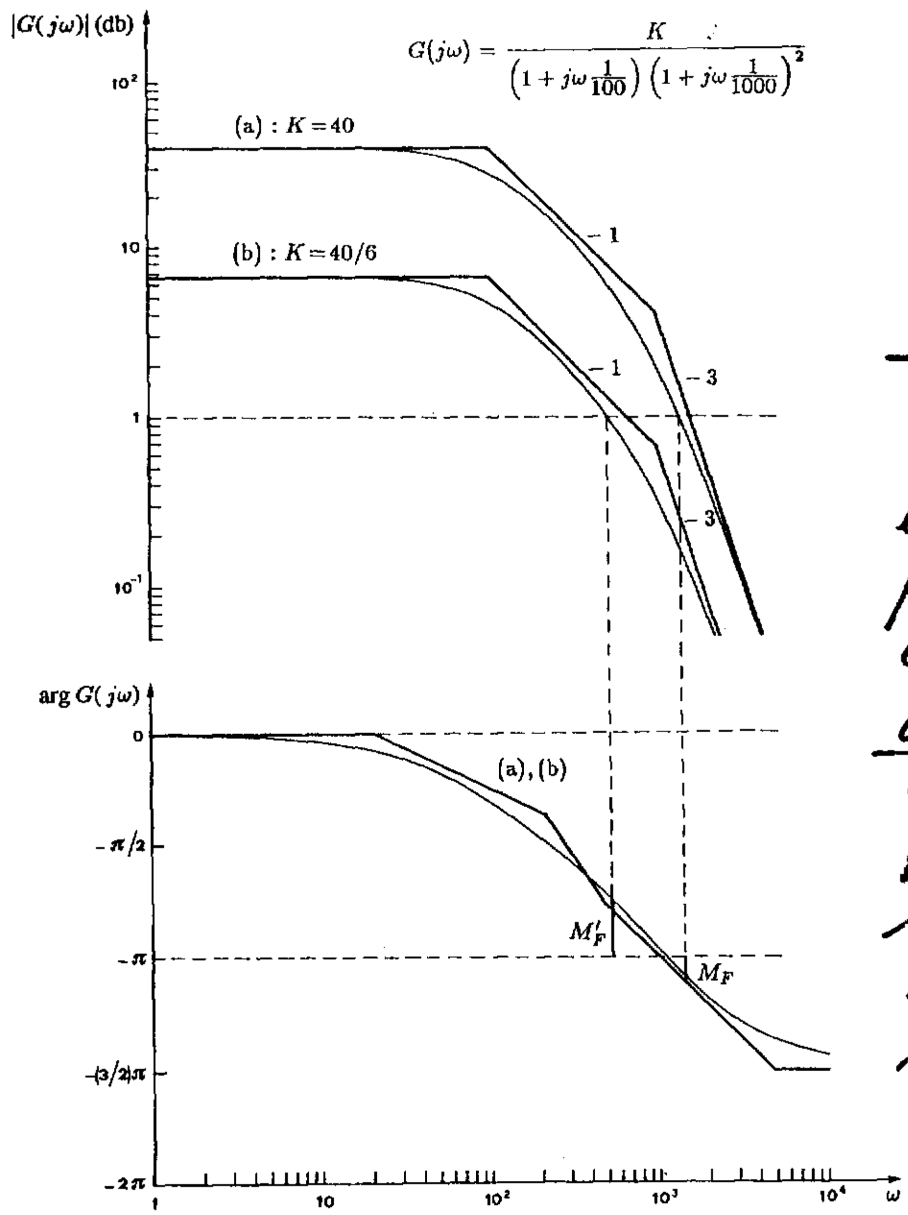
$$= \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_a + \tau_b}$$

attenuazione in corrispondenza di $\omega = \omega_n$ – lo sfasamento è nullo

COMPENSAZIONE CON RETI RITARDATRICI:

Se ho un sistema da rendere stabile o devo soddisfare specifiche su M_F o M_A?

⇒ PRIMO APPROCCIO: riduco la costante di guadagno di anello –



• Riducendo la K per sistemi di tipo "0" o "1" si raggiunge sempre la stabilità voluta

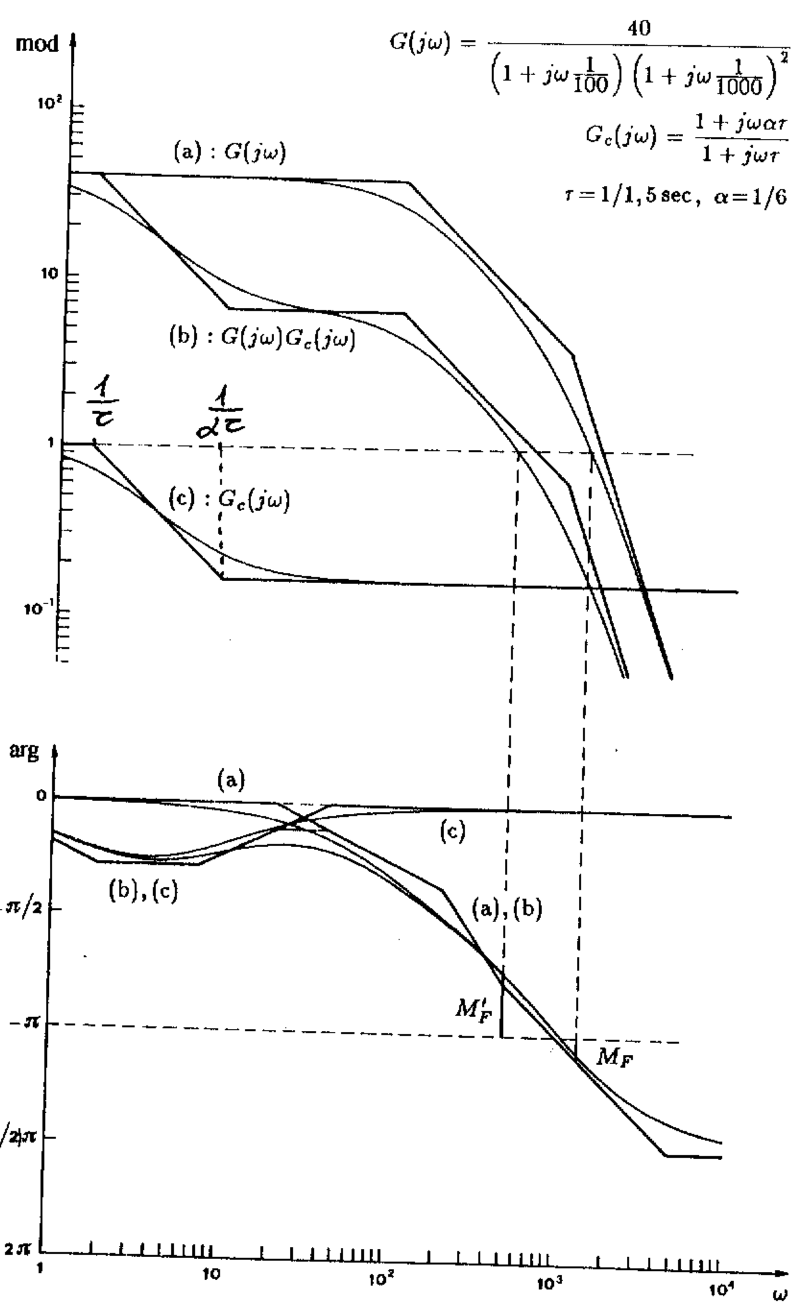
• Se l'intersezione del diagramma $|G(j\omega)|$ con l'ascissa, avviene con pendenza "−1" → ho la stabilità, altrimenti no

• riduzione K significa peggiore prontezza di risposta, sensibilità ai disturbi, errore a regime alto

SOLUZIONE?
RETE RITARDATRICE!

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

un controllo ritardatore diminuisce il guadagno alle alte frequenze senza influire sulle costanti di guadagno:

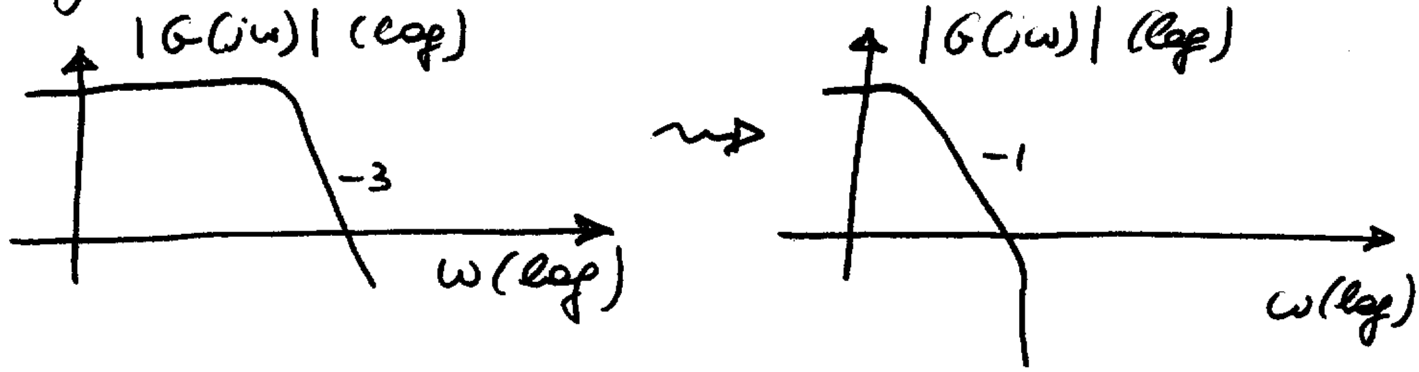


DIFETTO:

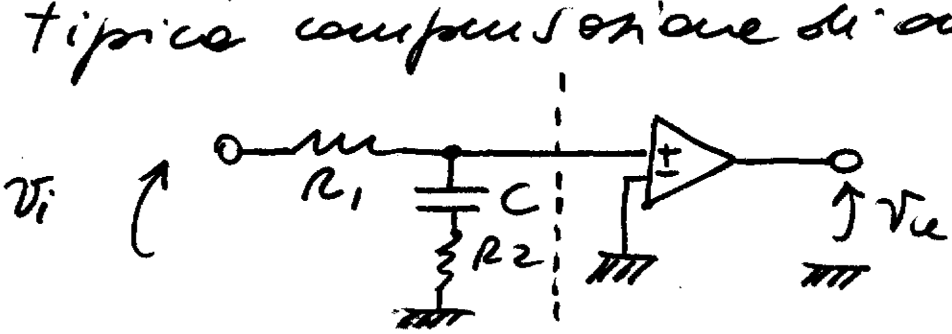
Se τ è grande $\frac{1}{\tau}$ è piccolo → → la larghezza di banda cala notevolmente — → CONVIENE allora diminuire α (cioè maggiore attenuazione) e diminuire τ per allargare la banda passante

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

- una compensazione con rete ritardatrice avviene "per tentativi". -
- Si usa nei sistemi in cui si vuole un elevato guadagno a basse frequenze e che risulta difficile stabilizzare in quanto l'intersezione del diagramma delle ampiezze con l'asse delle ascisse avviene con pendenze molto elevate:

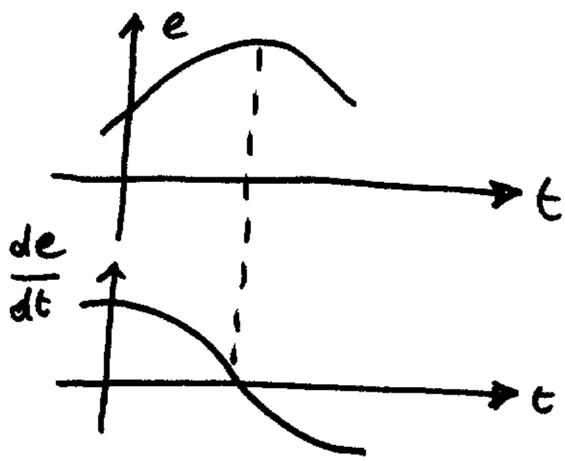


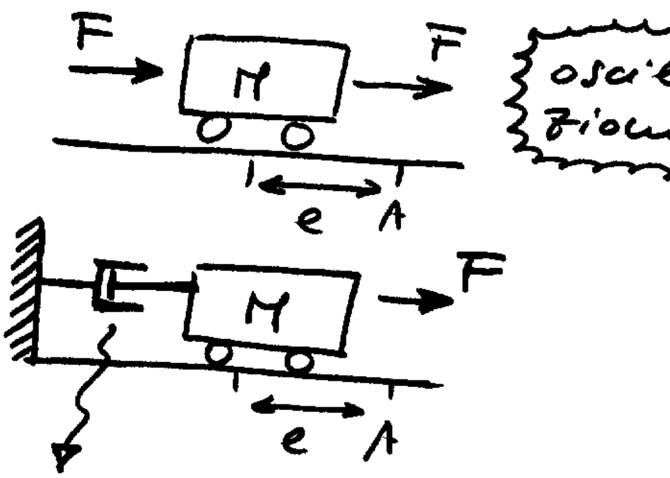
- larghezza di banda minore, risposte meno pronte ad alte frequenze, disturbi e variazione dei parametri non attenuati ad alte frequenze
- tipica compensazione di amp. operazionale:



COMPENSAZIONE CON RETI ANTICIPATRICI:

→ sfrutta l'introduzione di un termine proporzionale alla derivata dell'errore.





ammortizzatore

$$G(s) = \frac{1+\tau s}{1+\tau\alpha s}, \quad \alpha < 1 \rightsquigarrow G(s) \approx 1+\tau s$$

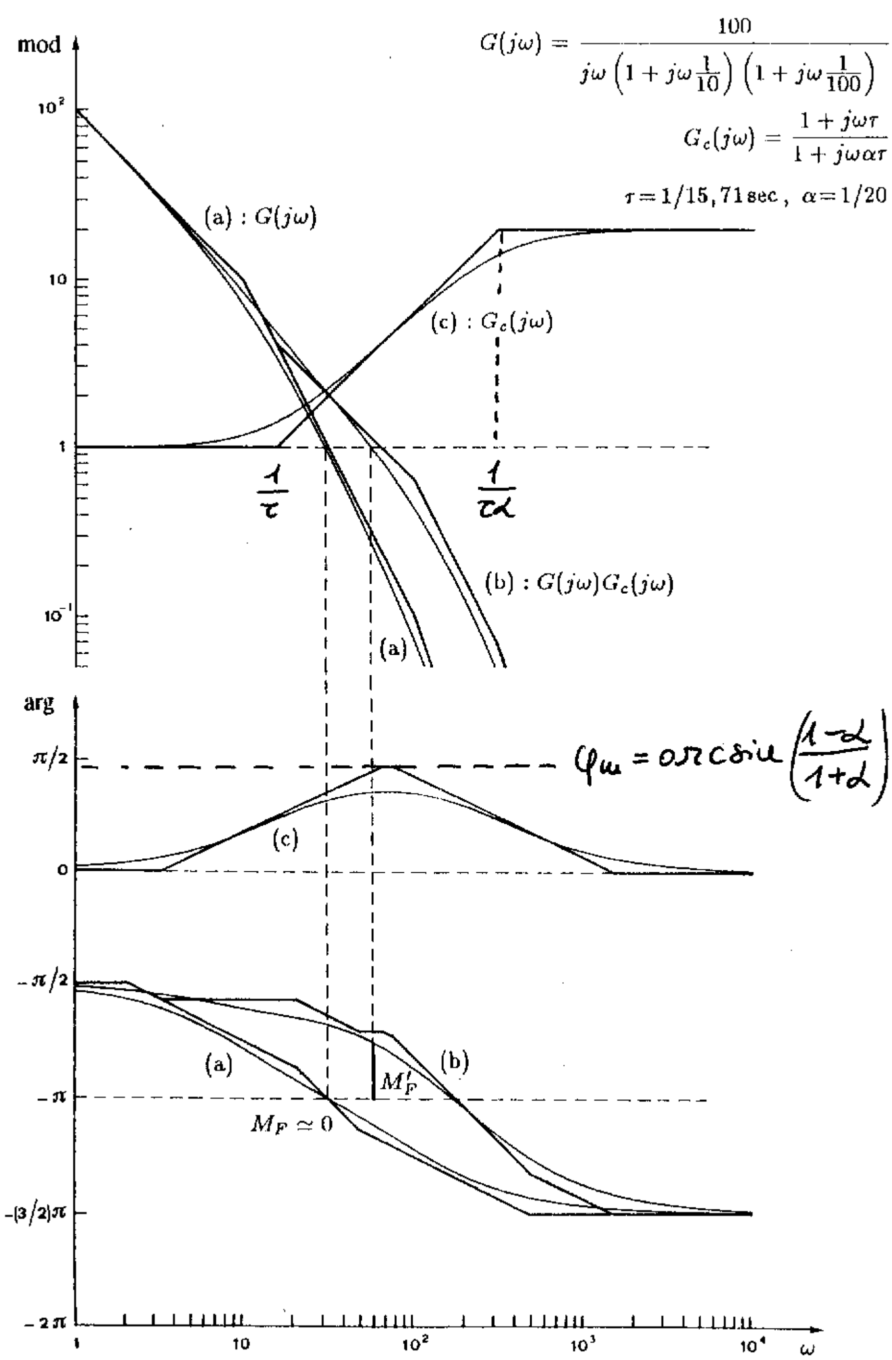
per ω piccole

→ altro modo di vedere la cosa: la rete AUMENTA la fase, cioè migliora il M_F.

PROCEDIMENTO:

1) si determina M_F del sistema NON compensato
2) si trova α t.c. φ_m (anticipo fase max.) porti M_F al valore voluto
3) si determina τ per TENTATIVI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA



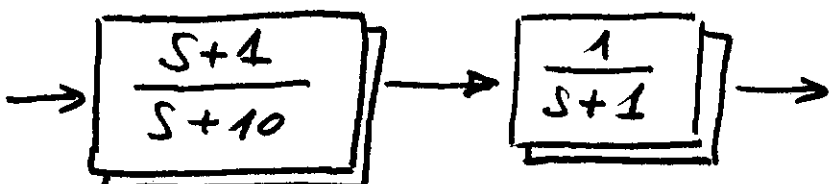
$$\Longrightarrow \begin{cases} \omega_m = \dfrac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} \\ \varphi_m = \arcsin\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \end{cases}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

CANCELLAZIONE POLO-ZERO

con rete anticipatrice: $G(s) = \dfrac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$

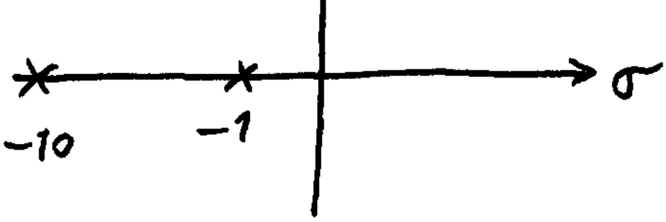
se lo zero $z_1 = -\dfrac{1}{\tau}$ coincide con il polo instabile del sistema, vado a cancellare un polo e lo "sostituisco" con $z_2 = -\dfrac{1}{\alpha\tau}$:



sistema ha polo in $z = -1$

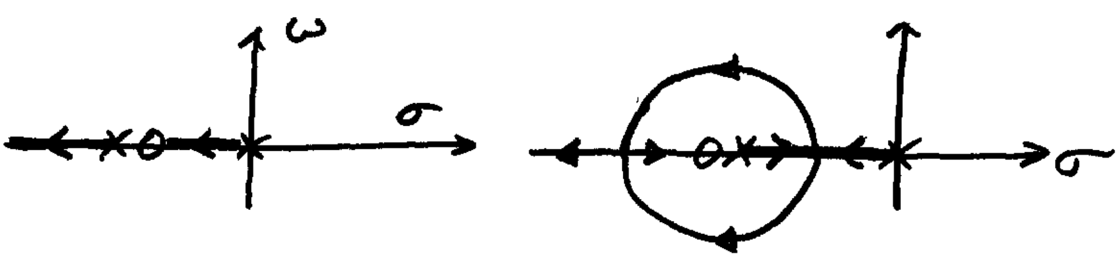
sistema compensato: $\dfrac{S+1}{S+10} \cdot \dfrac{1}{S+1} = \dfrac{1}{S+10}$

ha polo in $z' = -10$



l'introduzione di una rete anticipatrice che opera con cancellazione polo-zero, equivale ad allontanare dall'asse immaginario un polo che era "troppo vicino"!

— la cancellazione polo-zero non è mai perfetta:



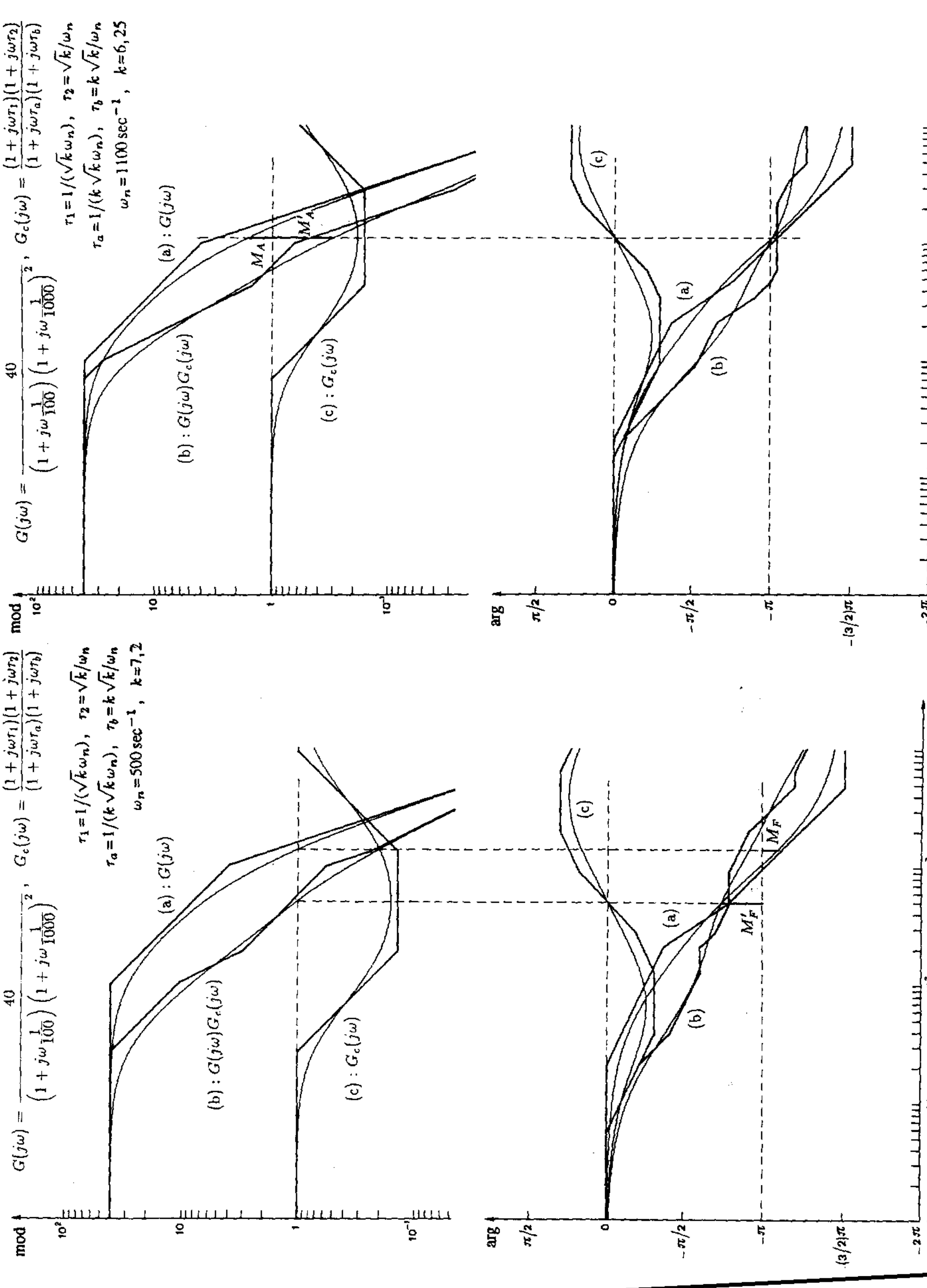
— la cancellazione polo-zero NON CONSENTE DI STABILIZZARE UN SISTEMA INSTABILE: non posso cancellare un polo positivo di un sistema, introducendo semplicemente uno zero positivo: le inevitabili imprecisioni renderebbero comunque instabile il sistema.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

COMPENSAZIONE CON RETI A RITARDO/ANTICIPO

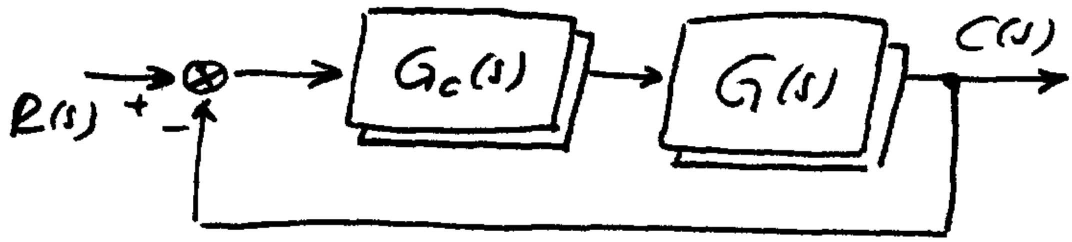
- in corrispondenza di $\omega = \omega_n$ la rete <u>non</u> sfasa ma ATTENUA
- dato M_F' dalle specifiche
- determino $\tilde{\omega}$ t.c. per $\omega = \tilde{\omega}$ la fase è: $(-\pi + M_F')$
- determino α t.c. l'intersezione con l'asse delle ascisse avvenga in $\omega = \tilde{\omega}$
- <u>non</u> procedo per tentativi!
- se è dato M_A' dalle specifiche?
- determino ω_n che coincide con la pulsazione a cui il sistema <u>non</u> compensato ha fase pari a $-\pi$
- determino l'attenuazione α opportuna

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA



PROGETTO ANALITICO DI REGOLATORI:

- sintesi DIRETTA
- quando ho pochi dati di specifiche e f.ne di trasferimento del sistema controllato semplice.



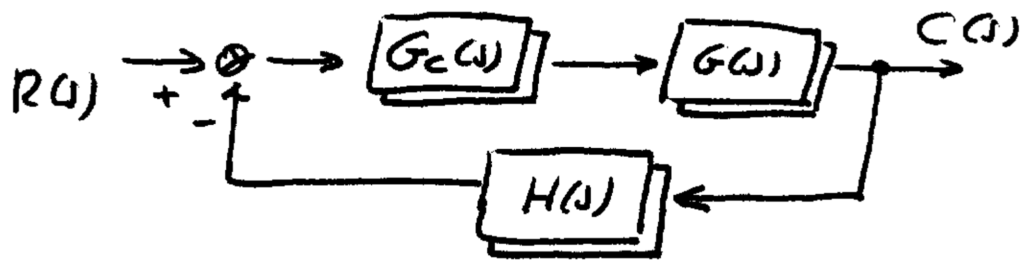
- $G_0(s)$ è la f.ne di trasf. complessiva
- $G(s)$ STABILE e A FASE MINIMA
- da $G_0(s)$ che lo fisso come voglio io, ricavo la $G_C(s)$:

$$G_0(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} = \frac{G_c(s) \cdot G(s)}{1 + G_c(s)\, G(s)}$$

$$\Longrightarrow \quad G_c(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)} \cdot \frac{1}{G(s)} =$$

$$= \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)} \cdot \frac{Q(s)}{P(s)}$$

con la retroazione:



- $$G_c(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)-P_0(s)} \cdot \frac{1}{G(s)H(s)} = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)-P_0(s)} \cdot \frac{Q(s)}{P(s)}$$

<u>VINCOLI SU $G_0(s)$:</u>

1) grado $Q_0(s)$ − grado $P_0(s) \geq$ grado $Q(s)$ − grado $P(s)$
2) <u>no</u> cancellazioni polo-zero con <u>poli nulli</u>
3) per $G(s)$ di tipo 1 $\rightarrow$ $P_0(s)$ e $Q_0(s)$ hanno termini noti uguali
4) per $G(s)$ di tipo 2 $\rightarrow$ $P_0(s)$ e $Q_0(s)$ hanno termini noti e coefficiente del termine in "s" uguale

<u>ESEMPI:</u> − $G_0(s) = \left(\dfrac{K_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \right)$

− $G_0(s) = \left(\dfrac{K_0 \omega_n^2}{(1+\tau s)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right)$

I REGOLATORI STANDARD

- caratteristiche diverse per sistemi dinamici diversi
- convenienza economica ad unificare gli apparati di controllo.
- apparati di controllo standard provvisti di dispositivi di correzione "ampi" dei parametri

---

- regolatore proporzionale : $G_c(s) = K_p$
- regolatore integrale: $G_c(s) = \frac{K_p}{T_i s}$
- regolatore proporzionale-integrale : $G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$
- regolatore propor.-derivativo: $G_c(s) = K_p(1 + T_d s)$
- REGOLATORE PID:

$$G_c(s) = \underbrace{K_p}_{\substack{\text{sensibilità proporzionale} \\ \text{costante di guadagno}}} \left(1 + \underbrace{\frac{T_d s}{1 + \alpha T_d s}}_{\text{azione "stabilizzatrice"}} + \underbrace{\frac{1}{T_i s}}_{\text{errore "nullo" a regime}}\right)$$

T_d cost. tempo az. derivativa

T_i cost. tempo azione integr.

APPROSSIMANTI DI PADÉ

- approssimazioni razionali di $e^{-t_0 s}$
- se ho un ritardo finito nel sistema conviene approssimarlo con una f.ne razionale $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ per procedere con le tecniche usuali (anti Trasformate di Laplace ecc...)

$$f(s) = e^{-s} = 1 - s + \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} + \dots$$

ALLORA:
- $P(s) = b_p s^p + b_{p-1} s^{p-1} + \dots + b_1 s + b_0$
- $Q(s) = a_q s^q + a_{q-1} s^{q-1} + \dots + a_1 s + a_0$

- $b_k = \left[\dfrac{(p+q-k)!\,p!}{(p+q)!\,k!\,(p-k)!}\right](-1)^k, \quad k = 0, 1, \dots, p$

- $a_k = \left[\dfrac{(p+q-k)!\,q!}{(p+q)!\,k!\,(q-k)!}\right], \quad k = 0, 1, \dots, q$

$$\boxed{f(s) \approx \frac{P(s)}{Q(s)}}$$

decido io p e q se non mi viene richiesto

ESEMPIO:

voglio approssimare $e^{-t_0 s}$ con una f.ne razionale:

• I modo: $p = q = 3$ $\quad G_{3,3}(s) \approx e^{-t_0 s}$

$$G_{3,3}(s) = \frac{1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 - \frac{1}{120}s^3}{1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{120}s^3}$$

NOTA: se $p = q$ i coeff. di numeratore e denominatore coincidono a parte il segno!

• II modo: $p = 0$ $\quad q = 6$ $\quad G_{0,6}(s) \approx e^{-t_0 s}$

$$G_{0,6}(s) = \frac{1}{1 + s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{24}s^4 + \frac{1}{120}s^5 + \frac{1}{720}s^6}$$

normalmente $p = q$