Controlli digitali

Esercizi sugli schemi a blocchi

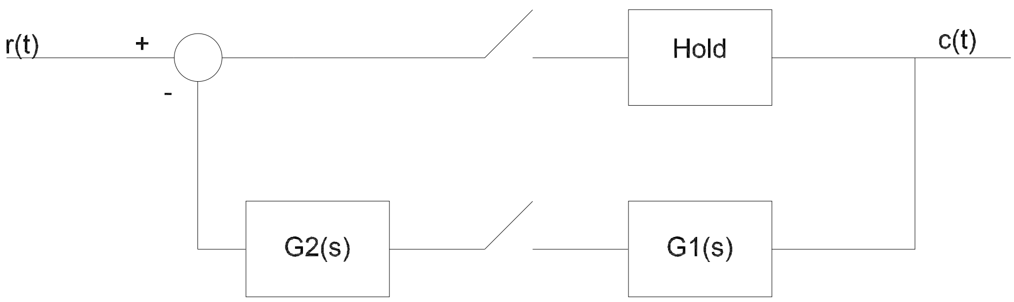
Nota: Negli esercizi seguenti possono essere utili le formule

$$\mathcal{Z}[\frac{1}{s+a}] = \frac{z}{z-e^{-aT}},\ \mathcal{Z}[\frac{1}{s}] = \frac{z}{z-1},\ \mathcal{Z}[\frac{1}{s^2}] = \frac{Tz}{(z-1)^2}\ .$$

1- Valuta la funzione di trasferimento discreta tra i campioni di $r(t)$ e $c(t)$ per il seguente schema a blocchi, con

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1},\ G_2(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

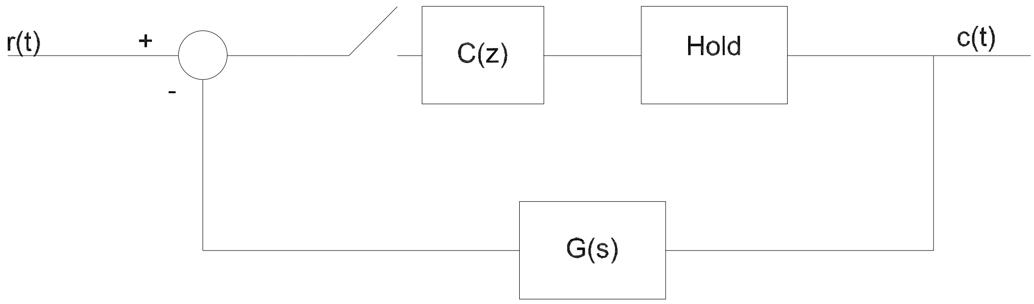
considerando un tempo di campionamento $T = 0.5s$.



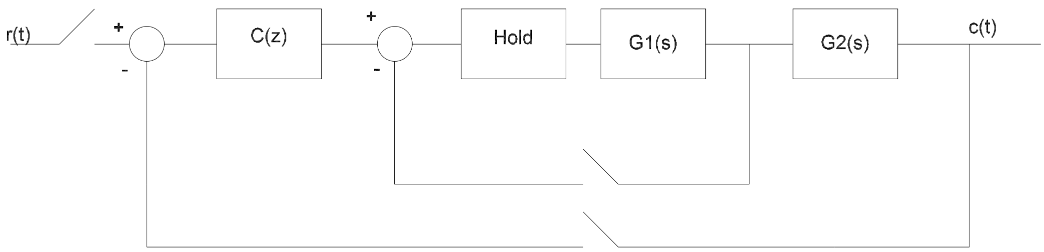
2- Valuta la funzione di trasferimento discreta tra i campioni di $r(t)$ e $c(t)$ per il seguente schema a blocchi, con

$$C(z) = \frac{z}{z-0.3},\ G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

considerando un tempo di campionamento $T = 0.1s$.

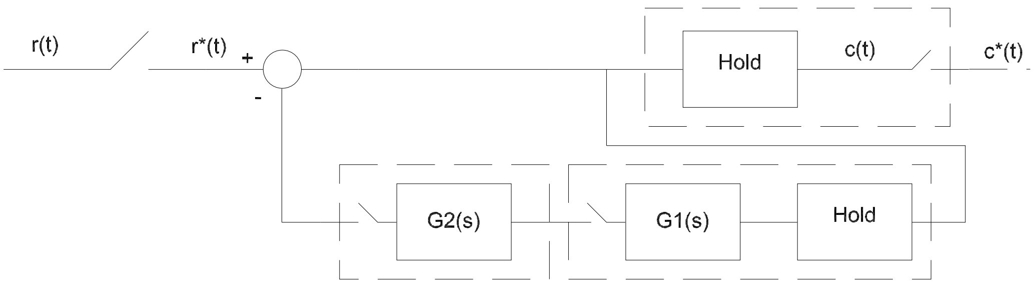


3- Calcola la funzione di trasferimento discreta tra i campioni di $r(t)$ e $c(t)$ per il seguente schema a blocchi.

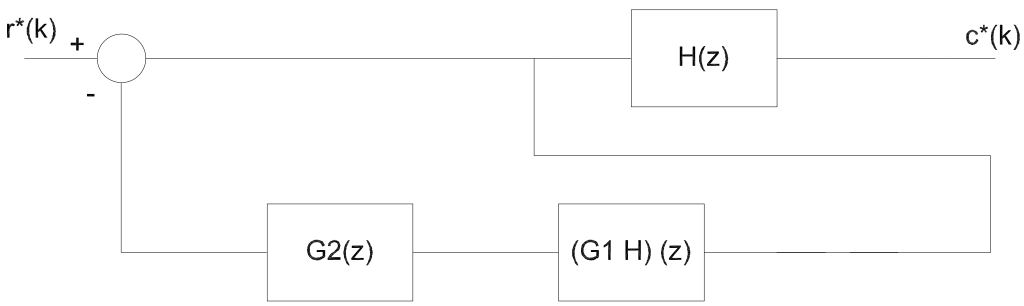


Risposte

1- Visto che nello schema presentato l'uscita non è campionata, aggiungiamo un campionatore fittizio in uscita. Spostiamo quindi il primo campionatore a monte del nodo sommatore e il prelievo di segnale a monte del blocco di hold. Otteniamo il seguente schema.



I blocchi tratteggiati indicano sistemi continui con ingresso campionato e immediatamente seguiti da un campionatore. Questi vengono sostituiti con blocchi discreti, ottenendo lo schema seguente.



Calcoliamo le funzioni di trasferimento dei blocchi discreti così trovati.
Il blocco di hold ha come funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \ ,$$

la funzione di trasferimento discreta associata al blocco di hold è data da

$$\mathcal{Z}[H(s)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s}] = (1 - z^{-1})\frac{z}{z-1} = 1 \ ,$$

questo è giustificato dal fatto che campionando la risposta all'impulso dell'hold, otteniamo il segnale discreto $\delta(k)$, la cui trasformata zeta è appunto 1. Inoltre

$$\mathcal{Z}[H(s)G_1(s)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s+1)}] = (1 - z^{-1})(\mathcal{Z}[\frac{1}{s}] - \mathcal{Z}[\frac{1}{s+1}]) =$$
$$= (1 - z^{-1})[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}] = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} \ ,$$

in cui si è fatto uso della scomposizioni in fratti semplici del termine $\frac{1}{s(s+1)}$. Infine

$$\mathcal{Z}[G_2(z)] = \mathcal{Z}[\frac{s+1}{s+2}] = \mathcal{Z}[1] - \mathcal{Z}[\frac{1}{s+2}] = 1 - \frac{z}{z-e^{-T}} \ .$$

Nel calcolo si sarebbe potuta utilizzare anche la formula

$$\mathcal{Z}[H(s)G_1(s)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s+1)}] = (1 - z^{-1})\sum \text{Res}\ \{\frac{1}{s(s+1)}\frac{z}{z-e^{sT}}\} =$$
$$= (1 - z^{-1})\left[(\frac{1}{s+1}\frac{z}{z-e^{sT}})|_{s=0} + (\frac{1}{s}\frac{z}{z-e^{sT}})|_{s=-1}\right] =$$
$$= (1 - z^{-1})(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}) = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} \ .$$

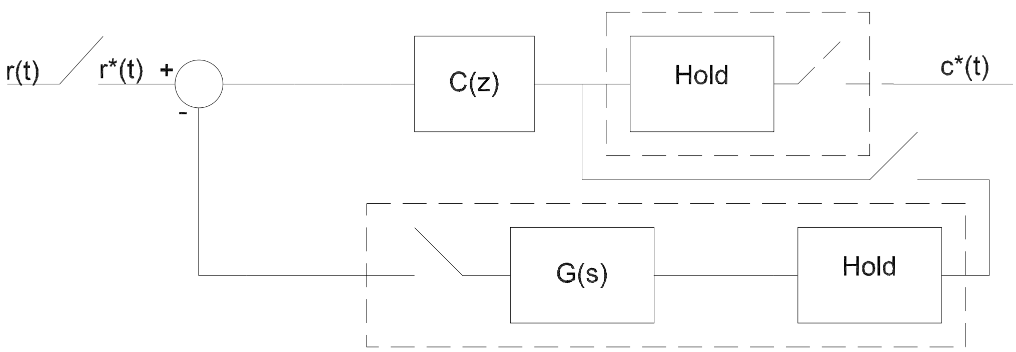
La funzione di trasferimento complessiva tra i campioni dell'ingresso $r^*(k)$ e dell'uscita $c^*(k)$ è data da

$$T(z) = \frac{1}{\mathcal{Z}[H(s)G_1(s)]\mathcal{Z}[G_2(z)]} = \frac{1}{1 + \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}(1 - \frac{z}{z-e^{-2T}})} = \frac{z^2 - z(e^{-2T} + e^{-T}) + e^{-3T}}{z^2 - z(e^{-T} + e^{-2T}) + 2e^{-3T} - e^{-2T}} ,$$

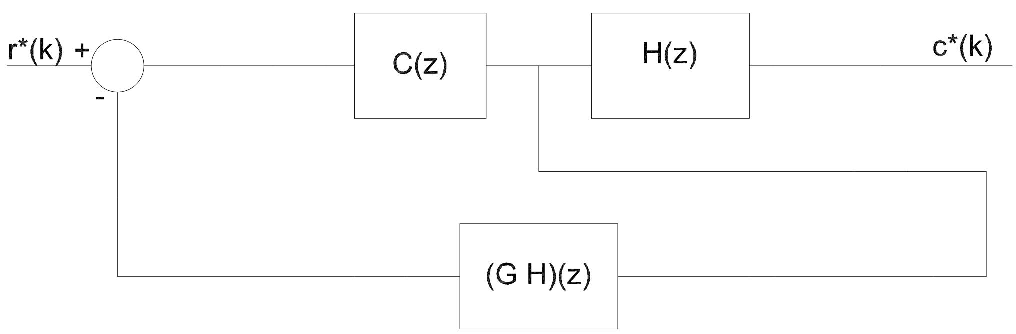
prendendo un tempo di campionamento pari a $T = 0.5s$, otteniamo

$$T(z) = \frac{z^2 - 0.9744z + 0.2231}{z^2 - 0.9477z + 0.07843} .$$

2- Inseriamo anche qui il campionatore fittizio in uscita, portiamo a monte del sommatore il primo campionatore e portiamo il prelevamento di segnale a monte del blocco di hold. Otteniamo il seguente schema:



I blocchi tratteggiati indicano sistemi continui con ingresso campionato e immediatamente seguiti da un campionatore. Questi vengono sostituiti con blocchi discreti, ottenendo lo schema seguente.



Come nell'esempio precedente, la funzione di trasferimento discreta associata al solo blocco di hold è data da

$$\mathcal{Z}[H(s)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s}] = (1 - z^{-1})\frac{z}{z-1} = 1 \ ,$$

invece

$$\mathcal{Z}[H(s)G(z)] = \mathcal{Z}[H(S)\frac{1}{s(s+1)}] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2(s+1)}]$$

scomponiamo il termine $f(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$ in fratti semplici, otteniamo

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$$

con

$$C = \mathrm{Res}(f(s), -1) = f(s)(s+1)|_{s=-1} = 1, \ B = f(s)(s^2)|_{s=0} = \frac{1}{s+1}|_{s=0} = 1$$

inoltre $A + C = 0$, essendo la somma dei residui di $f(s)$ pari a zero, visto che il grado del numeratore supera di più di 1 il grado del denominatore, quindi $A = -C = -1$, da cui

$$\mathcal{Z}[H(s)\frac{1}{s(s+1)}] = (1 - z^{-1})[-\mathcal{Z}[\frac{1}{s}] + \mathcal{Z}[\frac{1}{s+1}] + \mathcal{Z}[\frac{1}{s^2}]] =$$

$$= (1 - z^{-1})(-\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{Tz}{(z-1)^2}) = \frac{z(T + e^{-T} - 1) + 1 - (1+T)e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})} \ .$$

Alternativamente si può usare la formula di passaggio diretto

$$\mathcal{Z}[H(s)\frac{1}{s(s+1)}] = (1 - z^{-1})\sum \ \mathrm{Res} \ \{\frac{1}{s^2(s+1)}\frac{z}{z-e^{sT}}\} =$$

$$= (1 - z^{-1})\left[\frac{d}{ds}(\frac{1}{s+1}\frac{z}{z-e^{sT}})|_{s=0} + (\frac{1}{s^2}\frac{z}{z-e^{sT}})|_{s=-1}\right] =$$

$$= (1 - z^{-1})\left[\frac{-z((z-e^{sT}) - (s+1)Te^{sT})}{(s+1)^2(z-e^{sT})^2}|_{s=0} + (\frac{1}{s^2}\frac{z}{z-e^{sT}})|_{s=-1}\right] =$$

$$= (1 - z^{-1})[-z\frac{(z-1) - T}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T}}] = \frac{z(T + e^{-T} - 1) + 1 - (1+T)e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})} \ .$$

La funzione di trasferimento complessiva da $t^*(k)$ a $c^*(k)$ è quindi

$$T(z) = \frac{C(z)}{1 + C(z)(HG)(z)} = \frac{\frac{z}{z-0{,}3}}{1 + \frac{z}{z-0.3}\frac{z(T+e-T-1)+1-(1+T)e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})}} =$$

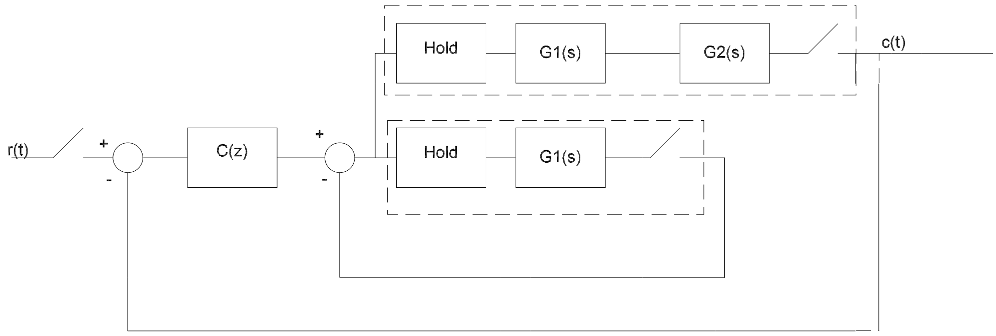
$$= \frac{z(z-1)(z-e^{-T})}{z^3 + z^2(-2.3+T) + z((0.3-T)e^{-T} + 1.3) - 0.3e^{-T}} \ ,$$

sostituendo $T = 0.1s$, otteniamo

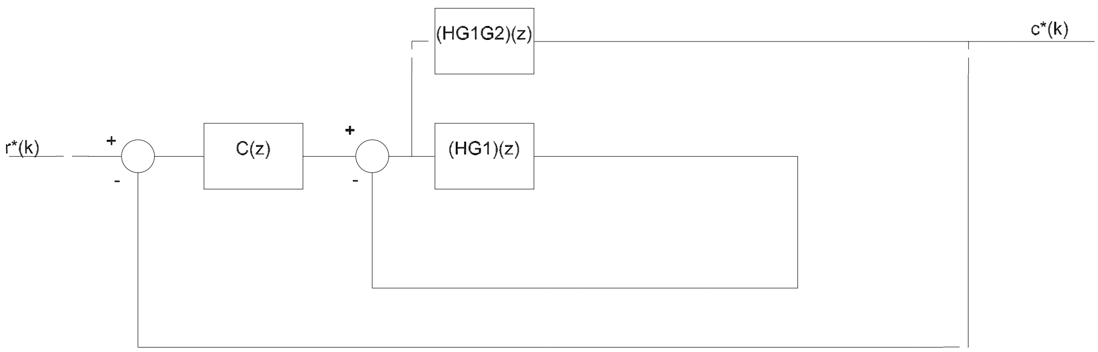
$$T(z) = \frac{z^3 - 1.904z^2 + 0.9048z}{z^3 - 2.2z^2 + 1.481z - 0.2715} \ .$$

3-

Inseriamo anche qui il campionatore fittizio in uscita, portiamo a monte del blocco di hold il prelevamento di segnale dell'anello interno. Al posto del campionatore fittizio e del campionatore sull'anello esterno mettiamo un unico campionatore prima del prelievo di segnale. Otteniamo il seguente schema:



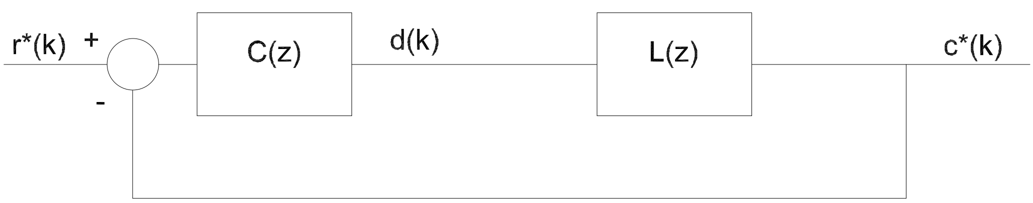
I blocchi tratteggiati indicano sistemi continui con ingresso campionato e immediatamente seguiti da un campionatore. Questi vengono sostituiti con blocchi discreti, ottenendo lo schema seguente.



Chiamando $L(z)$ la funzione di trasferimento tra il segnale interno $d(k)$ e $c^*(k)$, data da

$$L(z) = \frac{(HG_1G_2)(z)}{1 + (HG_1)(z)} ,$$

lo schema può essere ridotto al seguente.



La funzione di trasferimento complessiva tra $r^*(k)$ e $c^*(k)$ è data dunque da

$$T(z) = \frac{C(z)L(z)}{1 + C(z)L(Z)} = \frac{C(z)(HG_1G_2)(z)}{1 + (HG_1)(z) + C(z)(HG_1G_2)(z)} \ .$$