Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Lezione n. 2 di Controlli Automatici A

prof. Aurelio Piazzi

Modellistica ed equazioni differenziali lineari

Università degli Studi di Parma – a.a. 2009-2010

- Cenni di modellistica (circuiti elettrici e sistemi meccanici)
- L’equazione differenziale lineare a coefficienti costanti quale modello di un sistema dinamico scalare

Cenni di Modellistica

Modellistica = costruzione dei modelli matematici dei sistemi

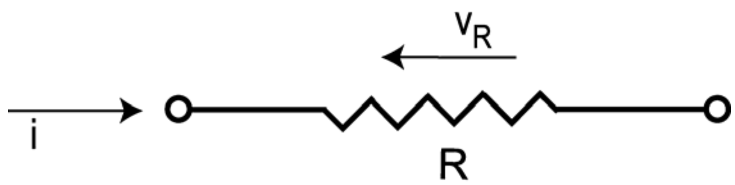
Modellistica:

1. a partire da leggi fondamentali

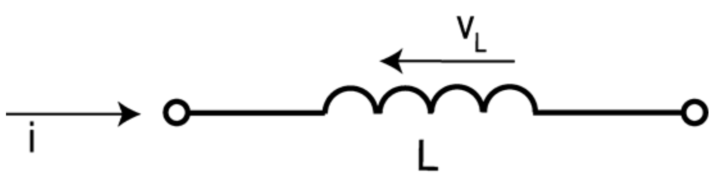
2. a partire da dati sperimentali (identificazione)

Scegliendo il primo approccio riportiamo qualche cenno su circuiti elettrici e sistemi meccanici.

• **Circuiti elettrici**

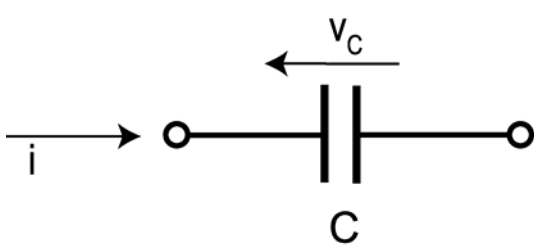


Resistenza: $v_R = Ri$



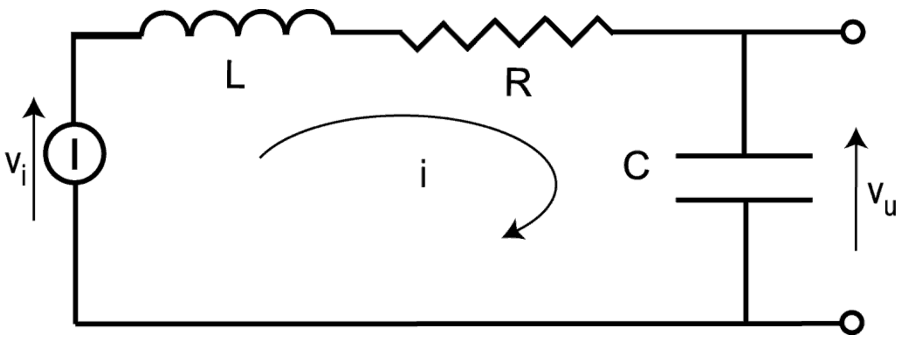
Induttanza: $v_L = L\dfrac{di}{dt} = LDi$

D ≡ operatore derivata



Capacità: $v_C = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau \;\Rightarrow Dv_C = \dfrac{i}{C}$

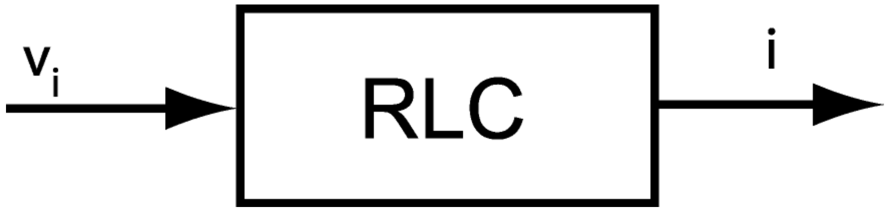
• Esempio: circuito RLC



$$v_i = v_L + v_R + v_C$$

$$v_i(t) = LDi(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

Costruzione del m.m. del circuito RLC orientato da v_i (ingresso) ad i (uscita):



Eq. differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$LD^2 i + RDi + \frac{1}{C} i = Dv_i$$

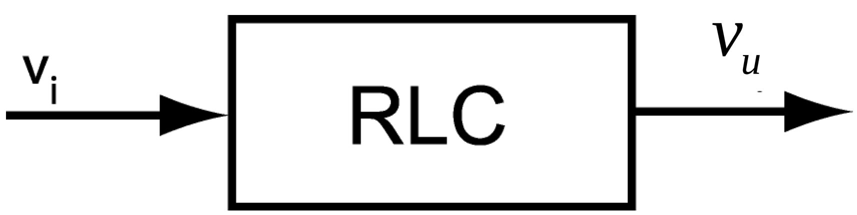
Rappresentabile anche come:

$$\left(LD^2 + RD + \frac{1}{C} \right) i = Dv_i$$

Costruzione del m.m. del circuito RLC orientato da v_i (ingresso) ad v_u (uscita):

$$Dv_u = \frac{i}{C} \Rightarrow i = CDv_u$$

$$v_i = LD(CDv_u) + R(CDv_u) + v_u$$

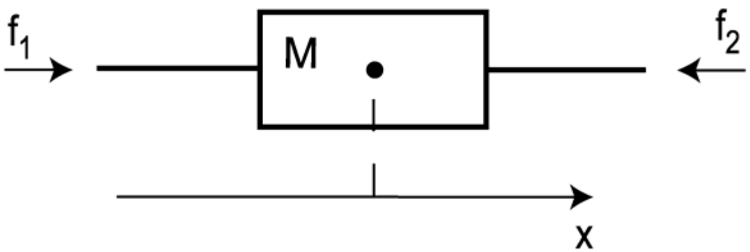


$$LCD^2 v_u + RCDv_u + v_u = v_i$$

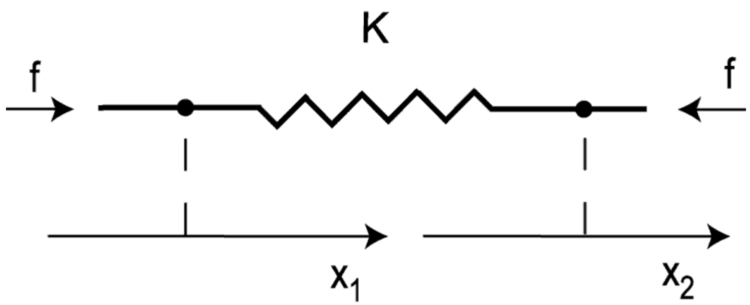
$$\left(LCD^2 + RCD + 1 \right) v_u = v_i$$

- **Sistemi meccanici**

leggi del moto unidimensionale per "componenti" meccanici

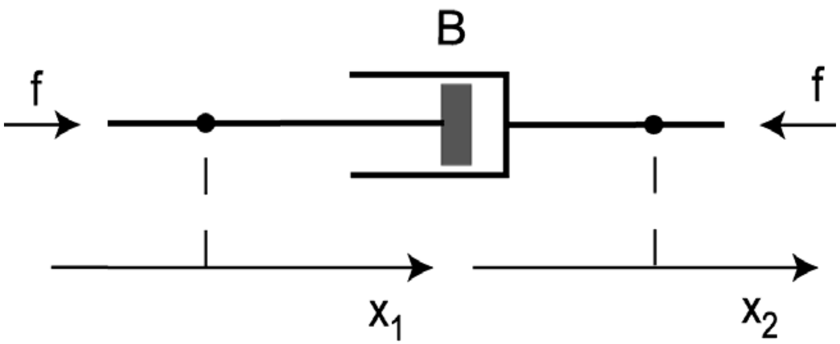


Massa: $MD^2 x(t) = f_1(t) - f_2(t)$



Molla: $f(t) = K\big(x_1(t) - x_2(t)\big)$

Relazione valida nell'ipotesi che la distanza fra le origini degli assi x_1 e x_2 sia pari alla lunghezza della molla non caricata.



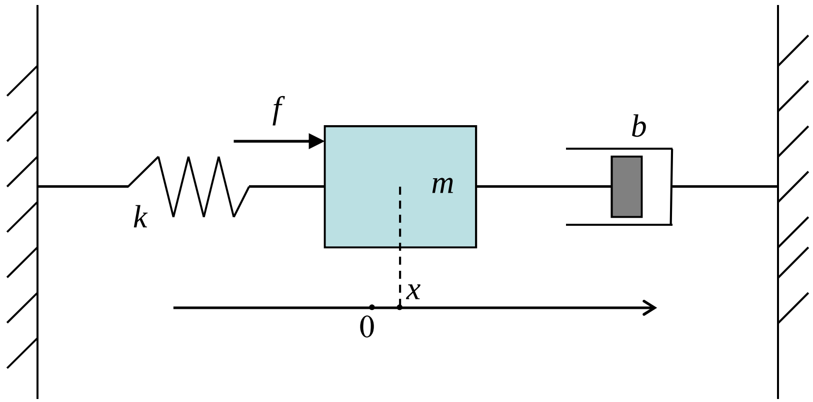
Ammortizzatore:

$$f(t) = B\big(v_1(t) - v_2(t)\big)$$
$$f(t) = BD\big(x_1(t) - x_2(t)\big)$$

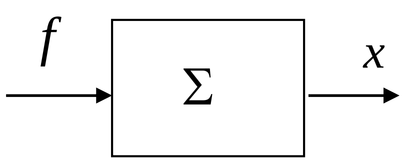
Legge che descrive un fenomeno di attrito viscoso: forza proporzionale alla velocità relativa …

- Esempio: sistema meccanico vibrante

(quando il sistema è a riposo abbiamo x = 0)



$$mD^2x(t) = -kx(t) - bDx(t) + f(t)$$



equazione del sistema orientatato da f ad x:

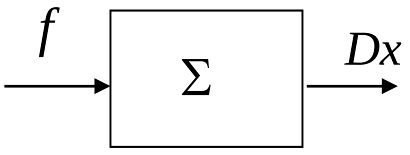
$$mD^2x(t) + bDx(t) + kx(t) = f(t)$$

Equazione diff. del sistema orientato da f (forza applicata) a Dx (velocità della massa):

$$mD^3x + bD^2x + kDx = Df$$

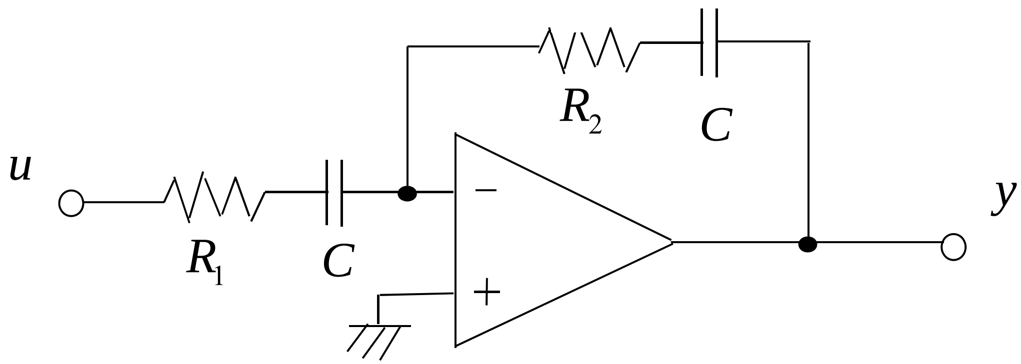
$$y := Dx$$

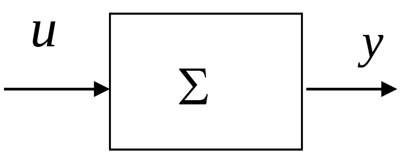
$$mD^2y + bDy + ky = Df$$



- **Circuiti elettrici con amplificatori operazionali**

Esempio:





u è la tensione in ingresso (variabile manipolabile o indipendente)

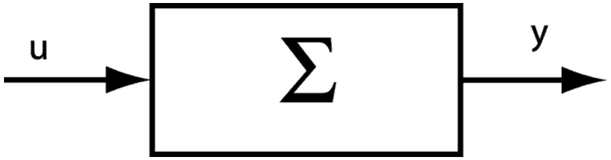
y è la tensione in uscita (variabile dipendente)

Si può dedurre…

$$R_1 C D y + y = -R_2 C D u - u$$

Equazioni differenziali lineari

- Sistemi scalari rappresentati da eq. differenziali lineari a coefficienti costanti



$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \ldots + a_1 D y + a_0 y = b_m D^m u + \ldots b_1 D u + b_0 u$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u$$

È un modello matematico formale del sistema dinamico (orientato) Σ, y = variabile d'uscita, u = variabile d'ingresso; $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.

n = ordine dell'eq. diff., per estensione ordine di Σ, $n \geq m$;

$\rho := n - m$ ordine relativo o grado relativo di Σ.

- Insieme dei behaviours $\mathcal{B}$ di Σ:

$$\mathcal{B} := \left\{ \big(u(t), y(t)\big) : \text{ la coppia dei segnali causa-effetto "soddisfa" l'equazione differenziale } \sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u \right\}$$

Se $u(t)$ e $y(t)$ sono derivabili tante volte quanto necessario

$\big(u(\cdot) \in C^m \text{ e } y(\cdot) \in C^n\big)$

"soddisfa" significa:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

•**Proprietà:** Il sistema Σ è lineare.

Dim.

Siano $\big(u_i(\cdot), y_i(\cdot)\big) \in \mathcal{B},\ i = 1,2$. Allora $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ segue:

$$\big(\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t),\ \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)\big) \in \mathcal{B}$$

Infatti (per semplicità $n = 1,\ m = 0$):

$$\begin{cases} a_1 D y_1(t) + a_0 y_1(t) = b_0 u_1(t) \\ a_1 D y_2(t) + a_0 y_2(t) = b_0 u_2(t) \end{cases}$$

$$\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \begin{cases} a_1 D\big[\alpha_1 y_1(t)\big] + a_0\big[\alpha_1 y_1(t)\big] = b_0\big[\alpha_1 u_1(t)\big] \\ a_1 D\big[\alpha_2 y_2(t)\big] + a_0\big[\alpha_2 y_2(t)\big] = b_0\big[\alpha_2 u_2(t)\big] \end{cases}$$

sommando le equazioni:

$$a_1 D\big[\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)\big] + a_0\big[\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)\big] = b_0\big[\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)\big]$$

$$\Rightarrow \big(\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t),\ \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)\big) \in \mathcal{B} \qquad \square$$

•**Proprietà:** Il sistema Σ è stazionario.

Dim. $\big(u(t), y(t)\big) \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \big(u(t-T), y(t-T)\big) \in \mathcal{B} \quad \forall T \in \mathbb{R}$

Infatti (ancora per semplicità $n=1,\ m=0$):

$$a_1 Dy(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall T \in \mathbb{R}: \quad a_1 Dy(t-T) + a_0 y(t-T) = b_0 u(t-T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$y(t-T) = y(\tau)\big|_{\tau=t-T}$$

$$\frac{d}{dt} y(t-T) = \frac{dy}{d\tau}\bigg|_{\tau=t-T} \cdot \frac{d\tau}{dt} = Dy(t-T)$$

$$\Rightarrow a_1 \frac{d}{dt} y(t-T) + a_0 y(t-T) = b_0 u(t-T) \qquad \square$$

Un problema fondamentale nell'analisi di un sistema Σ:

Noto il segnale di ingresso $u(t)\big|_{[0,+\infty)}$

e le condizioni iniziali $y(0), Dy(0), \ldots, D^{n-1}y(0)$

determinare il segnale di uscita $y(t)\big|_{[0,+\infty)}$.

•Esempi: Σ definito da $Dy(t) - y(t) = u(t)$

1) $u(t) = 0, t \geq 0$ e $y(0) = 1$ (eq. omogenea)

$y(t) = ce^t,\ c \in \mathbb{R}$ (insieme di tutte le soluzioni)

$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1$

Soluzione: $y(t) = e^t, t \geq 0.$

2) $u(t) = 5, t \geq 0$ e $y(0) = 1$ (eq. non omogenea)

Individuata una soluzione particolare $y_p(t)$

$y(t) = ce^t + y_p(t),\ c \in \mathbb{R}$ è l'insieme di tutte le soluzioni.

$y_p(t)$?

Suggerimento: $y_p(t) = \int_0^t e^{t-v} 5dv$

$$y_p(t) = 5e^t \int_0^t e^{-v} dv = 5e^t \left[-e^{-v} \right]_0^t = 5e^t \left(-e^{-t} + 1 \right) = -5 + 5e^t$$

verifica:

$$Dy_p(t) - y_p(t) = 5e^t - \left(-5 + 5e^t \right) = 5 \quad \text{ok!}$$

$$y(t) = ce^t + y_p(t), \;\; y(0) = 1 \Rightarrow c + \left(-5 + 5e^0 \right) = 1 \Rightarrow c = 1$$

Soluzione: $y(t) = e^t + \left(-5 + 5e^t \right) = -5 + 6e^t, \; t \geq 0$

•Esempio:

Σ definito da $D^2 y(t) + 3Dy(t) + 2y(t) = u(t)$

Noto $u(t),\ t \geq 0$

e le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $Dy(0) = 1$

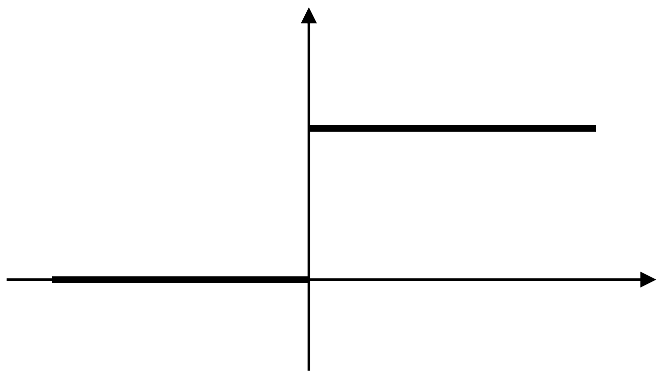
trovare $y(t),\ t \geq 0$?

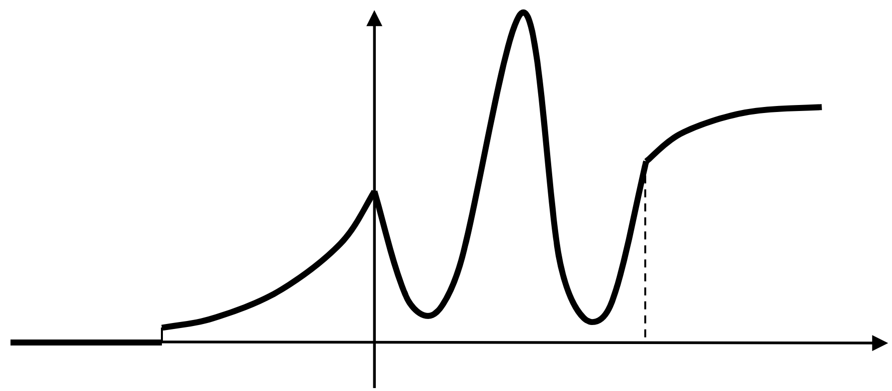
Emerge la necessità di:

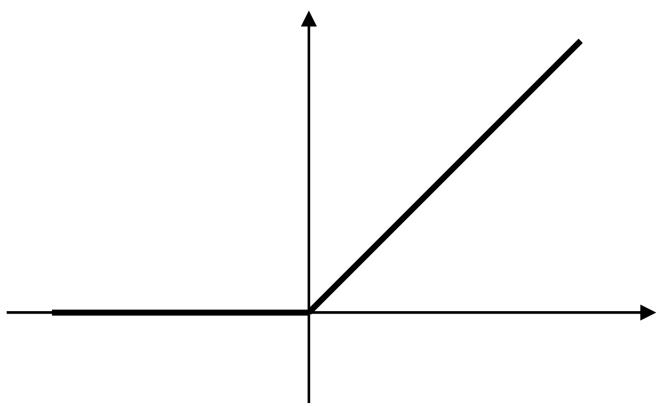
1) disporre di un metodo generale per determinare il segnale di uscita noto il segnale di ingresso e le condizioni iniziali;

2) trattare anche il caso di segnali di ingresso e uscita continui e derivabili a tratti.

Esempi di segnali u(t) per il controllo attivo:







La classe dei segnali con cui lavoreremo è

$PC^{\infty} \equiv$ Insieme delle funzioni a tratti indefinitivamente derivabili

$\left(\textit{piecewise } C^{\infty}\textit{-functions} \text{ or } \textit{piecewise smooth functions} \right)$

Definizione:

PC^{∞} è l'insieme di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} - \{t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots\} \to \mathbb{R}$

tali che

1. $f \in C^{\infty}\left(\mathbb{R} - \{t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots\}\right)$
2. $\exists$ i limiti (finiti) $\lim_{t \to t_k -} D^i f(t)$ e $\lim_{t \to t_k +} D^i f(t), \quad i = 0, 1, \ldots$

- L'insieme $\{t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots\}$ può avere cardinalità finita, infinita od essere l'insieme vuoto. Quest'ultimo caso significa che $C^{\infty}(\mathbb{R}) \subset PC^{\infty}$.
- Negli istanti di discontinuità t_k la funzione f o una sua derivata $D^i f$ può essere o non essere definita.

I t_k sono istanti di possibile discontinuità per $f(t) \in PC^\infty$ e le sue derivate.

Se $f(t_k-) \neq f(t_k+)$ la fun. è discontinua in t_k ed ha qui il "salto" $f(t_k+) - f(t_k-)$

Se $f(t_k-) = f(t_k+)$ si può definire $f(t_k) := f(t_k-)$ e la fun. è continua in t_k.

Se $f^{(i)}(t_k-) \neq f^{(i)}(t_k+)$ con $i \geq 1$ la fun. derivata $f^{(i)}(t)$ è discontinua in t_k

ed ha qui il "salto" $f^{(i)}(t_k+) - f^{(i)}(t_k-)$

Se $f^{(i)}(t_k-) = f^{(i)}(t_k+)$ con $i \geq 1$ può accadere:

- esiste la derivata di ordine i-esimo in t_k e $f^{(i)}(t_k) = f^{(i)}(t_k-) = f^{(i)}(t_k+)$
- non esiste la derivata di ordine i-esimo in t_k

Esempio:

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & t < 0 \\ 1 + \cos t & t \geq 0 \end{cases}$$

$f^{(i)}(0-) = f^{(i)}(0+),\ i = 1, 2, \ldots$ ma $f(t)$ non è derivabile in $t = 0$.

$C^k \equiv C^k(\mathbb{R})$

Proprietà di PC^∞

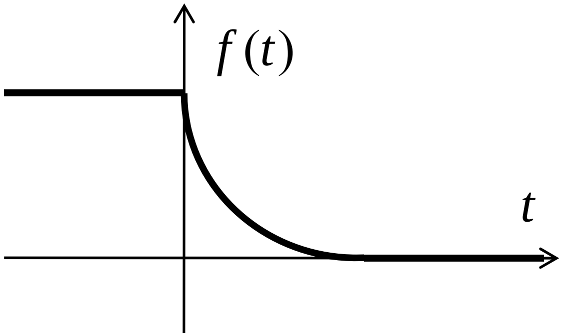
Se $f(t) \in PC^\infty \;\Rightarrow\; Df(t) \in PC^\infty$ ed anche $\forall a \in \mathbb{R},\ \int_a^t f(v)dv \in PC^\infty$.

$C^\infty \subset \cdots \subset C^k \subset C^{k-1} \subset \cdots \subset C^1 \subset C^0$

e $C^\infty \subset PC^\infty$ ma in generale $\forall k \in \mathbb{N},\ C^k \not\subset PC^\infty$

Esempio:

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ \text{ per } \ t < 0 \\ 1 - \sqrt{1-(t-1)^2} \ \text{ per } t \in [0,1] \\ 0 \ \text{ per } \ t > 1 \end{cases} \quad ; \quad f \in C^0 \wedge f \notin PC^\infty$$



Considereremo la classe

$C^k \cap PC^\infty = \{ f \in PC^\infty : f(t)$ è derivabile con derivata continua fino all'ordine k$\}$

$C^{k,\infty} := C^k \cap PC^\infty$ $\qquad C^\infty \subset \cdots \subset C^{k,\infty} \subset C^{k-1,\infty} \subset \cdots \subset C^{1,\infty} \subset C^{0,\infty} \subset PC^\infty$

Grado di continuità di una funzione o segnale

definizioni

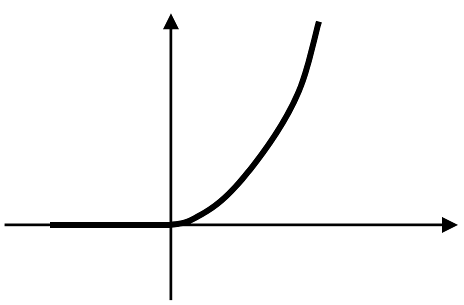
Se $f \in C^{k,\infty}$, k è il grado di continuità di f.

$$\overline{C^{k,\infty}} := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \in C^{k,\infty} \wedge f \notin C^{k+1,\infty} \right\}$$

Se $f \in \overline{C^{k,\infty}}$ allora k è il grado massimo di continuità di f.

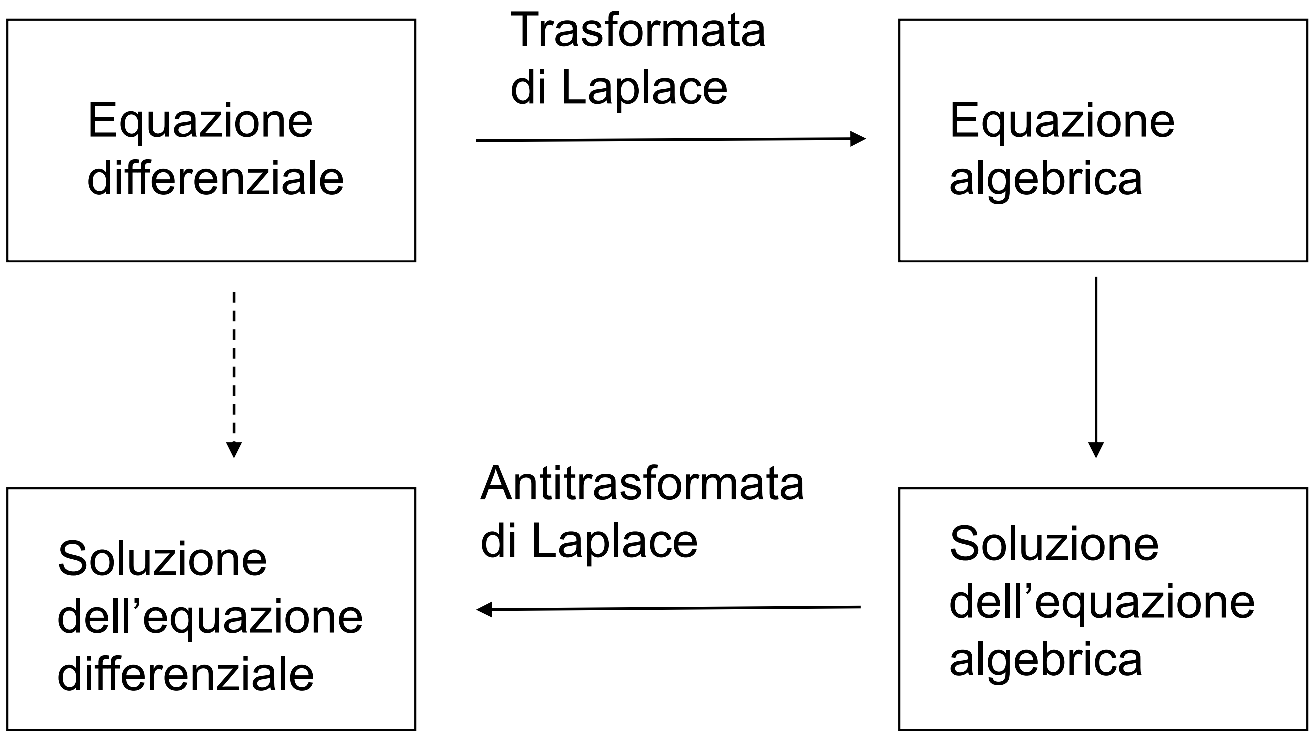
Esempio:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^3 & t \geq 0 \end{cases}, \; f \in C^{0,\infty}, C^{1,\infty}, C^{2,\infty}, \overline{C^{2,\infty}}$$



• Il metodo generale proposto per “integrare” l’equazione differenziale di Σ si basa sulla **trasformata di Laplace**.

• La comprensione del metodo della trasformata di Laplace richiede l’introduzione di cenni di teoria delle funzioni complesse di variabile complessa (**analisi matematica complessa**)


Equazione differenziale
Trasformata di Laplace
Equazione algebrica
Soluzione dell'equazione algebrica
Antitrasformata di Laplace
Soluzione dell'equazione differenziale

I concetti introdotti dalla lezione:

- Le leggi elementari per la modellistica elettrica e dei componenti meccanici.
- L'equazione differenziale lineare quale modello matematico di un sistema dinamico orientato.
- L'insieme dei behaviours.
- Il problema della determinazione dell'uscita di Σ noto l'ingresso e le condizioni iniziali.
- La classe delle funzioni a tratti indefinitivamente derivabili.
- Grado di continuità di un segnale.