Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Esercitazione n. 1 di Controlli Automatici A
prof. Aurelio Piazzi

- **Operatori differenziali a coefficienti costanti**
- **Modellistica di una coppia di carrelli**
- **Antitrasformazione di fratti complessi coniugati**
- **Antitrasformazione di funzioni razionali con poli multipli**
- **Una relazione fra i residui di una funzione razionale**
- **Esercizi**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2009-2010

Operatori differenziali a coefficienti costanti

$$D \equiv \frac{d}{dt}$$

$$L := c_k D^k + c_{k-1} D^{k-1} + \cdots + c_1 D + c_0; \qquad c_0, c_1, \ldots \in \mathbb{R}\left(\mathbb{C}\right)$$

$$L(f) := c_k D^k f + c_{k-1} D^{k-1} f + \cdots + c_1 Df + c_0 f$$

$$f \in PC^\infty \Rightarrow L(f) \in PC^\infty$$

• L è un operatore lineare:

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 L(f_1) + \alpha_2 L(f_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

dim.: se $L = c_2 D^2 + c_1 D + c_0$

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = c_2 D^2(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) + c_1 D(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) + c_0(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) =$$

$$c_2\left(\alpha_1 D^2 f_1 + \alpha_2 D^2 f_2\right) + c_1\left(\alpha_1 Df_1 + \alpha_2 Df_2\right) + c_0\left(\alpha_1 Df_1 + \alpha_2 Df_2\right) =$$

$$\alpha_1\left[c_2 D^2 f_1 + c_1 Df_1 + c_0 f_1\right] + \alpha_2\left[c_2 D^2 f_2 + c_1 Df_2 + c_0 f_2\right] = \alpha_1 L(f_1) + \alpha_2 L(f_2) \quad \square$$

Insieme degli operatori differenziali:

$$\mathcal{S}_D := \Big\{ L : PC^\infty \to PC^\infty \,\Big|$$

$$L = c_k D^k + c_{k-1} D^{k-1} + \cdots + c_1 D + c_0;\ k \in \mathbb{N};\ c_0, c_1, \ldots \in \mathbb{R} \Big\}$$

Se $A, B \in \mathcal{S}_D$ si definiscono in modo naturale $A + B$ e αA:

$$f \in PC^\infty, \quad (A+B)(f) := A(f) + B(f);\ \ (\alpha A)(f) := \alpha \cdot A(f)$$

$$\Rightarrow\ A + B \in \mathcal{S}_D \quad \text{e} \quad \alpha \cdot A \in \mathcal{S}_D \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

esempio:

$$A = 4D^2 + 1, \qquad B = 6D^3 + 2D^2 + 7D$$

$$A + B = 6D^3 + 6D^2 + 7D + 1$$

$$\alpha A = 4\alpha D^2 + \alpha$$

$\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è uno spazio vettoriale.

Sia $A, B \in \mathcal{S}_D$, la composizione degli operatori $A\left(B\right)$, definita come

$\left(A(B)\right)(f) := A(B(f))$ è ancora un operatore di $\mathcal{S}_D$.

esempio: $A = 4D^2 + 1, \quad B = 6D^3 + 2D^2 + 7D$

$$A\left(B(f)\right) = \left(4D^2 + 1\right)\left(6D^3 f + 2D^2 f + 7Df\right) =$$

$$= 4D^2\left(6D^3 f + 2D^2 f + 7Df\right) + 6D^3 f + 2D^2 f + 7Df =$$

$$= 24D^5 f + 8D^4 f + 28D^3 f + 6D^3 f + 2D^2 f + 7Df =$$

$$= \left(24D^5 + 8D^4 + 34D^3 + 2D^2 + 7D\right)(f)$$

In pratica, per determinare la composizione si fa il prodotto AB considerando D come fosse una costante o una variabile numerica:

$$AB = \left(4D^2 + 1\right)\left(6D^3 + 2D^2 + 7D\right) = 24D^5 + 8D^4 + 34D^3 + 2D^2 + 7D$$

La composizione $A\left(B\right)$ è quindi descritta come prodotto AB.

Proprietà commutativa degli operatori differenziali

$$AB = BA \quad \forall A, B \in \mathcal{S}_D$$

Ad $L = c_k D^k + c_{k-1} D^{k-1} + \ldots + c_0 \in \mathcal{S}_D$ si associa biunivocamente il polinomio $p_L(s) := c_k s^k + c_{k-1} s^{k-1} + \ldots + c_0$ $\left(\text{si noti } p_L(D) \equiv L\right)$.

Teorema :

Dato $L \in \mathcal{S}_D$ se esistono polinomi $a(s), b(s)$ tali che $p_L(s) = a(s)b(s)$ allora $L = a(D)b(D)$.

Esempio : $L = D^2 + 4D + 3, \quad p_L(s) = s^2 + 4s + 3$

$s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3) \;\Rightarrow\; L = (D+1)(D+3)$

Applicazione : soluzioni dell'equazione differenziale omogenea

$$D^2 y + 4Dy + 3y = 0$$

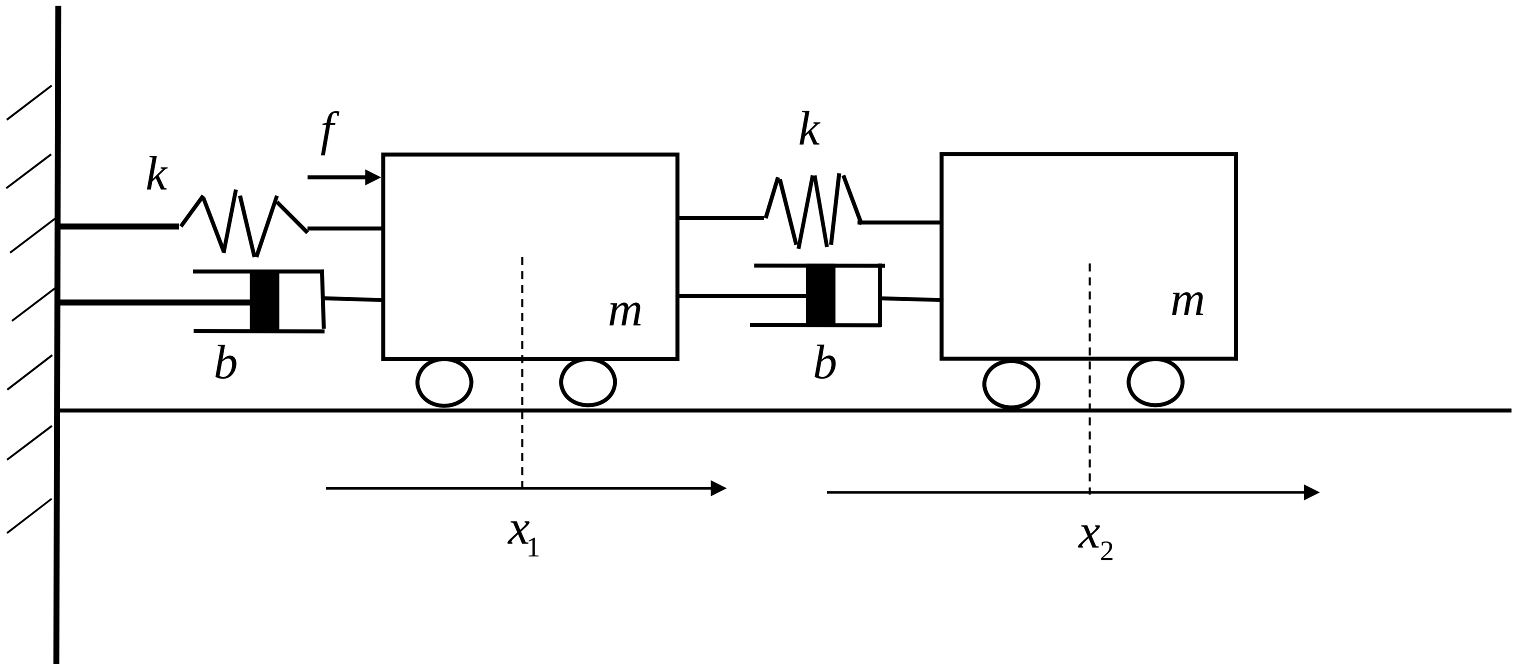
$(D^2 + 4D + 3)y = 0, \quad (D+1)(D+3)y = 0, \quad (D+3)(D+1)y = 0$

$(D+1)\left(e^{-t}\right) \equiv 0, \quad (D+3)\left(e^{-3t}\right) \equiv 0$

$\Rightarrow y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Modellistica di una coppia di carrelli

Due carrelli di massa *m* siano collegati come nella figura sotto. Determinare l'equazione differenziale del sistema orientato da f (forza applicata al carrello di sinistra) ad x_2 (posizione del carrello di destra). In condizione di riposo delle molle sia $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.



Antitrasformazione di fratti complessi coniugati

Se p è un polo complesso (di molteplicità 1) della funzione razionale $F(s)$ con coefficienti reali anche il suo coniugato $\overline{p}$ è polo (di molteplicità 1) di $F(s)$.

I fratti semplici corrispondenti sono

$$\frac{k}{s-p}+\frac{\overline{k}}{s-\overline{p}}$$

I residui di $F(s)$ in p e $\overline{p}$ sono numeri complessi coniugati fra loro, k e $\overline{k}$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s-p}+\frac{\overline{k}}{s-\overline{p}}\right]=ke^{pt}+\overline{k}e^{\overline{p}t}$$

Questa è apparentemente una funzione complessa del tempo.

In realtà è un segnale reale...

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s-p}+\frac{\overline{k}}{s-\overline{p}}\right]=2\left|k\right|e^{\mathrm{Re}\,p\cdot t}\cos\left(\mathrm{Im}\,p\cdot t+\arg k\right)$$

Dim.:

$$p := \alpha + j\beta, \quad k = \left|k\right|e^{j\arg k}$$

$$ke^{pt}+\overline{k}e^{\overline{p}t} = \left|k\right|e^{j\arg k}e^{(\alpha+j\beta)t}+\left|k\right|e^{-j\arg k}e^{(\alpha-j\beta)t} =$$

$$= \left|k\right|e^{\alpha t}\left(e^{j(\beta t+\arg k)}+e^{-j(\beta t+\arg k)}\right) =$$

$$= \left|k\right|e^{\alpha t}\left(\cos\left(\beta t+\arg k\right)+j\sin\left(\beta t+\arg k\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\left(\beta t+\arg k\right)-j\sin\left(\beta t+\arg k\right)\right) =$$

$$= 2\left|k\right|e^{\alpha t}\cos\left(\beta t+\arg k\right) =$$

$$= 2\left|k\right|e^{\mathrm{Re}\,p\cdot t}\cos\left(\mathrm{Im}\,p\cdot t+\arg k\right) \qquad \square$$

Esempio

$$F(s)=\frac{s+2}{s^2+2s+2}=\frac{s+2}{(s+1-j)(s+1+j)}$$

$$F(s)=\frac{k}{s+1-j}+\frac{\overline{k}}{s+1+j}=\frac{k}{s-(-1+j)}+\frac{\overline{k}}{s-(-1-j)}$$

Calcolo del residuo k :

$$k=(s+1-j)\left.\frac{s+2}{(s+1-j)(s+1+j)}\right|_{s=-1+j}=\frac{-1+j+2}{-1+j+1+j}=\frac{1+j}{2j}=\frac{1-j}{2}$$

$$\left|k\right|=\frac{\sqrt{1+1}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \arg k=-\frac{\pi}{4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+2s+2}\right]=2\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

Antitrasformazione di funzioni razionali con poli multipli

Funzione razionale strettamente propria $\left(\deg b(s) < n := \deg a(s)\right)$:

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$$F(s) = \frac{b(s)}{(s-p_1)^{r_1}(s-p_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(s-p_h)^{r_h}}$$

$$p_i \neq p_j \quad \text{se } i \neq j;$$

$$\sum_{i=1}^{h} r_i = n$$

$$F(s) = \frac{b(s)}{(s-p_1)^{r_1}(s-p_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(s-p_h)^{r_h}}$$

Sviluppo in fratti semplici di $F(s)$:

$$\exists! \;\; k_{i,j} \in \mathbb{C}, \quad i = 1,\cdots,h; \; j = 1,\cdots,r_i$$

$$F(s) = \sum_{i=1}^{h} \left\{ \frac{k_{i,1}}{(s-p_i)^{r_i}} + \frac{k_{i,2}}{(s-p_i)^{r_i-1}} + \cdots + \frac{k_{i,r_i}}{s-p_i} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{k_{i,j}}{(s-p_i)^{r_i+1-j}}$$

$$k_{i,j} = \frac{1}{(j-1)!} D^{j-1} \left[(s-p_i)^{r_i} F(s) \right] \Big|_{s=p_i}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^n}\right]=\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{k_{i,j}}{(s-p_i)^{r_i+1-j}}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{r_i}k_{i,j}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-p_i)^{r_i+1-j}}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{r_i}k_{i,j}\cdot\frac{1}{(r_i-j)!}t^{r_i-j}e^{p_i t}$$

$$=\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{k_{i,j}}{(r_i-j)!}t^{r_i-j}e^{p_i t}$$

Una relazione fra i residui di una funzione razionale

Funzione razionale $F(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$ strettamente propria,

$a(s)$ è monico e $b_m \neq 0$:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$$\rho := n - m \geq 1$$

Proprietà :

Se $\rho = 1$ allora $\sum_i R_i = b_m$

Se $\rho > 1$ allora $\sum_i R_i = 0$

Esercizi

Determinare l'antitrasformata di Laplace delle funzioni razionali:

$$F_1(s) = \frac{4s+1}{(s+1)(s+5)}$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$F_3(s) = \frac{64}{(s+2)(s^2+4)}$$

Determinare le trasformate $\mathcal{L}\left[\sin\left(\omega t\right)\right]$ e $\mathcal{L}\left[\cos\left(\omega t\right)\right]$