Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Lezione n. 13 di Controlli Automatici A
prof. Aurelio Piazzi

Sistemi retroazionati:
il luogo delle radici

Università degli Studi di Parma – a.a. 2009-2010

- Il luogo delle radici
- Proprietà del luogo delle radici
- Esempi di luoghi delle radici
- Il contorno delle radici
- Complementi

Il luogo delle radici

Il progetto di un sistema in retroazione richiede la conoscenza dei poli retroazionati e delle variazioni di questi al variare dei più importanti parametri di progetto: fra questi c'è la **costante di trasferimento $\mathbf{K_1}$** del guadagno di anello L(s).

$$L(s) = K_1 \frac{(s - z_1)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)\cdots(s - p_n)}$$

Equazione caratteristica del sistema in retroazione:

$$1 + K_1 G_1(s) = 0$$

$$G_1(s) := \frac{z(s)}{p(s)} := \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

Definizione:

Luogo delle radici (diretto) è il luogo geometrico descritto dalle radici dell'eq. $1 + K_1G_1(s) = 0$ al variare di K_1 da 0 a $+\infty$.

Luogo delle radici (inverso) è il luogo geometrico descritto dalle radici dell'eq. $1 + K_1G_1(s) = 0$ al variare di K_1 da 0 a $-\infty$.

Se $K_1 > 0$ allora:

$$\{1 + K_1G_1(s) = 0\} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg G_1(s) = \pi \quad \mathrm{mod}\, 2\pi \\ |G_1(s)| = \dfrac{1}{K_1} \end{cases}$$

Se $K_1 < 0$ allora:

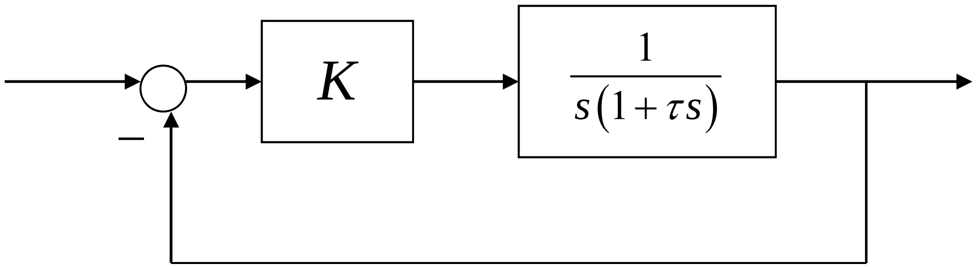
$$\{1 + K_1G_1(s) = 0\} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg G_1(s) = 0 \quad \mathrm{mod}\, 2\pi \\ |G_1(s)| = -\dfrac{1}{K_1} \end{cases}$$

Esempio: $\tau > 0,\ K \in (0, +\infty)$

eq. car.: $1 + \dfrac{K}{s(1+\tau s)} = 0$

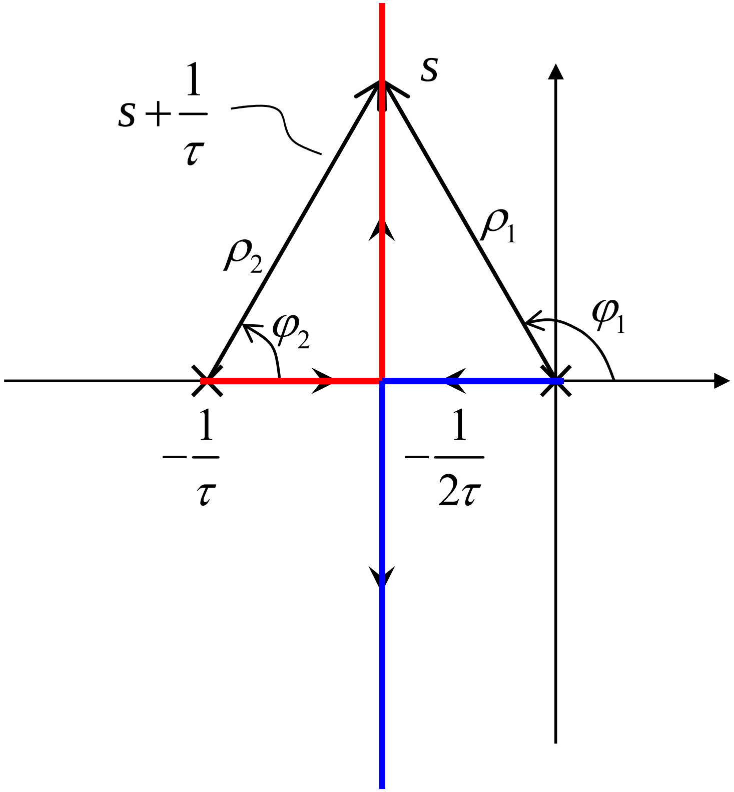
$$1 + \frac{K}{\tau} \cdot \frac{1}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} = 0$$

$$K_1 = \frac{K}{\tau}, \quad G_1(s) = \frac{1}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}$$



$$\arg \frac{1}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} = \pi \quad \bmod 2\pi$$

$$\begin{cases} s = \rho_1 e^{j\varphi_1} \\ s + \frac{1}{\tau} = \rho_2 e^{j\varphi_2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 + \varphi_2 = \pi$$



Proprietà del luogo delle radici

Proprietà 1: Il luogo ha tanti rami quanti sono i poli di $G_1(s)$. Ogni ramo parte da un polo di $G_1(s)$ e termina in uno zero di $G_1(s)$ o in un punto all'infinito. I rami si intersecano in corrispondenza delle radici multiple.

Dim.: (si ricorda che $m \leq n$)

$1 + K_1 G_1(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(s) + K_1 z(s) = 0$ (eq. polinomiale di grado n)

$K_1 \to 0 \quad \Rightarrow \quad |G_1(s)| \to +\infty \quad \Leftrightarrow \quad s \to p_i,\ i = 1, \dots n$

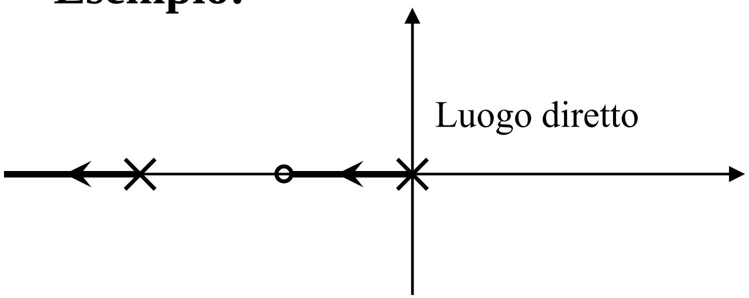
$|K_1| \to +\infty \quad \Rightarrow \quad |G_1(s)| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \to z_i,\ i = 1, \dots m$ oppure $|s| \to +\infty$ □

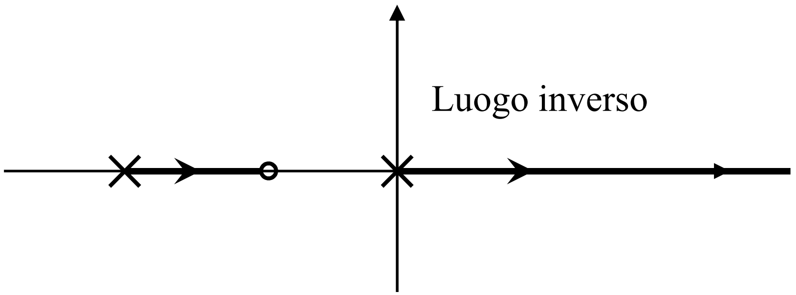
Proprietà 2: Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

Dim.: Le radici complesse di un'eq. polinomiale a coefficienti reali si presentano a coppie coniugate.

Proprietà 3: Nel luogo delle radici diretto ($K_1 > 0$) un punto dell'asse reale fa parte del luogo se si lascia alla sua destra un numero totale ***dispari*** di zeri e poli di $G_1(s)$. Nel luogo delle radici inverso ($K_1 < 0$) un punto dell'asse reale fa parte del luogo se si lascia alla sua destra un numero totale ***pari*** di zeri e poli di $G_1(s)$.

Esempio:





Dim.: Eq. del luogo diretto: $\arg G_1(s) = \pi \mod 2\pi \quad s \in \mathbb{R}$

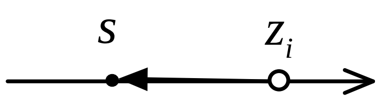
$$\arg \frac{z(s)}{p(s)} = \pi \mod 2\pi \qquad \arg \frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} = \pi \mod 2\pi$$

zeri: $z_1, z_2, \ldots, z_q$ reali $z_{q+1}, z_{q+2}, \ldots, z_m$ complessi coniugati

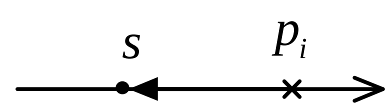
poli: $p_1, p_2, \ldots, p_r$ reali $p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_n$ complessi coniugati

$$\arg \frac{(s-z_1)\cdots(s-z_q)}{(s-p_1)\cdots(s-p_r)} = \pi \mod 2\pi$$

$$\arg(s-z_1) + \cdots + \arg(s-z_q) - \arg(s-p_1) - \cdots - \arg(s-p_r) = \pi \mod 2\pi$$



$\arg(s - z_i) = \pi$



$\arg(s - p_i) = \pi$

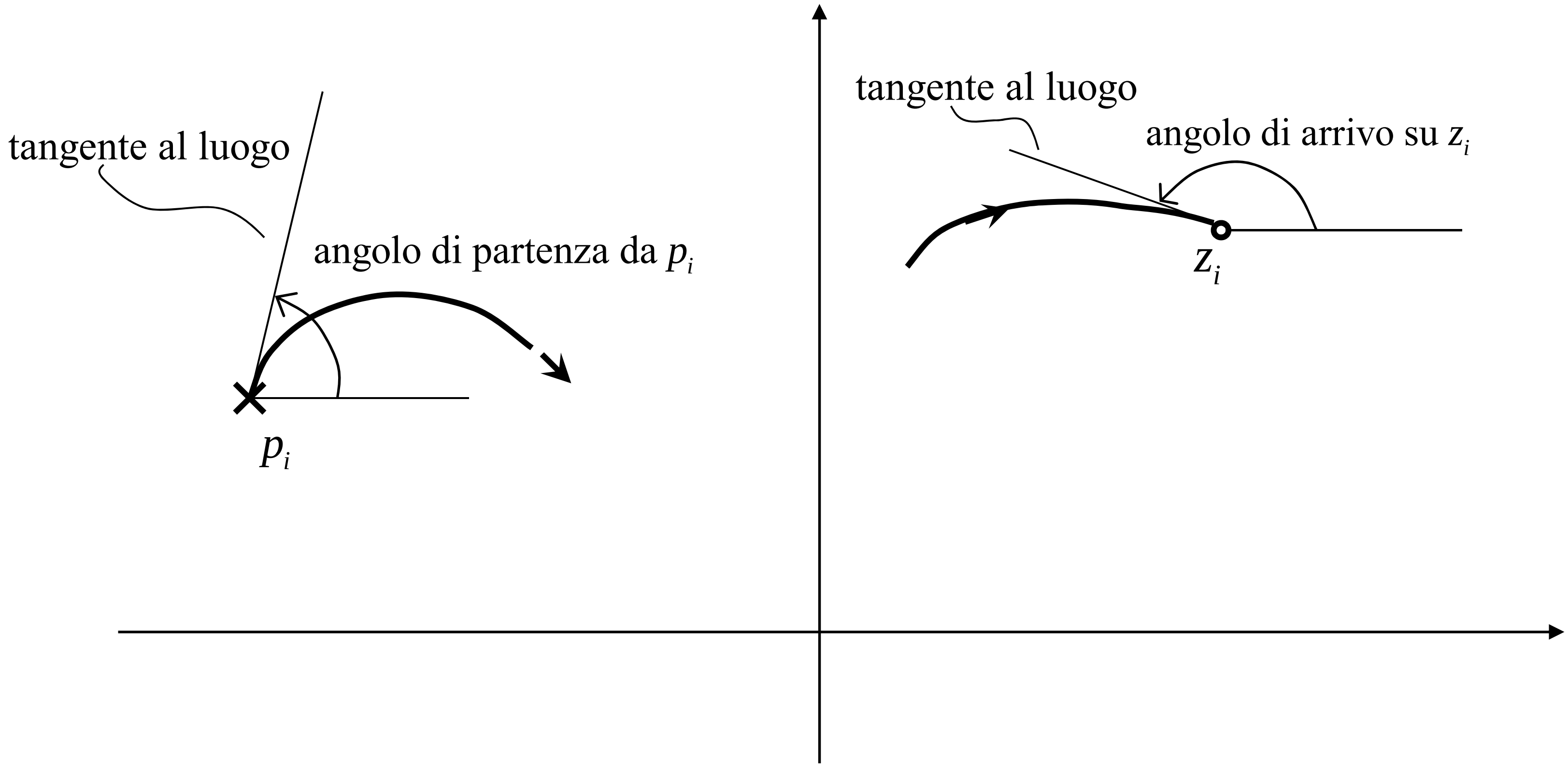
$\arg(s - z_i) = 0$

$\arg(s - p_i) = 0$

Il numero totale di zeri e poli **reali** a destra di s è dispari.

$\Leftrightarrow$ Il numero totale di zeri e poli (reali o complessi) a destra di s è dispari. □

Angoli di partenza e di arrivo nel luogo



Proprietà 4: Nel luogo delle radici diretto ($K_1 > 0$) l’angolo di partenza da un polo p_i semplice è dato dalla relazione:

$$\{\text{ang. di partenza da } p_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j)$$

l’angolo di arrivo sullo zero z_i semplice è dato da

$$\{\text{ang. di arrivo su } z_i\} = \pi + \sum_{j=1}^{n} \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j)$$

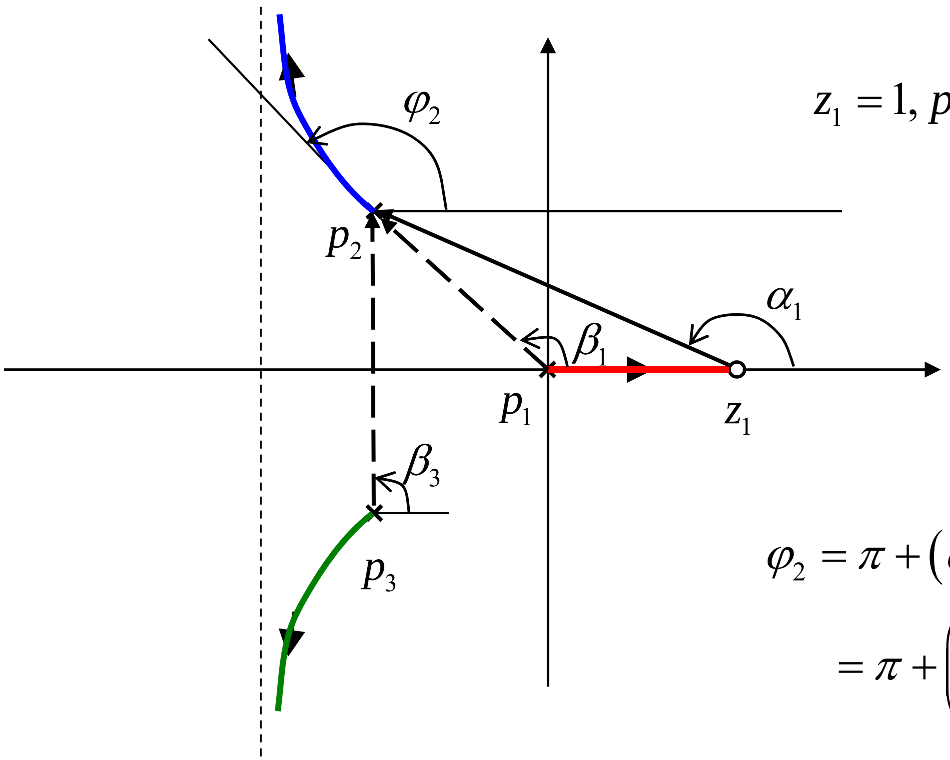
Se il luogo delle radici è inverso ($K_1 < 0$) nelle relazioni si sostituisce 0 a π.

Dim. (cenno): Determinazione dell'angolo di p. da p_i (φ_i)

Si impone il cambio di variabile $s = p_i + \rho e^{j\varphi_i}, \quad \rho \to 0+$

Quindi si valuta al limite la la relazione $\arg G_1(s) = \pi \mod 2\pi$ ...

Esempio: $1+K_1\frac{s-1}{s\left[(s+1)^2+1\right]}=0,\quad K_1>0$



$z_1=1,\, p_1=0,\, p_2=-1+j,\, p_3=-1-j$

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &= \pi+\left(\alpha_1\right)-\left(\beta_1+\beta_3\right)\\
&=\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\arctan 2\right)-\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\\
&=\frac{\pi}{4}+\arctan 2=1.8925\equiv 108°,43
\end{aligned}
$$

Nota sulla Proprietà 4 [luogo diretto]

Se il polo p_i è multiplo con molteplicità h > 1 gli h angoli di partenza φ_i da p_i si determinano con la congruenza:

$$h\varphi_i = \pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} \arg(p_i - p_j) \quad \mathrm{mod}\, 2\pi$$

Se lo zero z_i è multiplo con molteplicità h > 1 gli h angoli di arrivo ψ_i su z_i si determinano con la congruenza:

$$h\psi_i = \pi + \sum_{j=1}^{n} \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j) \quad \mathrm{mod}\, 2\pi$$

Esempio: $h = 2, \quad 2\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4} \quad \mathrm{mod}\, 2\pi$

soluzione: $\begin{cases} 2\varphi_{1,a} = \dfrac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; \varphi_{1,a} = \dfrac{\pi}{8} \\ 2\varphi_{1,b} = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi \;\Rightarrow\; \varphi_{1,b} = \dfrac{\pi}{8} + \pi \end{cases}$

Proprietà 5: Una radice del luogo di molteplicità h corrisponde a un punto comune ad h rami in cui oltre all'eq. $1 + K_1\ G_1(s) = 0$ sono soddisfatte le relazioni $D^i\ G_1(s) = 0$, $i = 1, \ldots, h - 1$.

Dim.:

Sia p_{Ci} una radice del luogo di molteplicità h:

$$\exists K_1 \in \mathbb{R} \ni 1 + K_1 G_1(s) = (s - p_{Ci})^h f(s), \quad f(p_{Ci}) \neq 0$$

$$\Rightarrow D^i \left(1 + K_1 G_1(s)\right)\Big|_{s=p_{Ci}} = 0\ ,\ i = 1, \ldots, h-1$$

$$\Rightarrow \quad D^i G_1(s)\Big|_{s=p_{Ci}} = 0\ ,\ i = 1, \ldots, h-1 \qquad \square$$

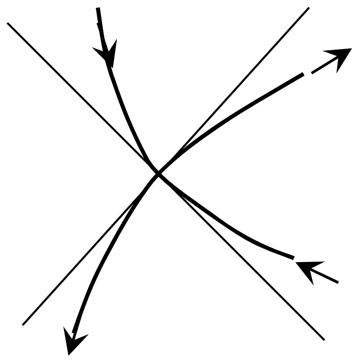
Corollario

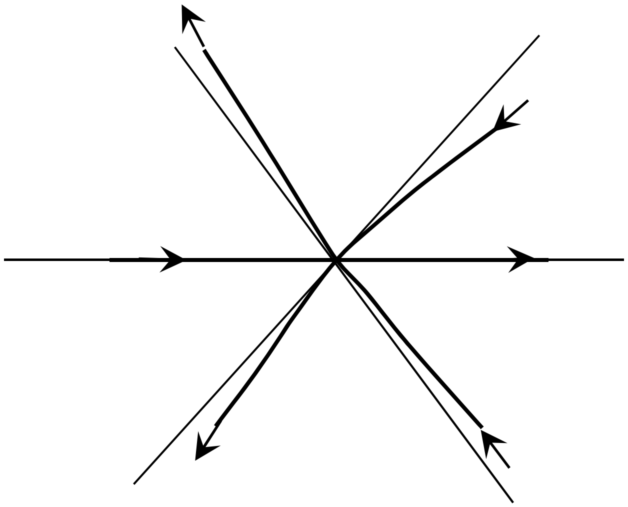
Una radice doppia del luogo soddisfa l'equazione:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - p_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s - z_i} = 0$$

Proprietà 6: In corrispondenza di una radice di molteplicità h il luogo presenta h rami entranti ed h rami uscenti, alternati fra loro, le cui tangenti suddividono lo spazio circostante in settori uguali di π/h radianti.

Esempi:





Dai poli di $G_1(s)$ partono n rami, di questi m terminano sugli zeri di $G_1(s)$, i rimanenti $n-m$ divergono all'infinito adagiandosi ad asintoti rettilinei.

Proprietà 7: Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i \right) \Big/ (n-m)$$

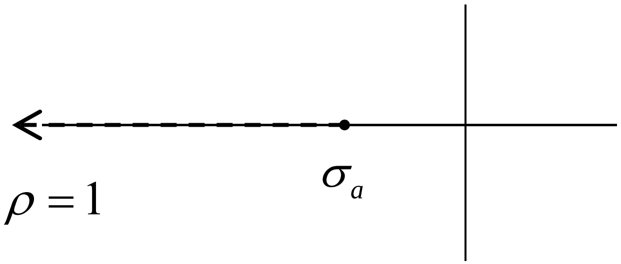
Se il luogo è diretto ($K_1 > 0$) gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

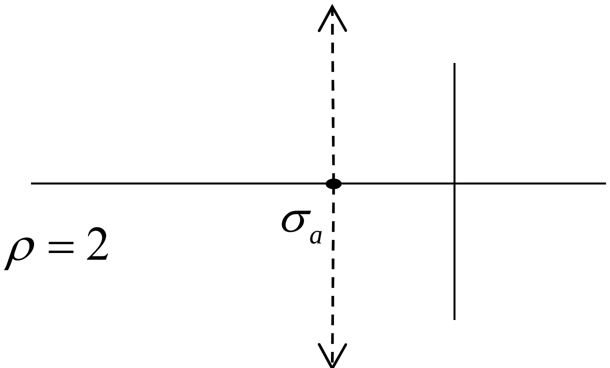
$$\vartheta_{a,\nu} = (2\nu+1)\pi/(n-m), \quad \nu = 0,1,\ldots,n-m-1.$$

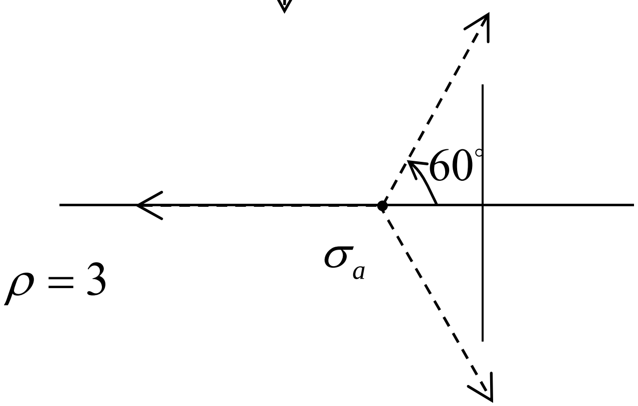
Se il luogo è inverso ($K_1 < 0$) gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

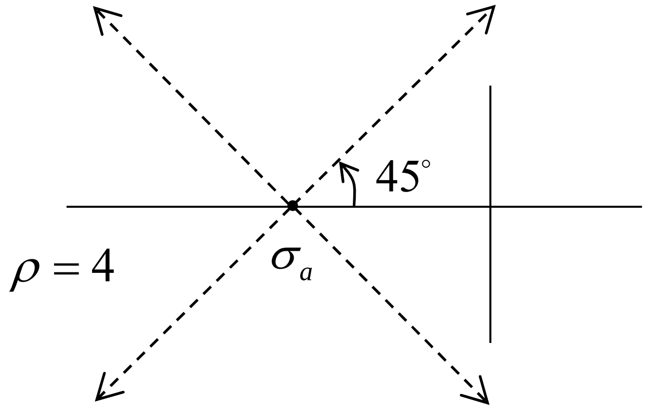
$$\vartheta_{a,\nu} = 2\nu\pi/(n-m), \quad \nu = 0,1,\ldots,n-m-1.$$

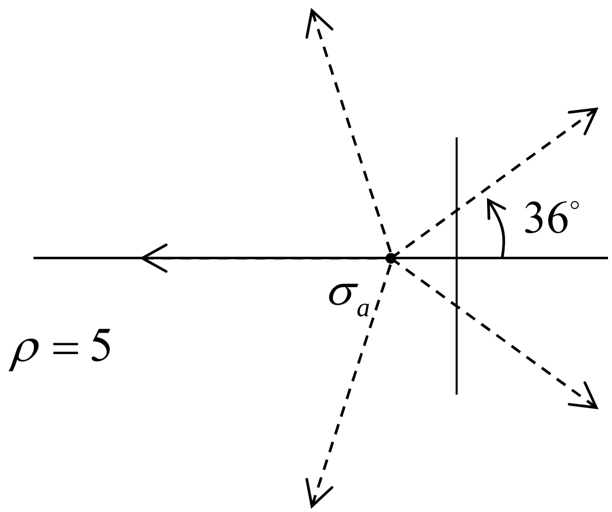
Asintoti del luogo diretto ($K_1 > 0$) $\rho := n - m$ $\left(\text{ordine relativo di } G_1(s)\right)$



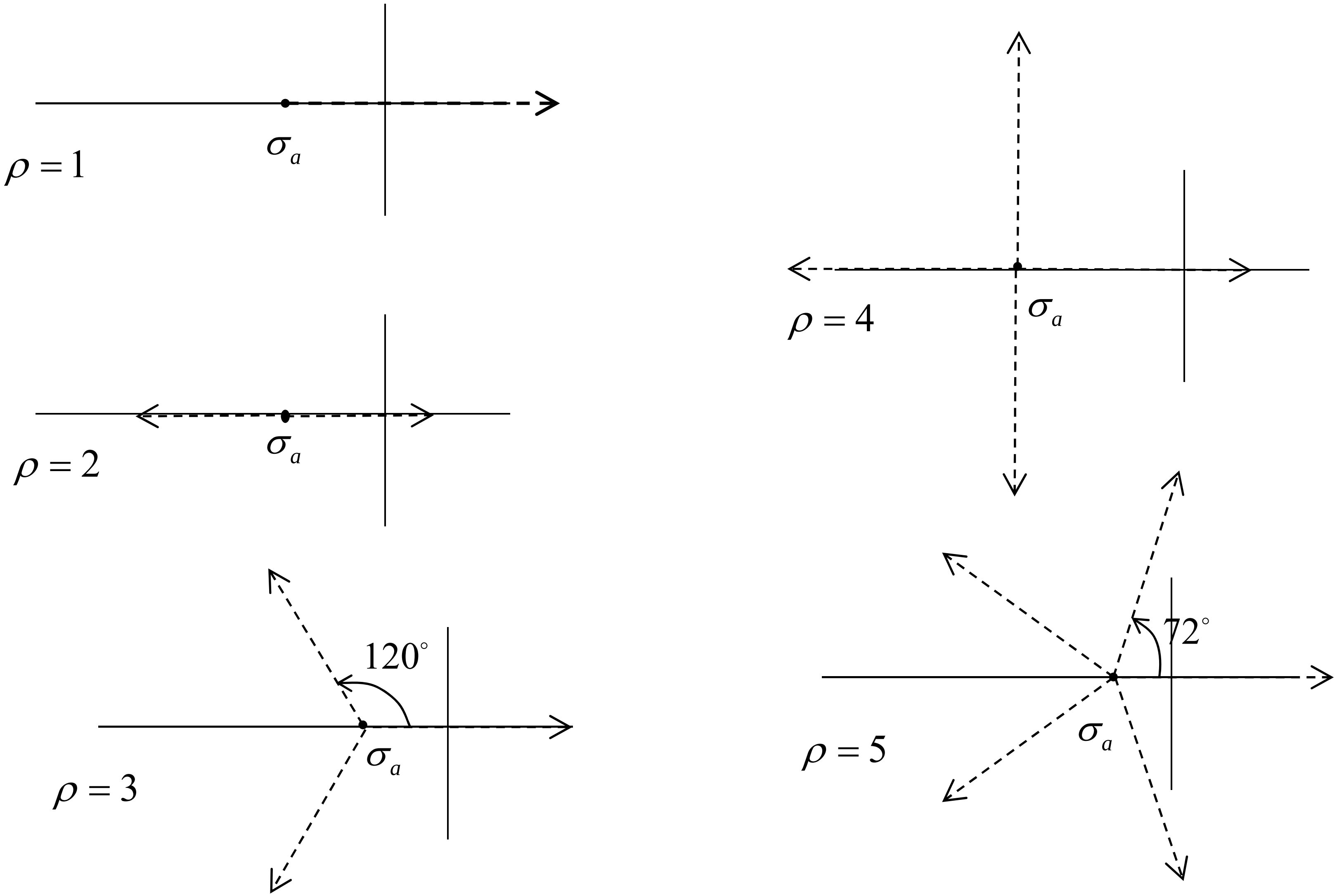






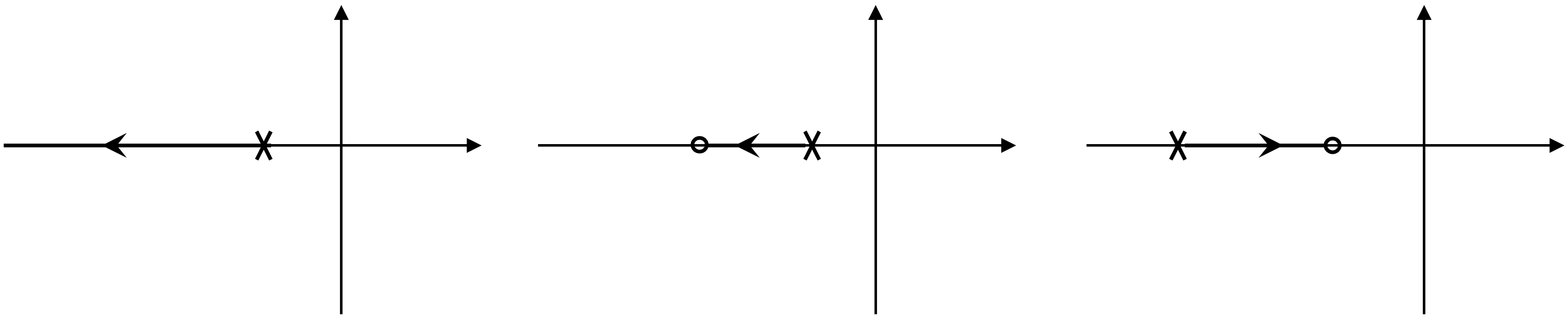


Asintoti del luogo inverso ($K_1 < 0$) $\rho := n - m$ (ordine relativo di $G_1(s)$)

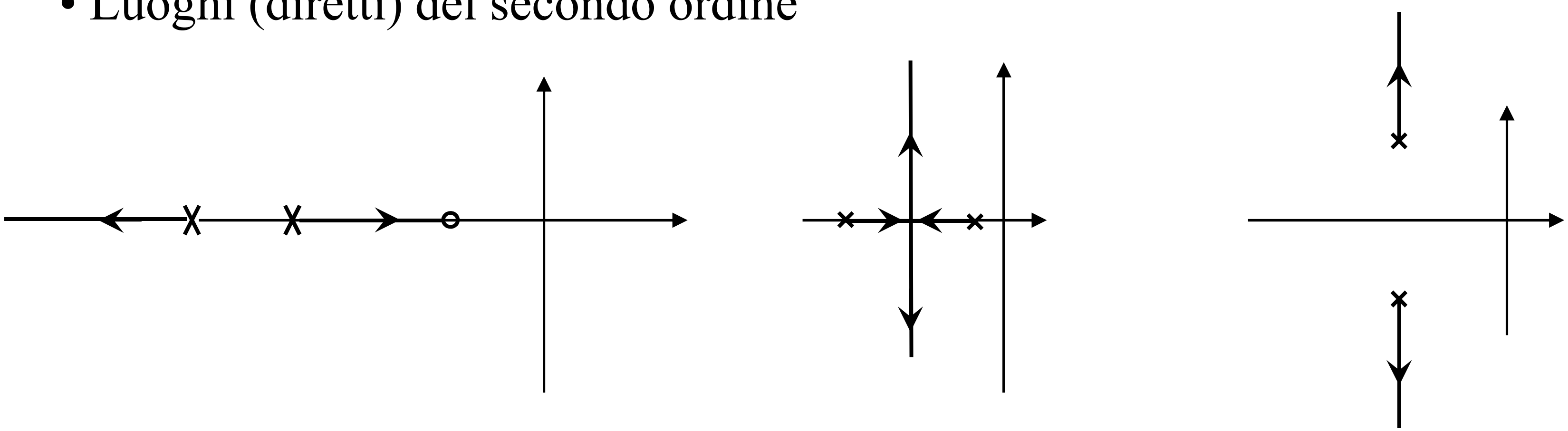


Esempi di luoghi delle radici

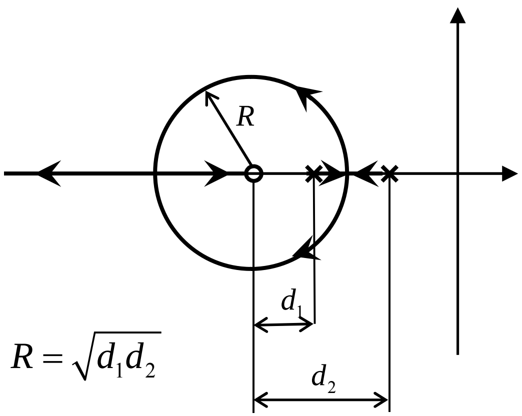
- Luoghi (diretti) del primo ordine

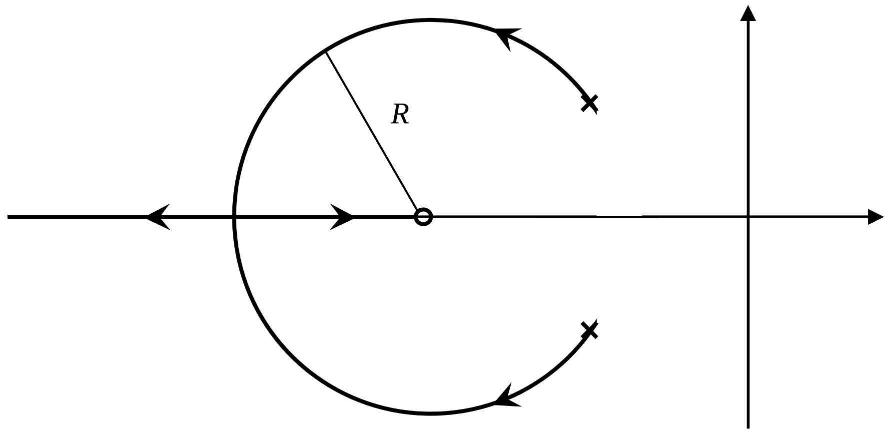


- Luoghi (diretti) del secondo ordine



• Luoghi (diretti) del secondo ordine





Il contorno delle radici

• É un luogo delle radici (dell'eq. caratteristica) per variazioni di un parametro diverso dalla costante di trasferimento del guadagno di anello.

• Questa tecnica è applicabile quando l'eq. caratteristica $1+L(s;p) = 0$ con p parametro variante è riconducibile all'eq. caratteristica standard $1 + K_1G_1(s) = 0$ con $K_1 = K_1(p)$ funzione biunivoca di p.

Esempio (contorno delle radici per variazioni di un polo):

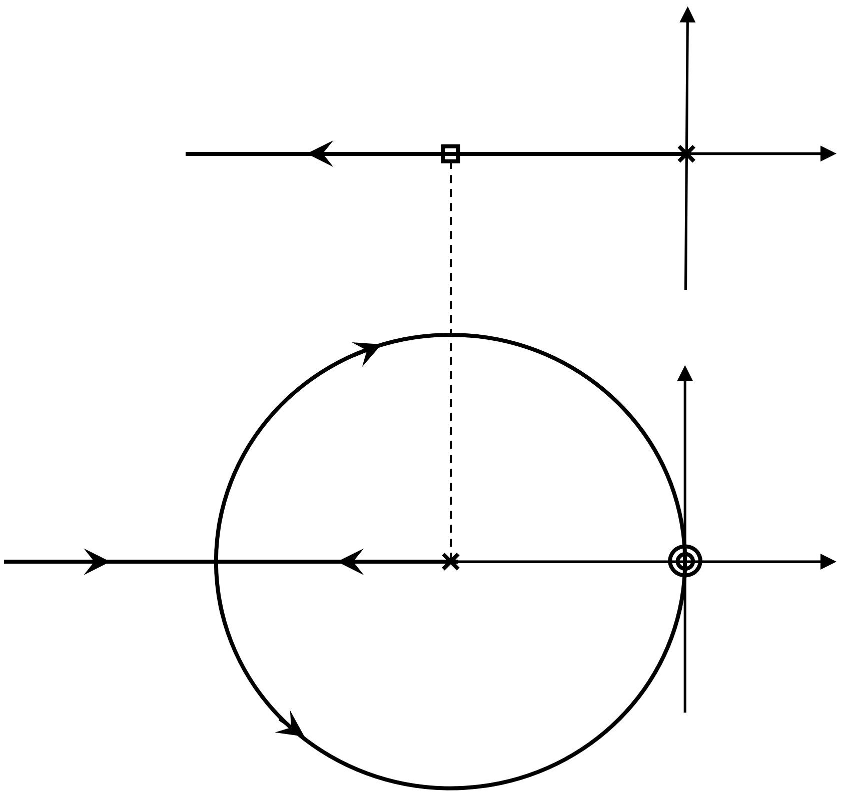
$$L(s;\tau) = \frac{\bar{K}}{s(1+\tau s)}$$

per $\quad \tau = 0 \quad 1 + \frac{K}{s} = 0$

per $\quad \tau > 0 \quad 1 + \frac{\bar{K}}{s(1+\tau s)} = 0$

$$s + \tau s^2 + \bar{K} = 0$$

$$1 + \tau \frac{s^2}{s + \bar{K}} = 0$$



L’eq. caratteristica 1+L(s;p) = 0 è riconducibile alla forma standard quando trasformata in equazione polinomiale i suoi coefficienti sono funzioni affini del parametro p.

Esempio:

$$1+\frac{s+5p}{s\left(s+3p\right)}=0 \qquad p>0$$

$$s^2+3ps+s+5p=0$$

$$1+\frac{p\left(3s+5\right)}{s^2+s}=0$$

$$1+3p\frac{s+\frac{5}{3}}{s\left(s+1\right)}=0$$

Complementi

$$1+K_1\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=0 \qquad 1+K_1G_1\left(s;z_1,\ldots,z_m\right)=0$$

$\left\{p_{C1},p_{C2},\ldots,p_{Cn}\right\}$ siano le radici dell'eq. caratteristica

$$p_{Ci}\equiv p_{Ci}\left(K_1;z_1,\ldots,z_m\right)$$

Teorema del baricentro del luogo delle radici

Se il guadagno di anello ha grado relativo $\rho\geq 2$ vale la relazione:

$$\sum_{i=1}^{n}p_{Ci}=\sum_{i=1}^{n}p_i \qquad \forall\ K_1\in\mathbb{R}\ \text{ e }\ \forall\ z_i\in\mathbb{C},\ i=1,\ldots,m.$$

Dim.: (si ricorda che $\rho = n - m$)

$$1 + K_1 \frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_m)} = 0$$

$$1 + K_1 \frac{\beta_{n-2}s^{n-2} + \beta_{n-3}s^{n-3} + \cdots}{s^n - \sum_{i=1}^{n} p_i s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots} = 0, \qquad \beta_{n-2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho > 2 \\ 1 & \text{se } \rho = 2 \end{cases}$$

$$s^n + \left(-\sum_{i=1}^{n} p_i\right)s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \cdots + K_1\beta_{n-2}s^{n-2} + K_1\beta_{n-3}s^{n-3} + \cdots = 0$$

$$s^n + \left(-\sum_{i=1}^{n} p_i\right)s^{n-1} + \left(\alpha_{n-2} + K_1\beta_{n-2}\right)s^{n-2} + \cdots = \left(s - p_{C1}\right)\left(s - p_{C2}\right)\cdots\left(s - p_{Cn}\right)$$

$$s^n + \left(-\sum_{i=1}^{n} p_i\right)s^{n-1} + \left(\alpha_{n-2} + K_1\beta_{n-2}\right)s^{n-2} + \cdots = s^n + \left(-\sum_{i=1}^{n} p_{Ci}\right)s^{n-1} + \cdots$$

dal principio di identità dei polinomi $\Rightarrow \quad -\sum_{i=1}^{n} p_i = -\sum_{i=1}^{n} p_{Ci}$ □

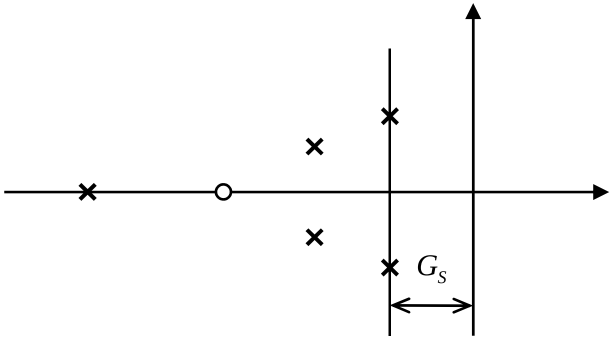
Grado di stabilità

Sia dato un sistema Σ asintoticamente stabile (Re $p_i < 0$, i = 1, .. ,n ; dove i p_i sono i poli di Σ):

Def.: Si definisce **grado di stabilità** di Σ (nel piano complesso)

$$G_S := -\max\{\mathrm{Re}\, p_1, \mathrm{Re}\, p_2, \ldots, \mathrm{Re}\, p_n\}$$

È la distanza minima dei poli di Σ dall'asse immaginario.



Nell'ipotesi che fra i poli di Σ esista una coppia dominante vale approssimativamente: $T_a \approx \dfrac{3}{G_S}$

Punti salienti della lezione:

- Le 7 proprietà per il tracciamento del luogo
- L’equazione per calcolare le radici doppie del luogo
- La regola per il tracciamento dell’arco di circonferenza nei luoghi del secondo ordine
- Riscrittura dell’equazione caratteristica per tracciare il contorno del luogo
- Il teorema del baricentro
- Il grado di stabilità di un sistema dinamico