Controlli digitali

Esercizi sulle equazioni alle differenze

1- Trova la soluzione delle seguenti equazioni alle differenze attraverso la trasformata zeta.

a)

$$\begin{cases} x(k+2) = x(k+1) + x(k) \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x(k+2) = -x(k) + u(k) \\ x(0) = 1 \\ x(1) = 0 \\ u(k) = 1(k); \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = \delta(k) \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

2- Determina la risposta all'impulso e la funzione di trasferimento per i seguenti sistemi lineari e tempo invarianti

a) $y(k) = \sum_{i=-\infty}^{k}(u(i) - u(i-10))$

b) $y(k) = -y(k-1) + u(k-2)$

c) $y(k) = \sum_{i=0}^{10} u(k-i)$.

Risposte

1- a) Usiamo le relazioni

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(k+1)] &= z\mathcal{Z}[x(k)] - zx(0) \\ \mathcal{Z}[x(k+2)] &= z^2\mathcal{Z}[x(k)] - z^2x(0) - zx(1) \end{aligned}$$

per trovare la trasformata zeta dell'equazione, che diventa

$$z^2X(z) - zx(1) - z^2x(0) = zX(z) - zx(0) + X(z)$$

da cui, sostituendo le condizioni iniziali, otteniamo

$$z^2X(z) - z = zX(z) + X(z)$$

quindi

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{z}{(z - 0.5 - \frac{\sqrt{5}}{2})(z - 0.5 + \frac{\sqrt{5}}{2})} \; .$$

Per antitrasformare usiamo l'integrale di inversione

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma X(z)z^{k-1}dz = \sum \mathrm{Res}(\frac{z^k}{z^2 - z - 1}) \; ,$$

$f(z) = X(z)z^{k-1}$ ha due poli semplici in $p_1 = 0.5 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $p2 = 0.5 - \frac{\sqrt{5}}{2}$, da cui

$$x(k) = \mathrm{Res}(f(z), p_1) + \mathrm{Res}(f(z), p_2) = \frac{\sqrt{5}}{5}((0.5 + \frac{\sqrt{5}}{2})^k - (0.5 - \frac{\sqrt{5}}{2})^k)$$

b) Dalla trasformata zeta otteniamo

$$z^2 X(z) - z^2 = -X(z) + \frac{z}{z-1}$$

e quindi

$$X(z) = \frac{z^3 - z^2 + z}{(z-1)(z^2+1)} \ ,$$

usando l'integrale di inversione si ottiene che

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_\gamma X(z) z^{k-1} dz = \sum \mathrm{Res}(\frac{z^k\left(z^2 - z + 1\right)}{(z-1)\left(z^2+1\right)})$$

la funzione $f(z) = X(z)z^{k-1}$ presenta tre poli semplici in -1 , $\pm j$, da cui

$$x(k) = \mathrm{Res}(f(z), 1) + \mathrm{Res}(f(z), j) + \mathrm{Res}(f(z), -j) = \frac{1}{4}(2 + (j+1)j^k + (-j+1)(-j)^k) =$$
$$= \frac{1}{4}(2 + (j+1)e^{j\frac{\pi}{2}k} + (-j+1)e^{-j\frac{\pi}{2}k}) = \frac{1}{2}(1 + cos(\frac{\pi}{2}k) - sin(\frac{\pi}{2}k)) \ .$$

La soluzione è periodica ed è costituita dalla ripetizione della sequenza 1, 0, 0, 1, questo si sarebbe potuto trovare anche risolvendo iterativamente l'equazione alle differenze.

c) Si ottiene

$$X(z)(z^2 + 3z + 2) = 1 \ ,$$

da cui

$$X(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2} = \frac{1}{(z+1)(z+2)} \ ,$$

antitrasformando con l'integrale di inversione

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_\gamma X(z) z^{k-1} dz = \sum \mathrm{Res}(\frac{z^{k-1}}{(z+1)(z+2)}) \ ,$$

per $k = 0$ la funzione $f(z) = X(z)z^{k-1}$ ha tre poli in $\{-1, -2, -0\}$ e la somma dei residui è 0 perchè la differenza dei gradi tra il denominatore e il numeratore è maggiore di 1, per $k > 0$, $f(z)$ ha due poli semplici in $\{-1, -2\}$ e otteniamo

$$x(k) = \mathrm{Res}(f(z), -1) + \mathrm{Res}(f(z), -2) = (-1)^{k-1} - (-2)^{k-1}$$

2-

a) Prendiamo $u(k) = \delta(k)$, otteniamo che la risposta all'impulso $h(k)$ è data da $h(k) = \sum_{i=-\infty}^{k}(\delta(i) - \delta(i-10)) = \begin{cases} 0 \text{ se } k < 0 \\ 1 \text{ se } 0 \leq k < 10 \\ 0 \text{ se } k > 10 \ , \end{cases}$ la funzione di trasferimento è la trasformata zeta della risposta all'impulso, quindi, se osserviamo che $h(k) = 1(k) - 1(k-10)$,

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(k)] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-1} z^{-10} = \frac{z^{10} - 1}{z^9(z-1)} \ .$$

b)

Facendo la trasformata zeta di $u(k)$ e $y(k)$, assumendo i due segnali nulli per k negativi, otteniamo

$$Y(z)(1+z^{-1}) = z^{-2}U(z) \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z(z+1)} \ ,$$

la risposta all'impulso è data da

$$h(k) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] = (-1)^{k-2}1(k-2) \ ,$$

c)

Ponendo $u(k) = \delta(k)$, otteniamo

$$h(k) = \begin{cases} 0 \text{ se } k < 0 \\ 1 \text{ se } 0 \leq k \leq 10 \\ 0 \text{ se } k > 10, \end{cases}$$

quindi $h(k) = 1(k) - 1(k-11)$ e

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(k)] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-1}z^{-11} = \frac{z^{11}-1}{z^{10}(z-1)} \ .$$