

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle  
Telecomunicazioni

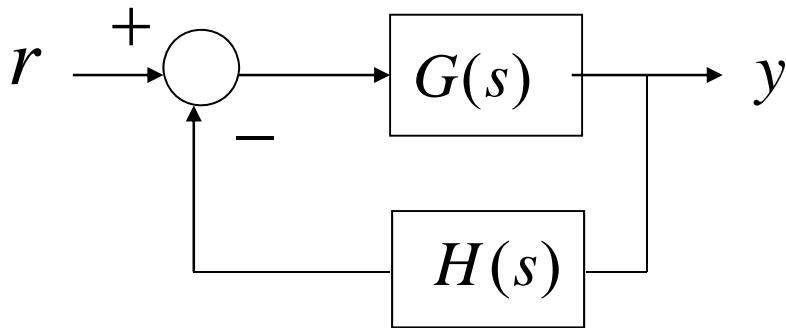
**Lezione n. 12 di Controlli Automatici A  
prof. Aurelio Piazzi**

**Sistemi retroazionati: criterio di  
Nyquist e margini di stabilità**

Università degli Studi di Parma – a.a. 2009-2010

- La buona connessione nei sistemi retroazionati
- Un metodo grafico per lo studio della stabilità nei sistemi retroazionati: il criterio di Nyquist
- Una misura della distanza dall'instabilità: i margini di stabilità

# Sistemi retroazionati: il requisito di buona connessione



$$T_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1 + L(s)}$$

$$L(s) := G(s)H(s) \text{ (g. di anello)}$$

## Def. (buona connessione)

Il sistema retroazionato è **ben connesso** se  $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} 1 + L(s) \neq 0$ .

La buona connessione è una condizione necessaria per la realizzabilità fisica dell'anello di retroazione. E' una condizione che assumiamo sia sempre soddisfatta.

## Esempi di sistemi in retroazione non ben connessi :

$$1. G(s) = 1, H(s) = -1 \Rightarrow T_{ry} = \frac{G}{1+GH} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} !$$

$$\begin{cases} y = e \\ e = r - (-1)y \end{cases} \Rightarrow y = r + y \text{ eq. impossibile con } r \neq 0$$

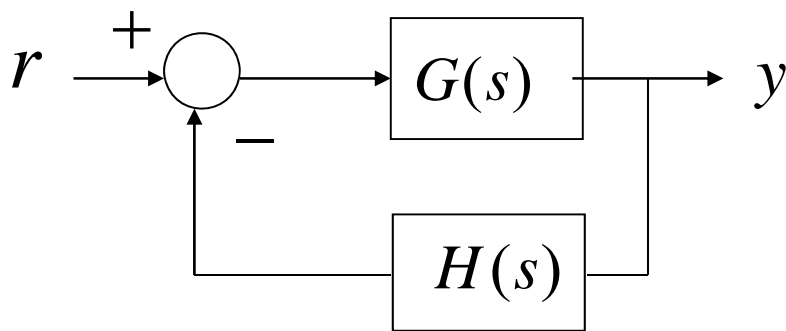
$$2. G(s) = -\frac{s+2}{s+1}, H(s) = \frac{s+2}{s+5} \Rightarrow T_{ry} = \frac{G}{1+GH} = \frac{-\frac{s+2}{s+1}}{1 - \frac{s+2}{s+1} \cdot \frac{s+2}{s+5}}$$

$$T_{ry} = \frac{-\frac{s+2}{\cancel{s+1}}}{\frac{(s+1)(s+5) - (s+2)^2}{\cancel{(s+1)}(s+5)}} = -\frac{(s+2)(s+5)}{\cancel{s^2} + 6s + 5 - (\cancel{s^2} + 4s + 4)}$$

$$= -\frac{(s+2)(s+5)}{2s+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(s+2)(s+5)}{s + \frac{1}{2}} \text{ sistema improprio!}$$

## Il criterio di Nyquist

È un criterio grafico per lo studio della stabilità asintotica dei sistemi retroazionati.



$$T_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1 + L(s)}$$

$$L(s) := G(s)H(s) \quad (\text{g. di anello})$$

- Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente se e solo se l'eq. caratteristica  $1 + L(s) = 0$  ha tutte le radici a parte reale negativa.
- Il criterio di N. richiede il tracciamento del diagramma polare (o di N.) di  $L(j\omega)$ .

## Teorema dell'indice logaritmico (*Principle of the Argument*)

Sia  $\Gamma$  una curva chiusa del piano complesso e  $\mathcal{D}$  la regione ad esso interna ( $\Gamma = \partial\mathcal{D}$ ). Sia  $F(s)$  una funzione analitica su  $\mathcal{D}$  ad eccezione di un numero finito di poli. Inoltre  $F(s)$  non abbia su  $\Gamma$  né poli né zeri. Vale quindi la relazione:

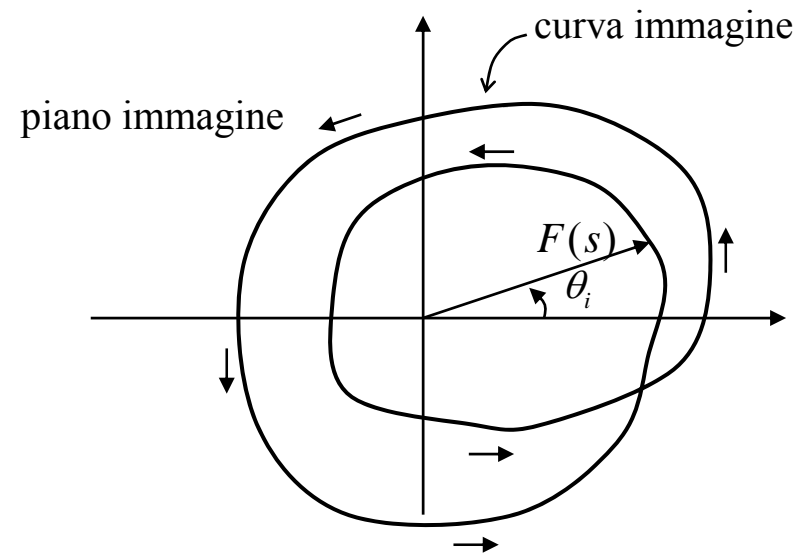
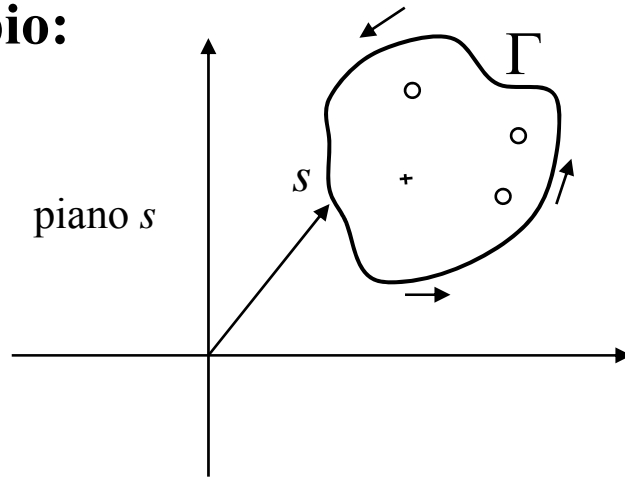
$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg F(s) = n_z - n_p$$

dove  $\Delta \arg F(s)$  denota la variazione dell'argomento di  $F(s)$  al variare di  $s$  lungo  $\Gamma$  per un giro completo in senso antiorario ed  $n_z$  e  $n_p$  sono rispettivamente il numero degli zeri e dei poli di  $F(s)$  su  $\mathcal{D}$  computati con le loro molteplicità.

Nota: Se la curva  $\Gamma$  fosse percorsa in senso orario la relazione sarebbe:

$$-\frac{1}{2\pi} \Delta \arg F(s) = n_z - n_p$$

**Esempio:**



$$\Delta \arg F(s) = \theta_f - \theta_i = (\theta_i + 2 \cdot 2\pi) - \theta_i = 4\pi$$

$$n_z = 3, \quad n_p = 1 \quad (\text{zeri e polo con molteplicità unitaria})$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi = 3 - 1$$

Con la percorrenza oraria di  $\Gamma$  avremmo:

$$\Delta \arg F(s) = \theta_f - \theta_i = (\theta_i - 2 \cdot 2\pi) - \theta_i = -4\pi \Rightarrow -\frac{1}{2\pi} \cdot (-4\pi) = 3 - 1$$

## Corollario (formulazione geometrica del teorema dell'indice log.)

Assunte le ipotesi del teorema dell'indice log. con la **percorrenza di  $\Gamma$  antioraria** vale la relazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{numero di giri, in senso antiorario,} \\ \text{della curva immagine intorno all'origine} \end{array} \right\} = n_z - n_p$$

oppure, assunte le ipotesi del teorema dell'indice log. con la **percorrenza di  $\Gamma$  oraria** vale la relazione:

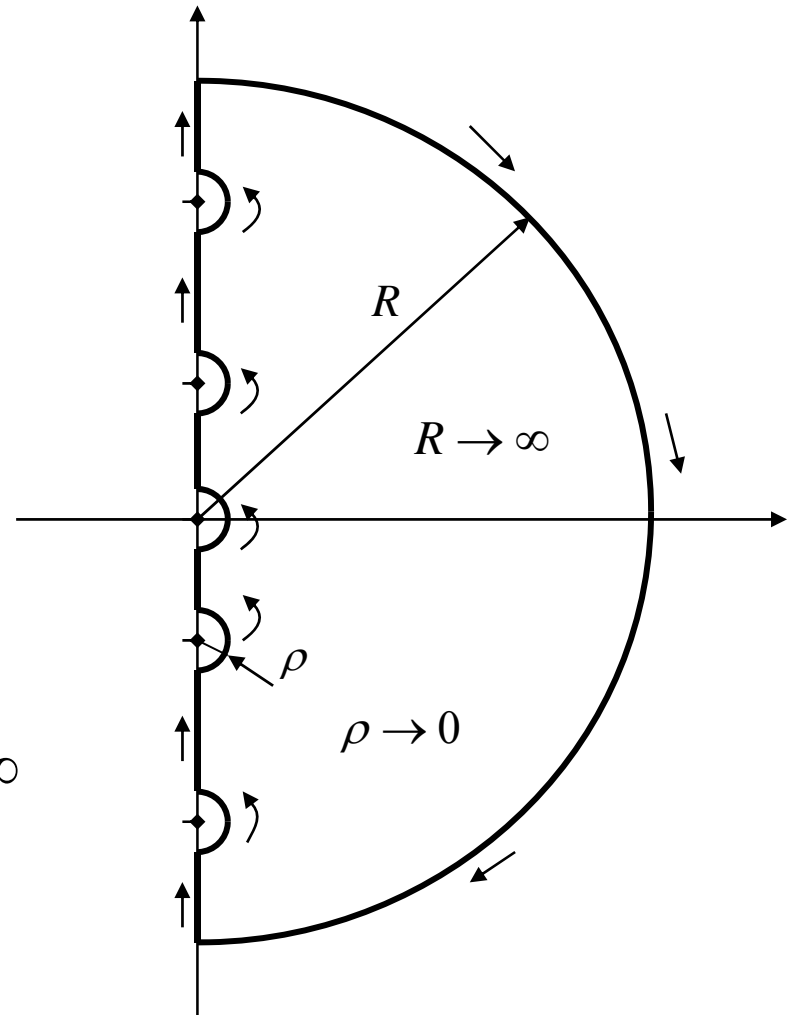
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{numero di giri, in senso orario,} \\ \text{della curva immagine intorno all'origine} \end{array} \right\} = n_z - n_p$$



- Applicazione del teorema dell'indice log. alla stabilità dei sistemi retroazionati:

La curva chiusa di figura percorsa in senso orario è detta **contorno di Nyquist**: è composta da una semicirconferenza all'infinito, semicirconferenze infinitesime aggiranti poli o zeri immaginari di  $L(s)$  e da segmenti dell'asse immaginario.

Si osservi che per  $\rho \rightarrow 0+$  e  $R \rightarrow +\infty$   
 $\Rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}_+$



Applichiamo il teorema dell'indice logaritmico nella sua formulazione geometrica scegliendo la funzione  $1 + L(s)$  e il contorno di Nyquist quale curva del piano complesso:

$n_z :=$  n. degli zeri di  $1 + L(s)$  appartenenti a  $\mathbb{C}_+$

$n_p :=$  n. dei poli di  $1 + L(s)$  (o di  $L(s)$ ) appartenenti a  $\mathbb{C}_+$

$$\psi := \left\{ \begin{array}{l} \text{n. di giri in senso orario della} \\ \text{curva immagine di } 1 + L(s) \text{ sul contorno} \\ \text{di Nyquist intorno all'origine} \end{array} \right\} = n_z - n_p$$

- Def. (**diagramma polare completo**)

Il **diagramma polare completo** è la curva chiusa immagine di  $L(s)$  sul contorno di Nyquist.

Quindi

$$\psi = n_z - n_p$$

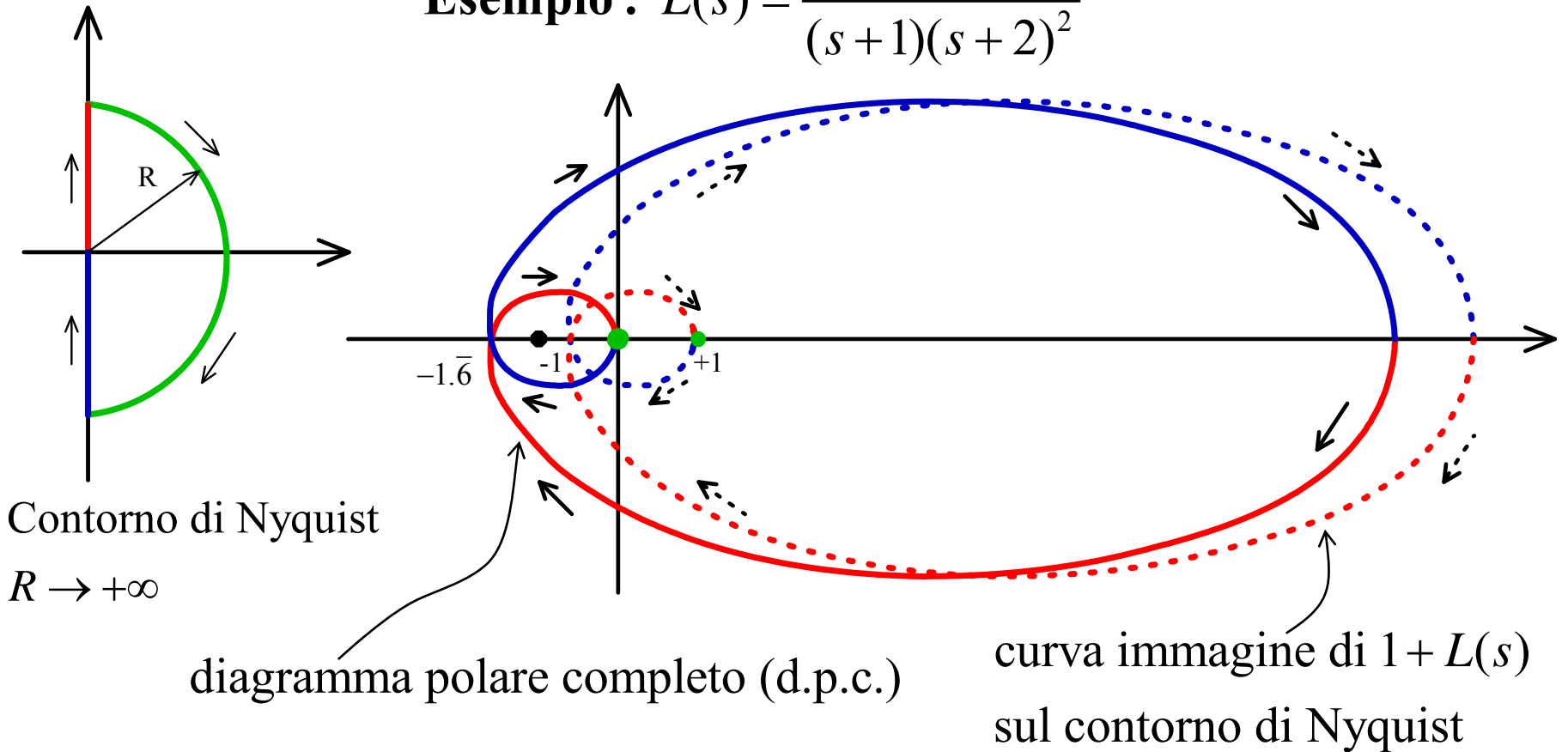
dove

$$\psi = \{ \text{n. di giri in senso orario del d.p.c. intorno al punto } -1 + j0 \}$$

Infatti

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{n. di giri in senso orario della} \\ \text{curva immagine di } 1 + L(s) \text{ sul contorno} \\ \text{di Nyquist intorno all'origine} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{n. di giri in senso orario del} \\ \text{d.p.c. intorno al punto } -1 + j0 \end{array} \right\}$$

**Esempio :**  $L(s) = \frac{60}{(s+1)(s+2)^2}$



$$\psi = 2, n_p = 0$$

$$\psi = n_z - n_p \Rightarrow n_z = 2 \text{ Il sistema retroazionato è instabile!}$$

## Deduzione del Criterio di Nyquist

Il sistema in retroazione è asintoticamente stabile se e solo se

1. Non esistono radici puramente immaginarie di  $1 + L(s) = 0$ .
2.  $n_z = 0$

L'affermazione 1. può essere trasformata in accordo alla seguente catena di equivalenze:

$$\begin{aligned} & \overline{\{ \nexists j\omega \in j\mathbb{R} \ni 1 + L(j\omega) = 0 \}} \Leftrightarrow \overline{\{ \exists j\omega \in j\mathbb{R} \ni 1 + L(j\omega) = 0 \}} \\ & \Leftrightarrow \overline{\{ \exists \omega \in \mathbb{R} \ni L(j\omega) = -1 \}} \\ & \Leftrightarrow \overline{\{ \text{Il diagramma polare di } L(j\omega) \text{ passa per } -1 + j0 \}} \\ & \Leftrightarrow \overline{\{ \text{Il d.p.c. passa per } -1 + j0 \}} \Leftrightarrow \{ \text{Il d.p.c. non passa per } -1 + j0 \} \end{aligned}$$

L'affermazione 2. può essere sostituita:  $\{ n_z = 0 \} \Leftrightarrow \{ -\psi = n_p \}$

È quindi provata la proposizione: Il sistema in retroazione è asintoticamente stabile se e solo se (1) il d.p.c. non tocca  $-1 + j0$  e (2)  $-\psi = n_p$

## Criterio di Nyquist

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi il punto critico  $-1$  ma lo circonda tante volte in senso antiorario quanti sono i poli del guadagno di anello con parte reale positiva.

Nota: Il criterio di Nyquist è valido per una classe di funzioni  $L(s)$  più ampia delle sole funzioni razionali: in particolare è valido per  $L(s) = R(s) e^{-Ts}$  con  $R(s)$  funzione razionale...

Dal criterio generale discende immediatamente il corollario:

### **Corollario (caso particolare del Criterio di Nyquist)**

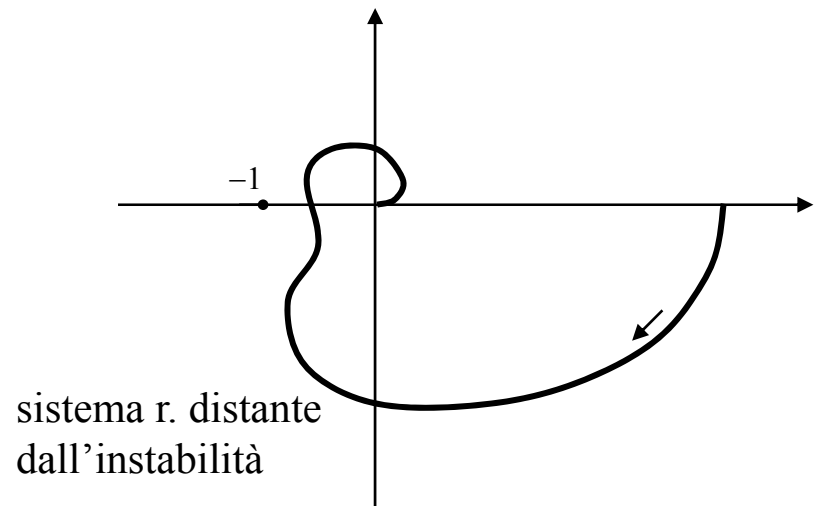
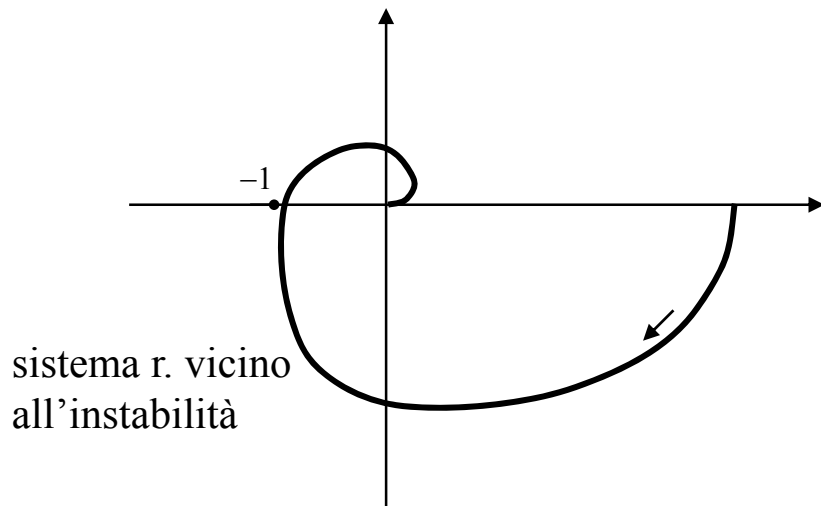
Nell'ipotesi che il guadagno di anello non abbia poli a parte reale positiva, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo non tocchi né circondi il punto critico  $-1$ .

Nota: Il corollario non è da associarsi ai sistemi stabili ad anello aperto...

# Margini di stabilità

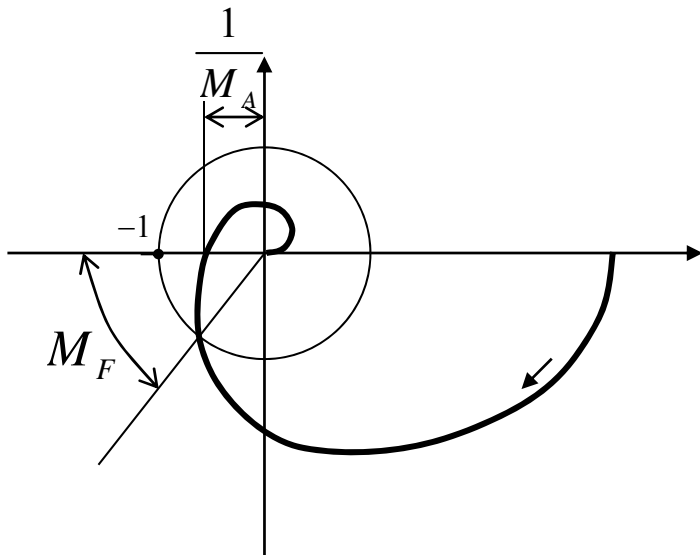
La proprietà di stabilità (asintotica) di un sistema retroazionato è di per sé una proprietà on/off. Tuttavia è opportuno e necessario inserire nelle specifiche tecniche associate ad un sistema retroazionato una misura della distanza dall'instabilità.

Esempio:  $L(s)$  asintoticamente stabile ...





- La distanza dall'instabilità nei sistemi retroazionati è tradizionalmente affidata ai cosiddetti margini di stabilità frequenziali ovvero il  **margine di ampiezza** ( $M_A$ ) e il  **margine di fase** ( $M_F$ ).



$$M_A := \frac{1}{|L(j\omega_p)|} \quad \text{dove } \omega_p \ni \arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$\omega_p \equiv$  pulsazione di fase pi greco

$$M_F := \pi - |\varphi_c|$$

dove  $\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$  e  $\omega_c \ni |L(j\omega_c)| = 1$

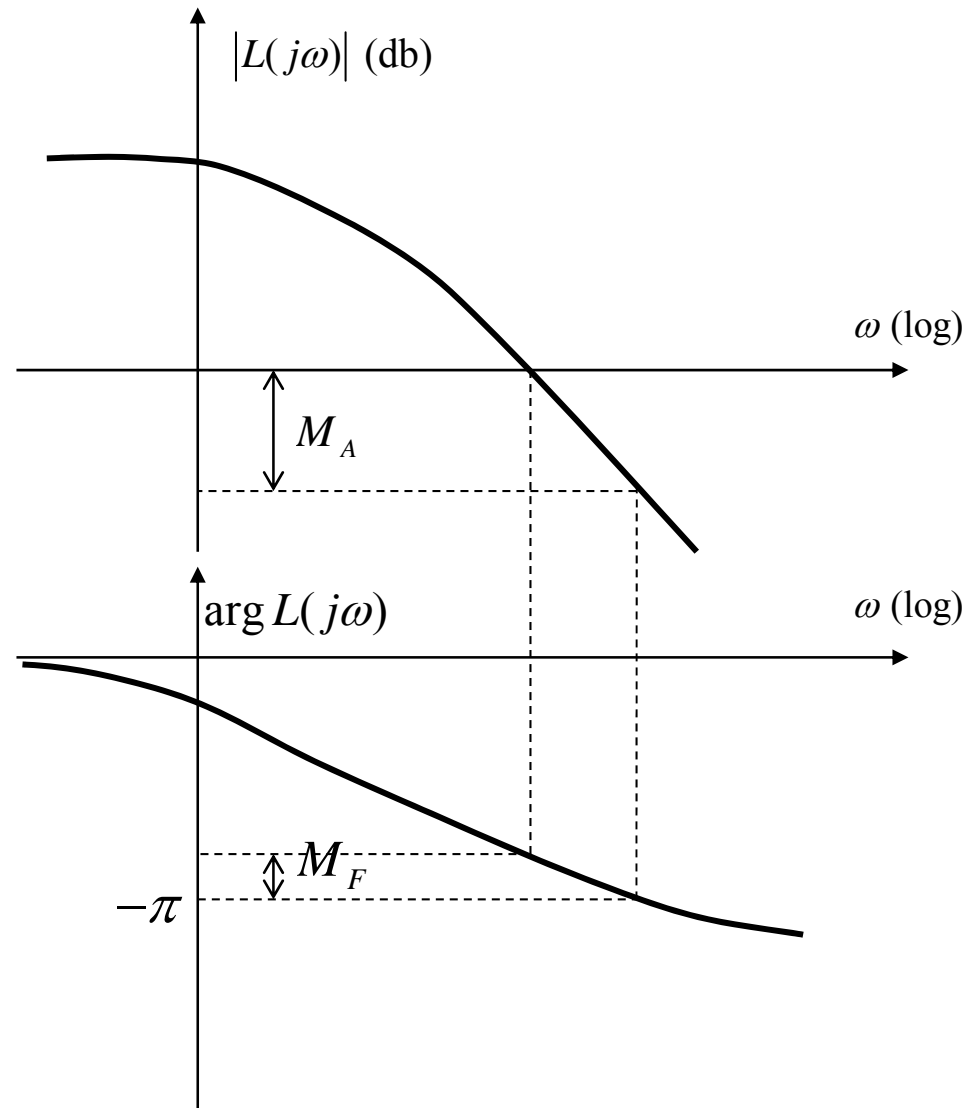
$\varphi_c \in (-\pi, 0)$ ,  $\omega_c \equiv$  pulsazione critica

$M_A \in (1, +\infty)$  a volte espresso in decibel:  $M_A \equiv 20 \log M_A$  (db)

$M_F > 0$  espresso usualmente in gradi sessagesimali

## Margini di ampiezza e di fase misurati sui diagrammi di Bode

$$20 \log M_A = -20 \log |L(j\omega_p)|$$



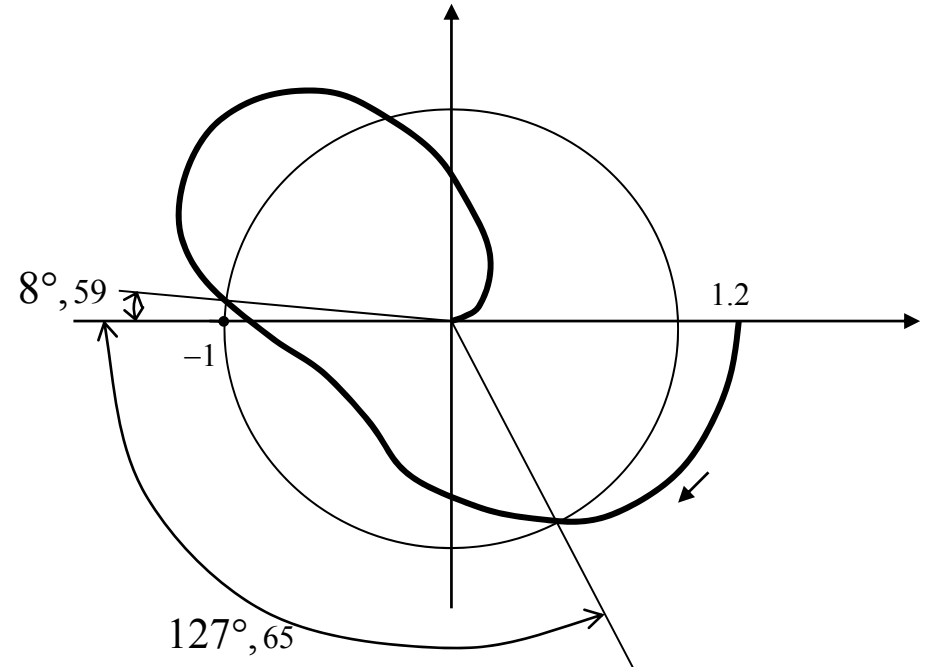
- Problemi con le definizioni tradizionali dei margini di stabilità

Esempio

$$L(s) = \frac{1.2}{(1+s)^2 \left( 1 + 2 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{s}{3} + \frac{s^2}{3^2} \right)} =$$

$$= \frac{1.2}{(1+s)^2 \left( 1 + \frac{s}{30} + \frac{s^2}{9} \right)}$$

$$L(j\omega) = \frac{1.2}{(1+j\omega)^2 \left( 1 - \frac{\omega^2}{9} + \frac{j\omega}{30} \right)}$$



$$M_A = 1.11$$

$$M_F = 8^\circ,59' \quad \text{e non } 127^\circ,65'$$

## Definizioni generalizzate dei margini di stabilità

Il sistema retroazionato sia stabile asintoticamente:

$$M_A := \sup \left\{ M > 1 : |1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[ \frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$$M_F := \sup \left\{ \phi > 0 : |1 + e^{-j\phi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \phi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

I margini di stabilità sono “norme” che misurano la distanza del punto critico  $-1+j0$  dal diagramma polare di  $L(j\omega)$ .

## Proprietà

Sia  $M > 1$ . Vale la disequazione  $|1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[ \frac{1}{M}, M \right]$  e  $\forall \omega \geq 0$  se e solo se il segmento dell'asse reale compreso fra  $-M$  e  $-1/M$  non interseca il diagramma polare di  $L(j\omega)$ .

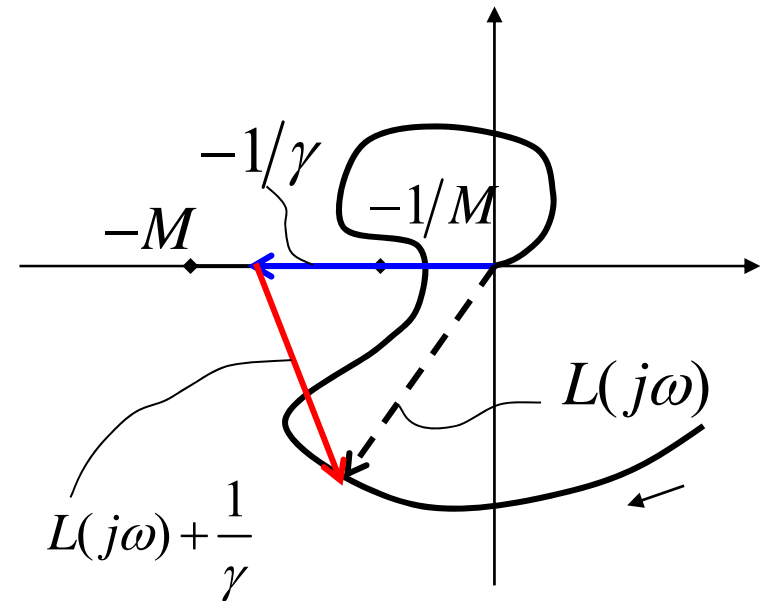
**Dim.:**

$$\left\{ |1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[ \frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{ \left| \frac{1}{\gamma} + L(j\omega) \right| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[ \frac{1}{M}, M \right] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

Si noti che  $\frac{1}{M} \leq \gamma \leq M \Leftrightarrow -M \leq -\frac{1}{\gamma} \leq -\frac{1}{M}$



## Proprietà

Sia  $\phi > 0$ . Vale la disequazione  $|1 + e^{-j\phi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \phi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0$  se e solo se l'arco di circonferenza di equazione  $e^{j(\pi+\phi)}$ ,  $\phi \in [-\phi, +\phi]$  non interseca il diagramma polare di  $L(j\omega)$ .

**Dim. :**

$$\left\{ |1 + e^{-j\phi} L(j\omega)| > 0 \quad \forall \phi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$\Leftrightarrow$

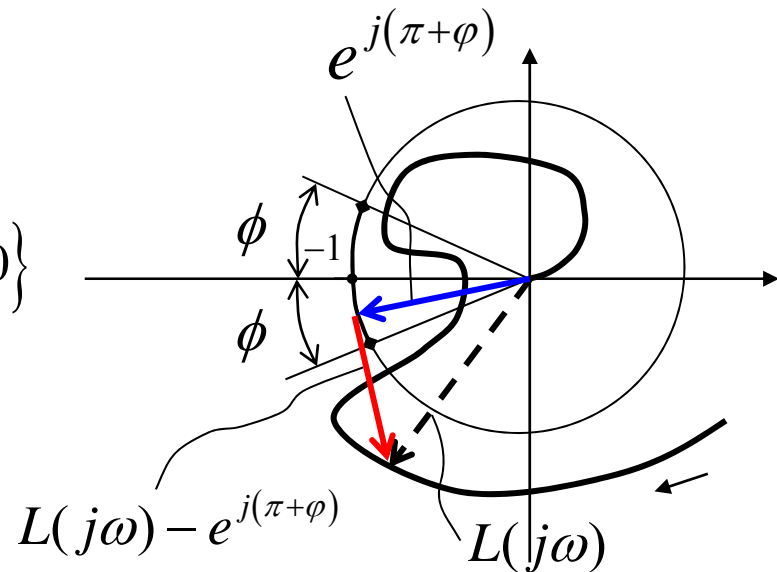
$$\left\{ |(1 + e^{-j\phi} L(j\omega)) e^{j\phi}| > 0 \quad \forall \phi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$\Leftrightarrow$

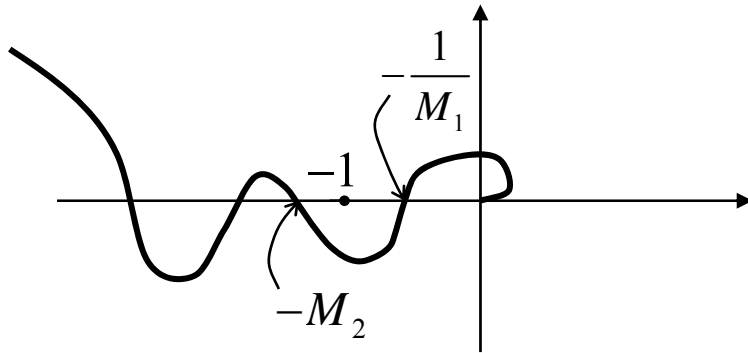
$$\left\{ |L(j\omega) + e^{j\phi}| > 0 \quad \forall \phi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$

$\Leftrightarrow$

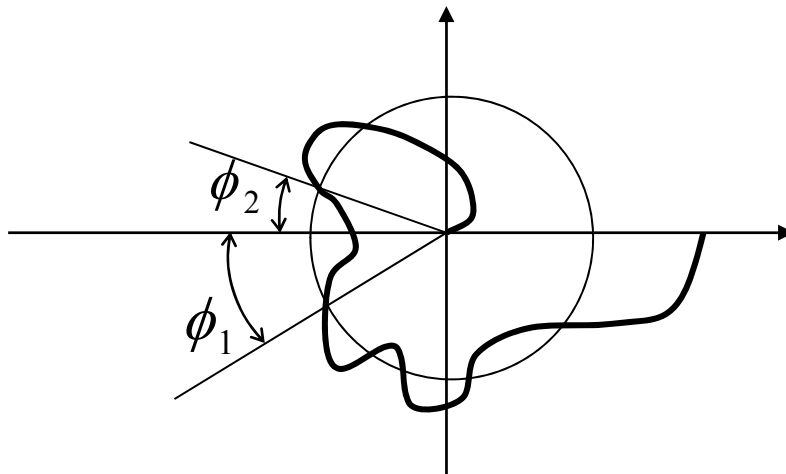
$$\left\{ |L(j\omega) - e^{j(\pi+\phi)}| > 0 \quad \forall \phi \in [-\phi, +\phi] \text{ e } \forall \omega \geq 0 \right\}$$



## Procedura generale per il calcolo dei margini di stabilità



$$M_A = \min \{M_1, M_2\}$$



$$M_F = \min \{\phi_1, \phi_2\}$$

## Punti salienti della lezione:

- Il teorema dell'indice logaritmico
- Il contorno di Nyquist ed il diagramma polare completo
- Margine di ampiezza e margine di fase