

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle
Telecomunicazioni

**Lezione n. 10 di Controlli Automatici A
prof. Aurelio Piazzi**

**I diagrammi di Nyquist e i sistemi a
fase minima**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2009-2010

- I diagrammi di Nyquist della funzione di risposta armonica
- I sistemi a fase minima
- Le approssimanti di Padé del ritardo finito

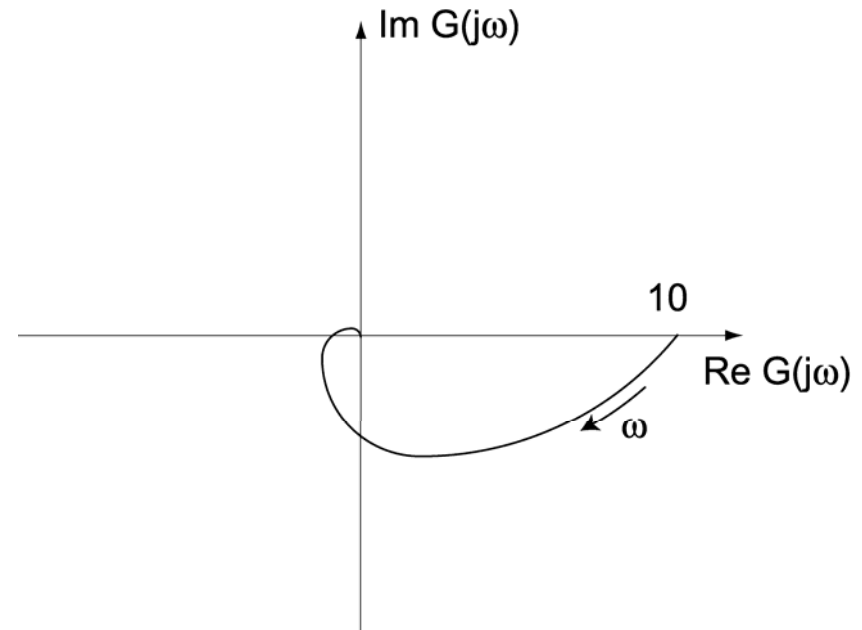
I diagrammi polari o di Nyquist

Def.: Diagramma polare o di N. della r.a. $G(j\omega)$ o della f.d.t. $G(s)$

È la curva tracciata sul piano complesso dal vettore $G(j\omega)$ per ω che varia da 0 a $+\infty$.

Esempio:

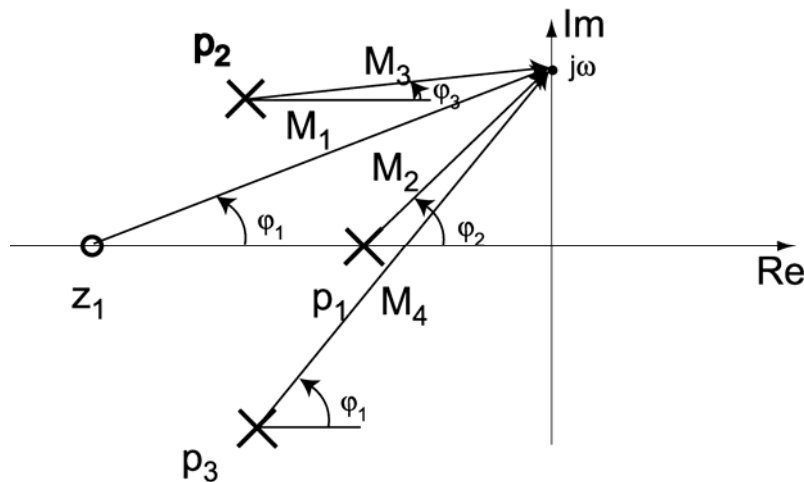
$$G(j\omega) = \frac{10}{\left(1 + \frac{1}{5}j\omega\right)\left(1 + \frac{1}{10}j\omega\right)\left(1 + \frac{1}{100}j\omega\right)}$$



- I diagrammi polari sono importanti nello studio della stabilità dei sistemi retroazionati. Per questo fine, è sufficiente un tracciamento qualitativo del d.p. con individuazione di punti notevoli.

- Il tracciamento del d.p. può essere coadiuvato dal seguente procedimento grafico. Per esempio, si consideri una f.d.t. descritta con la forma poli-zeri:

$$G(s) = K_1 \frac{(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} ; \quad G(j\omega) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)}$$



$$|G(j\omega)| = |K_1| \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4}$$

$$\arg G(j\omega) = \begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 & \text{se } K_1 > 0 \\ \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 - \pi & \text{se } K_1 < 0 \end{cases}$$

- **Proprietà (comportamento per $\omega \rightarrow +\infty$)**

Il d.p. di un sistema strettamente proprio termina (per $\omega \rightarrow +\infty$) sull'origine tangente ad uno degli assi coordinati.

Dim.: immediata

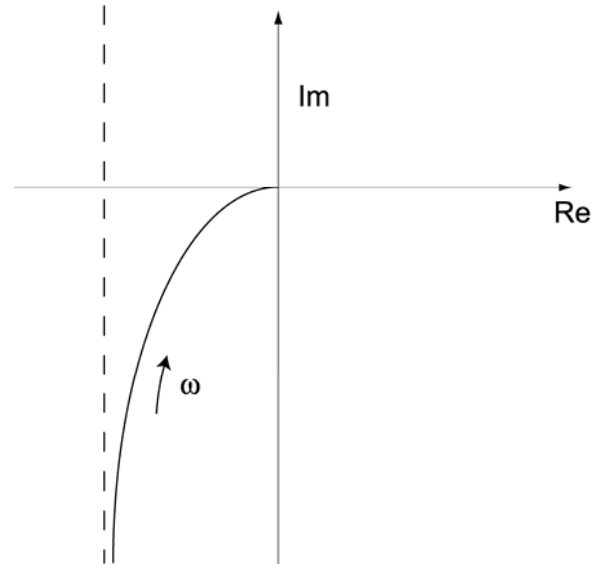
- **Proprietà (Σ di tipo 0: comp. per $\omega \rightarrow 0+$)**

Il d.p. di un sistema di tipo zero parte (da $\omega = 0$) dal punto dell'asse reale $G(j0) = K = K_1(b_0/a_0)$.

Dim.: immediata ...

Esempio di sistema di tipo 1 :

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1+j2\omega)}$$



- **Proprietà (Σ di tipo 1: comp. per $\omega \rightarrow 0+$)**

Il d.p. di un sistema di tipo uno parte (per $\omega \rightarrow 0+$) adiacente ad un asintoto, parallelo all'asse immaginario, la cui ascissa σ_a è esprimibile:

$$\sigma_a = K_1 \frac{a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_1^2} = K \left(\sum_i \tau_i' + \sum_i 2 \frac{\delta_i'}{\omega_{ni}'} - \sum_i \tau_i - \sum_i 2 \frac{\delta_i}{\omega_{ni}} \right)$$

Dim.: verifichiamo la prima relazione

$$G(s) = K_1 \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s}; \quad a_1 \neq 0$$

$$G(j\omega) \rightarrow K_1 \frac{b_0 + b_1j\omega}{a_1j\omega + a_2(j\omega)^2} = K_1 \frac{b_0 + b_1j\omega}{(j\omega)(a_1 + a_2j\omega)} =$$

$$= K_1 \frac{(b_0 + b_1j\omega)(a_1 - a_2j\omega)}{(j\omega)(a_1^2 + a_2^2\omega^2)} \rightarrow K_1 \frac{a_1b_0 + a_2b_1\omega^2 + j(a_1b_1 - a_2b_0)\omega}{(j\omega)(a_1^2)}$$

$$\rightarrow K_1 \left(\frac{a_1b_1 - a_2b_0}{a_1^2} + \frac{b_0}{j\omega a_1} \right) = K_1 \left(\frac{a_1b_1 - a_2b_0}{a_1^2} - j \frac{b_0}{\omega a_1} \right) \quad \square$$

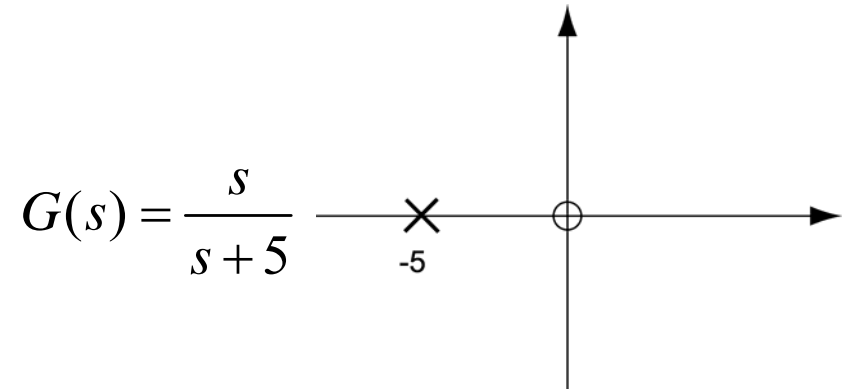
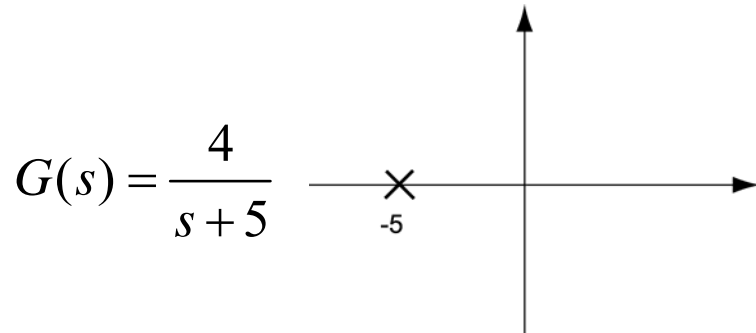
I sistemi a fase minima

Per una significativa classe di sistemi, detti a fase minima, si nota che l'andamento del diagramma delle fasi è strettamente associato a quello delle ampiezze. Se in una certa banda di frequenze l'ampiezza è costante, la fase tende ad essere nulla, mentre una pendenza negativa del diagramma delle ampiezze è associata ad un ritardo di fase, una pendenza positiva ad un anticipo di fase.

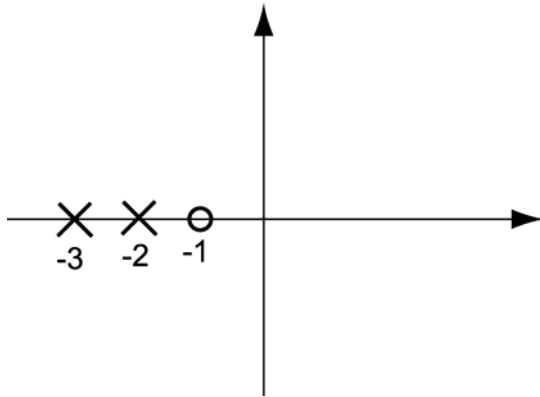
Def. (Σ a fase minima)

Sia dato un sistema Σ con f.d.t. $G(s)$ razionale. Σ è detto a fase minima se non presenta zeri e poli a parte reale positiva.

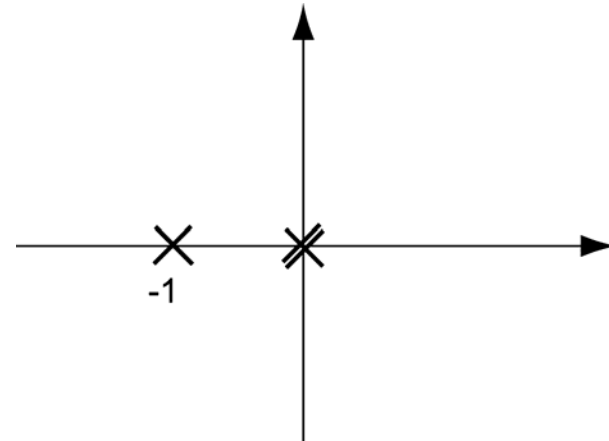
Esempi di sistemi a fase minima:



$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$



$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$



Proprietà (Formula di Bode)

Sia dato un sistema Σ con f.d.t. razionale $G(s)$ a fase minima. Allora definito $\alpha := \ln |G(j\omega)|$, $\beta := \arg G(j\omega)$ il diagramma dei moduli α determina univocamente il diagramma delle fasi mediante la seguente Formula di Bode:

$$\beta_c = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{du} \ln \cotgh \left| \frac{u}{2} \right| du \quad \text{se } s^h G(s) \Big|_{s=0} > 0$$

$$\beta_c = \{ \text{come sopra} \} - \pi \quad \text{se } s^h G(s) \Big|_{s=0} < 0$$

$$\beta_c := \arg G(j\omega_c) \quad u := \ln \frac{\omega}{\omega_c} = \ln \omega - \ln \omega_c \quad h := \{ \text{"tipo" del sistema } \Sigma \}$$

$h = 0$ se Σ non presenta nè poli nè zeri nell'origine

$h > 0$ se Σ presenta un polo di molteplicità h nell'origine

$h < 0$ se Σ presenta uno zero di molteplicità $|h|$ nell'origine

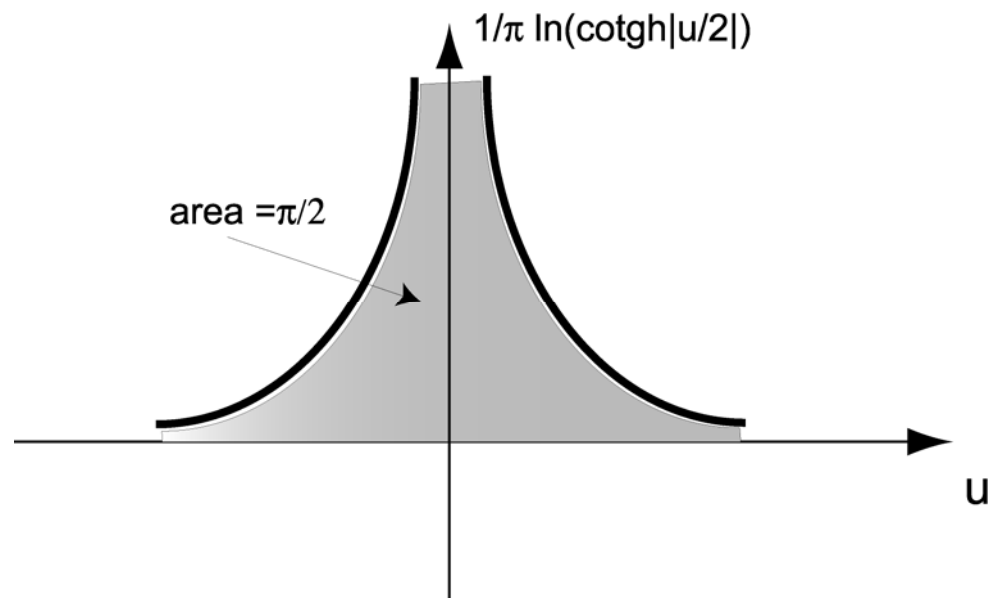
- Interpretazione della formula di Bode:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \operatorname{cotgh} \left| \frac{u}{2} \right| du = \frac{\pi}{2}$$

da cui la regola pratica:

Se $\frac{d\alpha}{du}$ è costante per due decadi di pulsazione centrate su ω_c

allora $\beta_c \approx \left(\frac{d\alpha}{du} \right) \cdot \frac{\pi}{2}$



Def. (estensione)

Un sistema Σ con f.d.t. $G(s)$ trascendente è detto a fase minima se il diagramma delle fasi è deducibile univocamente dal diagramma dei moduli mediante la Formula di Bode.

Conseguenze: il ritardo finito non è sistema a fase minima.

$$G(s) = e^{-t_0 s} \quad \alpha = \ln |e^{-t_0 j\omega}| = 0 \quad \forall \omega ; \quad \beta = -t_0 \omega = -t_0 e^{\ln \omega}$$

Digressione:

Perchè $e^{-jt_0\omega}$ è la risposta armonica del ritardo finito $e^{-t_0 s}$?

Altro esempio: rete elettrica (a fase non minima)

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

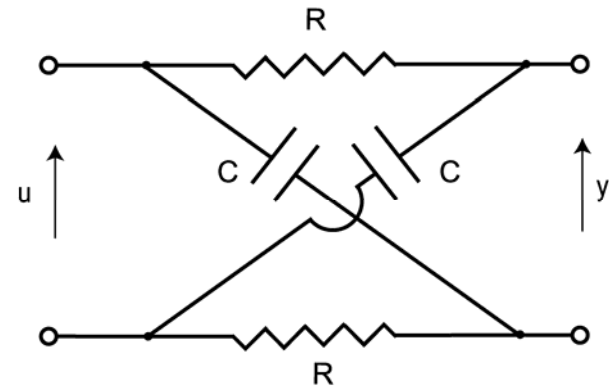
$$G(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts} \quad ; \quad T := RC$$

$$G(j\omega) = \frac{1 - jT\omega}{1 + jT\omega}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} = 1 \quad \forall \omega$$

$$\alpha = \ln |G(j\omega)| = 0$$

$$\beta = \arg G(j\omega) = -2 \arctg T\omega$$



Approssimanti di Padè del ritardo finito

È conveniente sia per problemi di analisi ma anche, e soprattutto, per problemi di sintesi approssimare il ritardo finito con una funzione razionale.

Def.: Approssimante di Padè di $e^{-t_0 s}$ (di ordine q)

$$G_q(s; t_0) := \frac{\sum_{k=0}^q \frac{(2q-k)!q!}{(2q)!k!(q-k)!} (-1)^k t_0^k s^k}{\sum_{k=0}^q \frac{(2q-k)!q!}{(2q)!k!(q-k)!} t_0^k s^k}$$

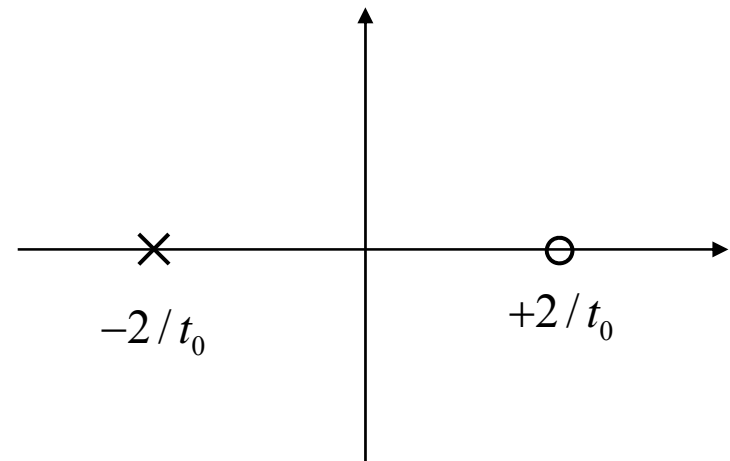
• Proprietà

Lo sviluppo in serie di McLaurin di $G_q(s;t_0)$ coincide con l'analogo sviluppo di $\exp\{-t_0s\}$ fino alla potenza $(2q)$ -esima.

$$e^{-t_0s} = 1 - t_0s + \frac{t_0^2}{2!} s^2 - \frac{t_0^3}{3!} s^3 + \frac{t_0^4}{4!} s^4 - \frac{t_0^5}{5!} s^5 + \dots$$

Approssimante di Padè del 1° ordine:

$$G_1(s;t_0) = \frac{1 - \frac{t_0}{2} s}{1 + \frac{t_0}{2} s}$$



Approssimante di Padè del 2° ordine:

$$G_2(s; t_0) = \frac{1 - \frac{t_0}{2}s + \frac{t_0^2}{12}s^2}{1 + \frac{t_0}{2}s + \frac{t_0^2}{12}s^2}$$

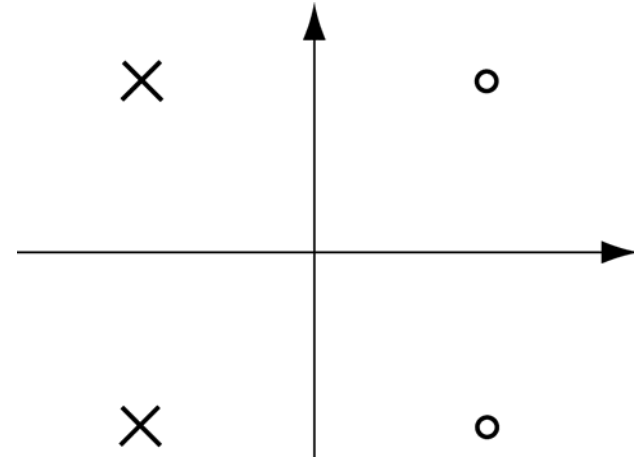


Diagramma polare di $\exp\{-t_0 j\omega\}$: è una circonferenza percorsa infinite volte.

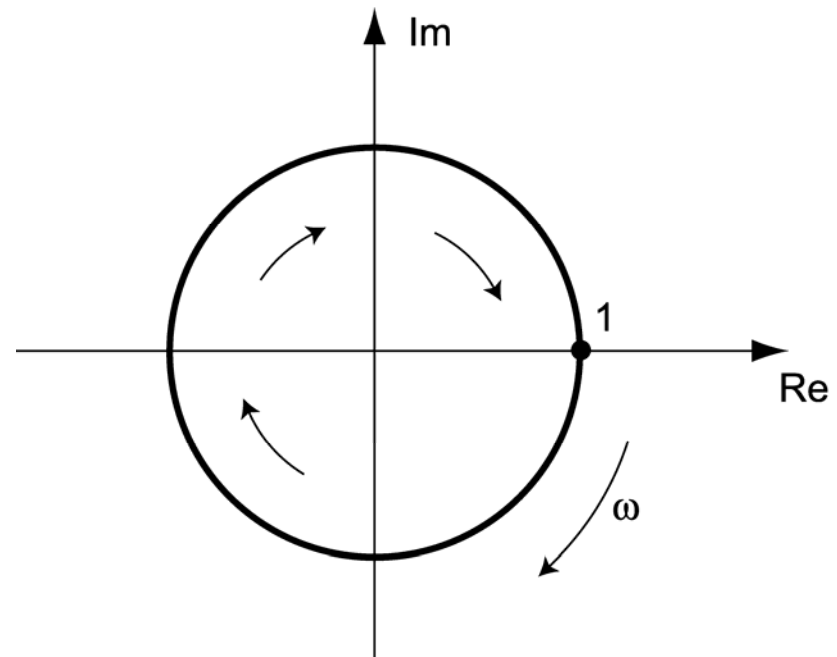


Diagramma polare di $G_1(j\omega;t_0)$: è una semicirconferenza

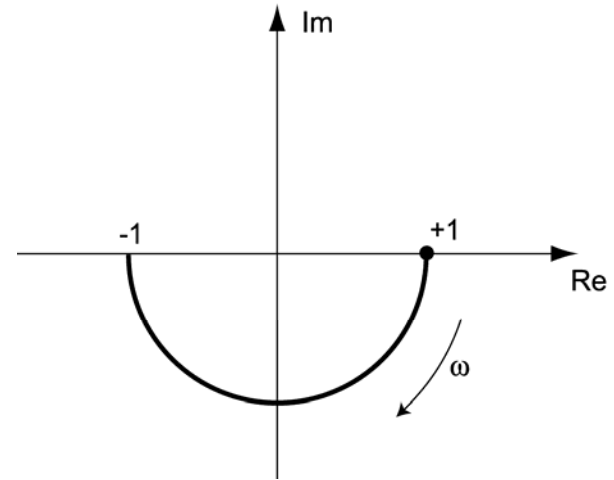


Diagramma polare di $G_2(j\omega;t_0)$: è una circonferenza percorsa una sola volta

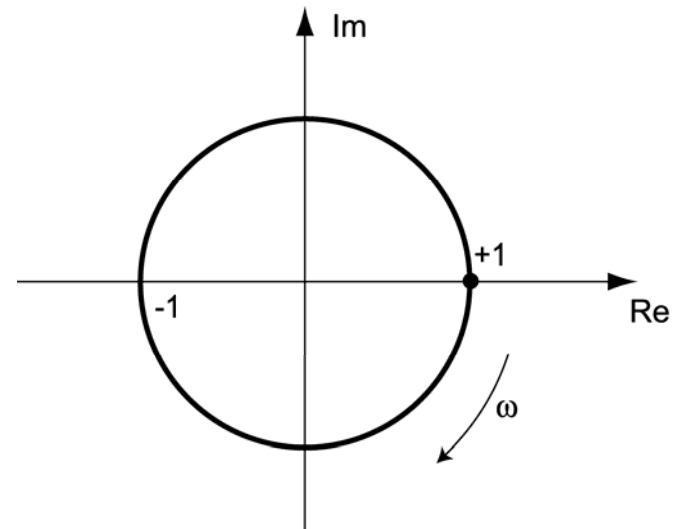


Diagramma polare di $G_3(j\omega;t_0)$: è una circonferenza percorsa una volta e mezzo

...

Punti salienti della lezione:

- Determinazione dell'asintoto verticale nel diagramma polare dei sistemi di tipo uno
- Poli e zeri e formula di Bode
- Diagrammi polari delle approssimanti di Padé del ritardo finito