Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Lezione n. 3 di Controlli Automatici A

prof. Aurelio Piazzi

Cenni di analisi complessa

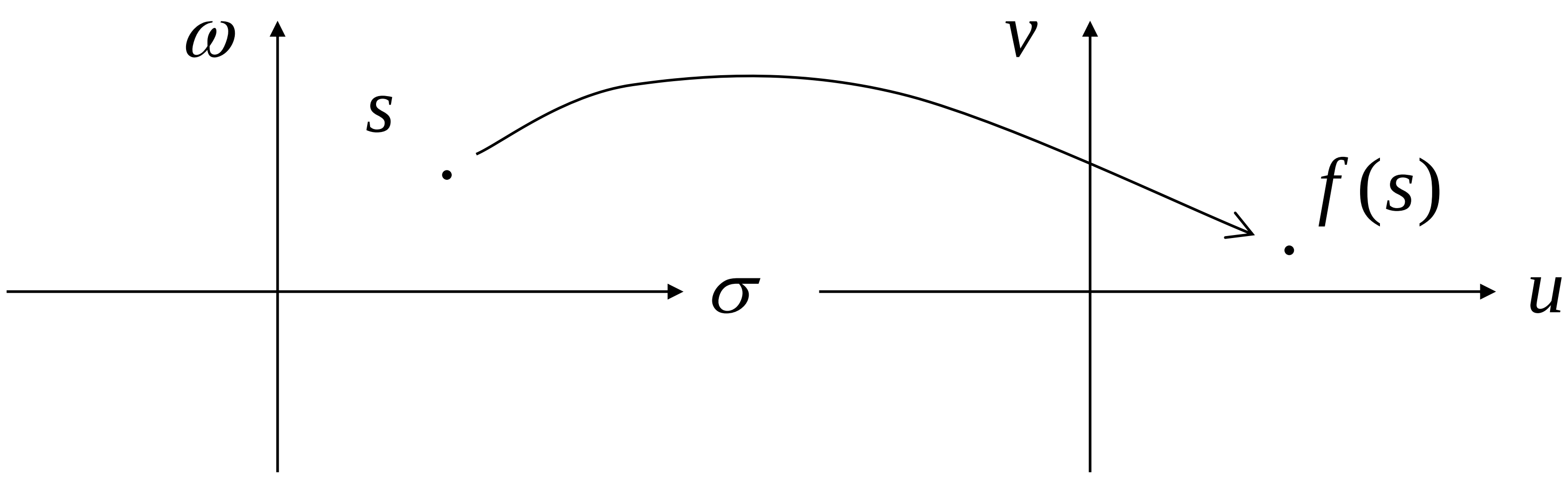
Università degli Studi di Parma – a.a. 2009-2010

Funzione complessa di variabile complessa

$$f:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$$

$$s\rightarrow f(s)$$

Se $s=\sigma+j\omega \quad \Rightarrow \quad f(s)=u(\sigma,\omega)+jv(\sigma,\omega)$



Definizione di limite: $\lim\limits_{s \to s_0} f(s) = \lambda$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho > 0$ tale che

se s soddisfa $0 < |s - s_0| < \rho \Rightarrow |f(s) - \lambda| < \varepsilon$

Interpretazione geometrica:

Sia $B(z, r) := \{ s \in \mathbb{C} : |s - z| < r \}$

(cerchio aperto di raggio r, centrato in z)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho > 0$ tale che $f\left(B(s_0, \rho) - \{s_0\} \right) \subseteq B(\lambda, \varepsilon)$

Def. **Continuità**

$f(s)$ è continua in $s = s_0$ se $\lim\limits_{s \to s_0} f(s) = f(s_0)$

Lemma

$f(s)$ è continua in $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ se e solo se

le funzioni reali $u(\sigma,\omega), v(\sigma,\omega)$ sono continue in $\left(\sigma_0, \omega_0\right)$.

Esempi:

$f(s) = 4s^2 + 5s + 3$ è continua su $\mathbb{C}$.

$f(s) = \dfrac{1}{s-1}$ è continua su $\mathbb{C} - \{1\}$.

Def. **Derivabilità**

$f(s)$ è derivabile in $s = s_0$ se esiste il limite

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{f\left(s_0 + \Delta s\right) - f\left(s_0\right)}{\Delta s}$$

Questo limite viene indicato con le notazioni $f'(s_0), f^{(1)}(s_0), \dfrac{df}{ds}(s_0), Df(s_0)$.

Le regole base di derivabilità già note dall'analisi reale rimangono valide.

Esempi:

$$f(s) = 4s^2 + 5s + 3 \quad \Rightarrow \quad Df(s) = 8s + 5 \quad \left[\, f(s) \text{ è derivabile su } \mathbb{C} \right]$$

$$f(s) = \frac{1}{s-1} \quad \Rightarrow \quad Df(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} \quad \left[\, f(s) \text{ è derivabile su } \mathbb{C} - \{1\} \right]$$

Def. **Analiticità**

$f(s)$ è **analitica** (o **olomorfa**) in $s = s_0$
se $f(s)$ è derivabile su di un intorno aperto contenente s_0.

Esempi: $f(s) = 4s^2 + 5s + 3$ è analitica su $\mathbb{C}$; $f(s) = \dfrac{1}{s-1}$ analitica su $\mathbb{C} - \{1\}$.

$f(s) = |s|^2$ è derivabile in $s = 0$ ma non è analitica in $s = 0$.

Infatti

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta s|^2 - |0|^2}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta s|^2}{\Delta s} = \qquad \left(\Delta s := re^{j\varphi}\right)$$

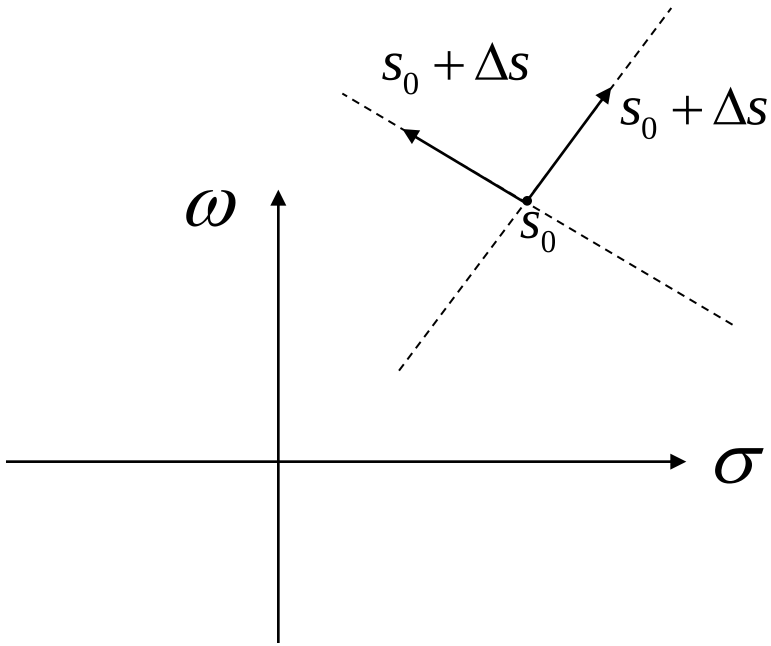
$$= \lim_{r \to 0} \frac{\left|re^{j\varphi}\right|^2}{re^{j\varphi}} = \lim_{r \to 0} \frac{r^2}{re^{j\varphi}} = \lim_{r \to 0} \frac{r}{e^{j\varphi}} = 0 \quad \forall \varphi$$

Non è analitica perchè...

Sia $f(s)$ derivabile in $s = s_0$:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{f\left(s_0 + \Delta s\right) - f\left(s_0\right)}{\Delta s} = f^{(1)}(s_0)$$

Questo limite sussiste per ogni direzione di convergenza a zero di Δs :



Calcoliamo $f^{(1)}(s_0)$ con $\Delta s = \Delta\sigma \in \mathbb{R}$ e $\Delta s = j\Delta\omega \in j\mathbb{R}$ $\left(\Delta\omega \in \mathbb{R}\right)$:

$s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ od anche $s_0 \equiv (\sigma_0, \omega_0)$

$$f^{(1)}(s_0) = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{f\left(s_0 + \Delta\sigma\right) - f\left(s_0\right)}{\Delta\sigma} =$$

$$= \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{u\left(\sigma_0 + \Delta\sigma, \omega_0\right) + jv\left(\sigma_0 + \Delta\sigma, \omega_0\right) - u\left(\sigma_0, \omega_0\right) - jv\left(\sigma_0, \omega_0\right)}{\Delta\sigma} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial\sigma}(s_0) + j\frac{\partial v}{\partial\sigma}(s_0)$$

$$f^{(1)}(s_0) = \lim_{j\Delta\omega\to 0} \frac{f\left(s_0 + j\Delta\omega\right) - f\left(s_0\right)}{j\Delta\omega} =$$

$$= \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{u\left(\sigma_0, \omega_0 + \Delta\omega\right) + jv\left(\sigma_0, \omega_0 + \Delta\omega\right) - u\left(\sigma_0, \omega_0\right) - jv\left(\sigma_0, \omega_0\right)}{j\Delta\omega} =$$

$$= \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{ju\left(\sigma_0, \omega_0 + \Delta\omega\right) - v\left(\sigma_0, \omega_0 + \Delta\omega\right) - ju\left(\sigma_0, \omega_0\right) + v\left(\sigma_0, \omega_0\right)}{-\Delta\omega} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial\omega}(s_0) - j\frac{\partial u}{\partial\omega}(s_0)$$

Quindi $\frac{\partial u}{\partial \sigma}(s_0) + j\frac{\partial v}{\partial \sigma}(s_0) = \frac{\partial v}{\partial \omega}(s_0) - j\frac{\partial u}{\partial \omega}(s_0)$ da cui si ottiene

$\frac{\partial u}{\partial \sigma}(s_0) = \frac{\partial v}{\partial \omega}(s_0)$ e $\frac{\partial u}{\partial \omega}(s_0) = -\frac{\partial v}{\partial \sigma}(s_0)$

Def. **Condizioni di Cauchy-Riemann**

$u(\sigma,\omega), v(\sigma,\omega)$ soddisfano le condizioni (equazioni) di Chauchy-Riemann se

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \sigma} = \dfrac{\partial v}{\partial \omega} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \omega} = -\dfrac{\partial v}{\partial \sigma} \end{cases}$$

Teorema

Sia $f(s) = u(s) + jv(s)$.

1. Se $f^{(1)}(s_0)$ con $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ esiste allora esistono le derivate parziali di $u(\sigma, \omega)$ e $v(\sigma, \omega)$ in (σ_0, ω_0) e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann.
2. Se $u(\sigma, \omega)$ e $v(\sigma, \omega)$ e le loro derivate parziali sono continue in (σ_0, ω_0) e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann, allora $f^{(1)}(s_0)$ con $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ esiste.

Ritorniamo all'esempio $f(s) = |s|^2 = \sigma^2 + \omega^2$

$$\Rightarrow \quad u = \sigma^2 + \omega^2, \quad v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = 2\sigma, \qquad \frac{\partial v}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = 2\omega, \qquad -\frac{\partial v}{\partial \sigma} = 0$$

$$\begin{cases} 2\sigma = 0 \\ 2\omega = 0 \end{cases}$$

$f(s)$ è derivabile solo in $0 + j0$

e quindi in $s = 0$ non può essere analitica.

Corollario

Sia $f(s) = u(s) + jv(s)$ con $u(\sigma,\omega),\ v(\sigma,\omega)$ e le loro derivate parziali continue su di un dominio aperto $U \subseteq \mathbb{C}$. Allora $f(s)$ è analitica su U se e solo se $u(\sigma,\omega),\ v(\sigma,\omega)$ soddisfano, su $U,$ le condizioni di Cauchy-Riemann.

Teorema

Sia $f(s)$ analitica su di una regione aperta $U \subseteq \mathbb{C}$.

Allora la derivata $Df(s)$ è anch'essa una funzione analitica su U.

Corollario

Se $f(s)$ è analitica sulla regione aperta U

allora $f(s)$ è ivi derivabile indefinitivamente.

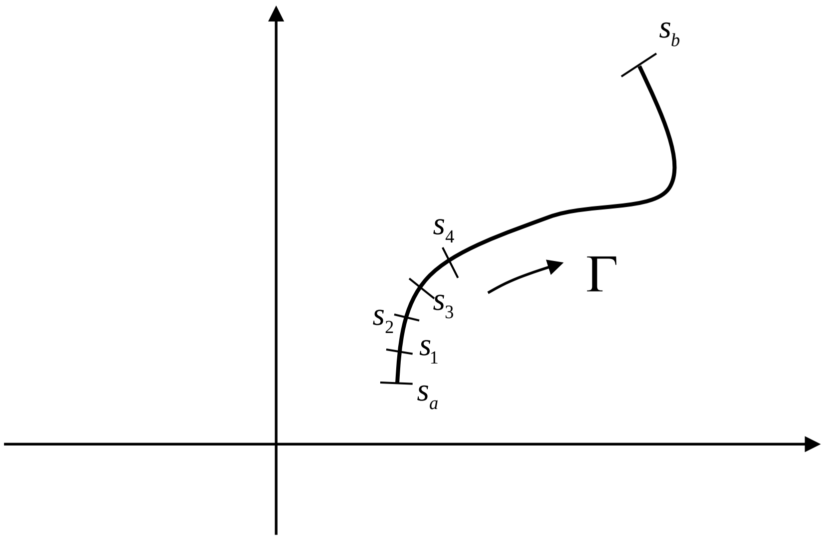
Integrali di linea nel piano complesso

Def. **Integrale**

Data una funzione $f(s)$ ed una curva Γ su $\mathbb{C}$, percorsa da s_a a s_b, definiamo

$$\int_\Gamma f(s)ds \triangleq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\left(s_i - s_{i-1}\right)$$

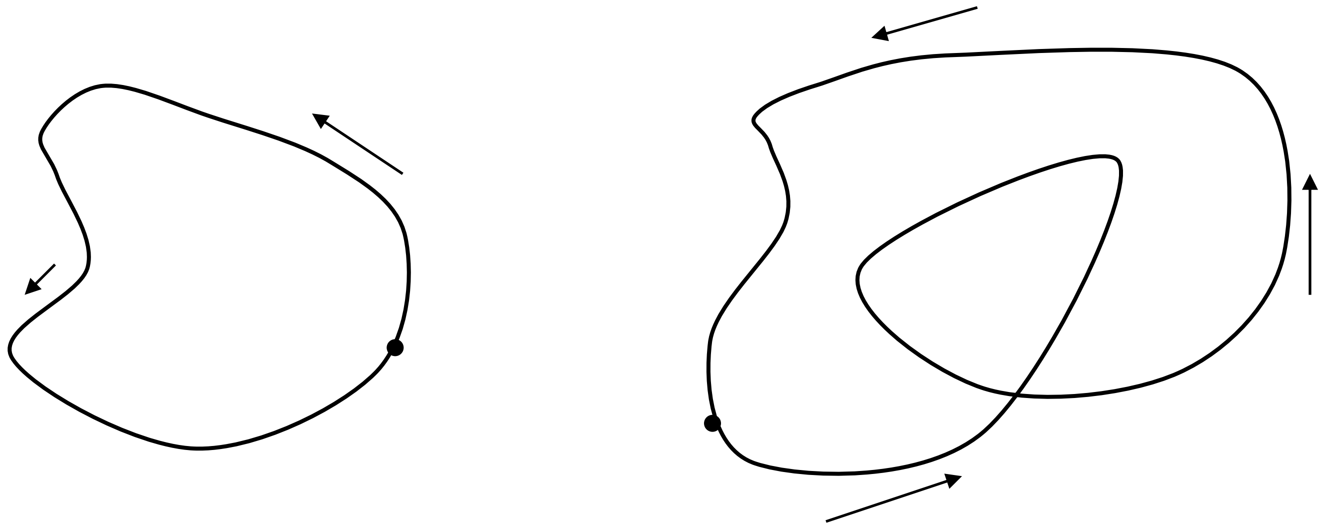
dove $s_0, s_1, \ldots, s_n$ $(s_0 = s_a,\ s_n = s_b)$ è una discretizzazione uniforme della curva Γ.



Def. **Curva chiusa semplice**

Una curva continua $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{C},\ u \to \Gamma(u)$ è curva chiusa semplice se

$\Gamma(a) = \Gamma(b)$ e $\Gamma(u_1) \neq \Gamma(u_2)\ \forall u_1 \neq u_2 \in (a,b).$



Teorema di Jordan

Se Γ è una curva chiusa semplice in $\mathbb{C}$ questa suddivide il piano complesso in due regioni distinte, una esterna ed una interna.

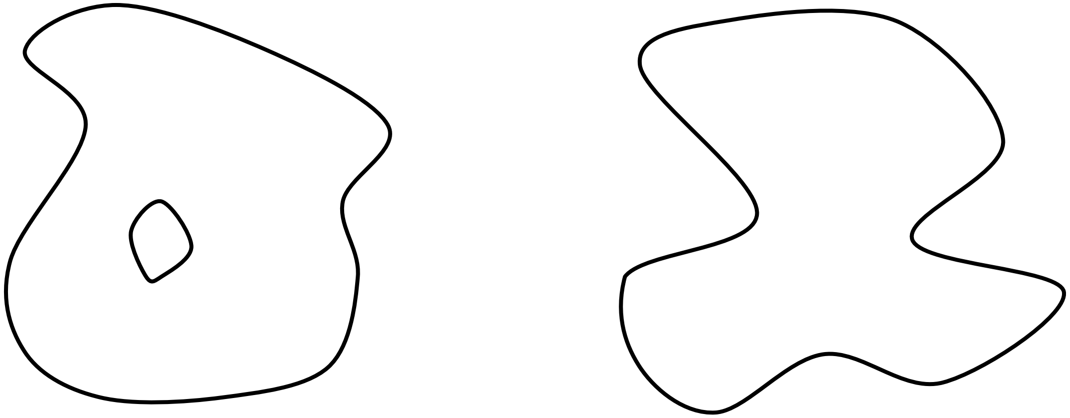
$$\left[\mathbb{C} - \Gamma = E \cup I, \quad E \cap I = \emptyset, \quad \partial E = \partial I = \Gamma\right]$$

Def. **Insieme connesso**

Un insieme $R \subseteq \mathbb{C}$ è connesso se per ogni coppia di punti appartenti all'insieme esiste una curva continua Γ che li congiunge tutta contenuta in R $\left[\Gamma \subseteq R\right]$.

Def. **Insieme semplicemente connesso**

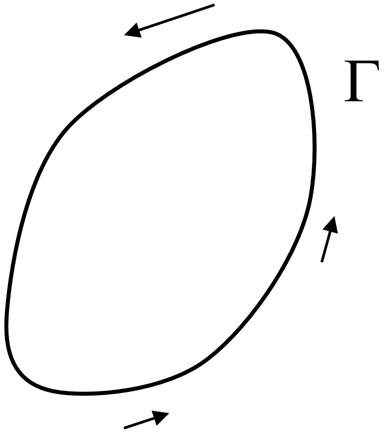
Un insieme $R \subseteq \mathbb{C}$ è semplicemente connesso se è connesso e per ogni curva chiusa semplice Γ appartentente all'insieme la regione interna di Γ è tutta contenuta in R.



Teorema dell'integrale di Cauchy

Sia $f(s)$ una funzione analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa U e Γ una curva chiusa semplice ivi contenuta.

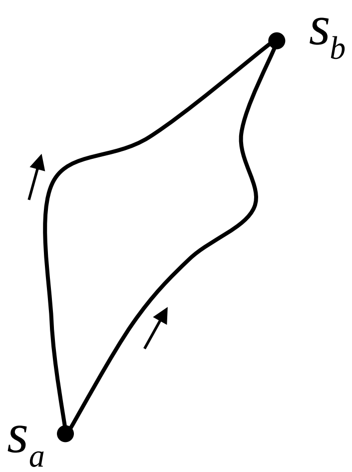
Allora $\oint_\Gamma f(s)ds = 0$



Corollario

Sia $f(s)$ una funzione analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa U e Γ una curva ivi contenuta che congiunge s_a ad s_b. Allora l'integrale di linea $\int_\Gamma f(s)ds$ non dipende dal percorso Γ ma solo da s_a, s_b e $f(s)$:

$$\int_\Gamma f(s)ds = \int_{s_a}^{s_b} f(s)ds$$



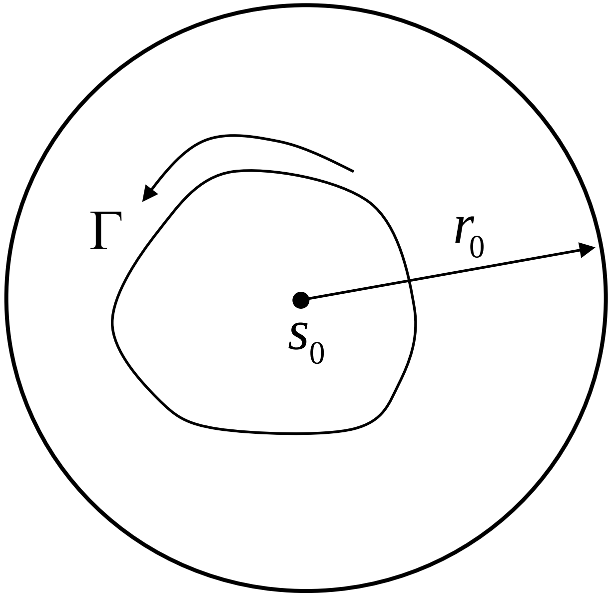
Teorema – Sviluppo in Serie di Taylor

Sia $f(s)$ una funzione analitica su di un cerchio $B(s_0, r_0)$ centrato su s_0 e con raggio r_0. Allora $\forall s \in B(s_0, r_0)$

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (s - s_0)^i = c_0 + c_1 (s - s_0) + c_2 (s - s_0)^2 + \cdots + c_i (s - s_0)^i + \cdots$$

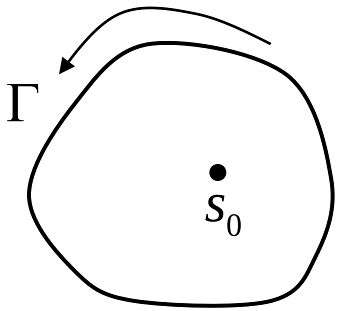
dove $(i = 0, 1, \cdots)$

$$c_i = \frac{f^{(i)}(s_0)}{i!} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{i+1}} ds.$$



Corollario – Formula integrale di Cauchy

$$f(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{s - s_0} ds.$$



$$f(s) = c_0 + c_1(s-s_0) + c_2(s-s_0)^2 + \cdots + c_i(s-s_0)^i + \cdots$$

$$c_i = \frac{f^{(i)}(s_0)}{i!}, \; i \in \mathbb{N}$$

Esempio

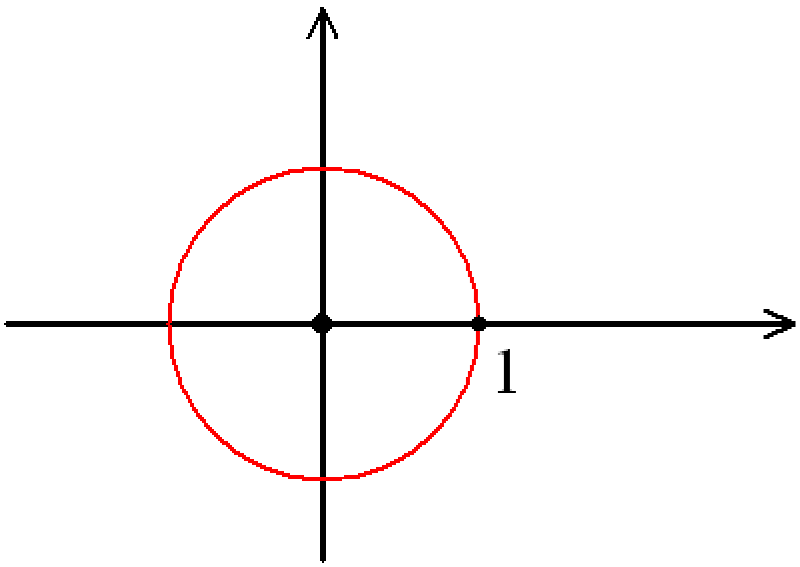
$$f(s) = \frac{1}{1-s}$$

Sviluppiamo $f(s)$ in serie di Taylor in un intorno dell'origine $\left(s_0 = 0\right)$.

$f(s)$ è analitica in $B(0,1) = \left\{ s \in \mathbb{C} : |s| < 1 \right\}$.

$$f^{(i)}(s) = \frac{i!}{(1-s)^{i+1}} \;\Rightarrow\; f^{(i)}(0) = i!$$

$$f(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + \cdots$$



Teorema – Sviluppo in Serie di Laurent

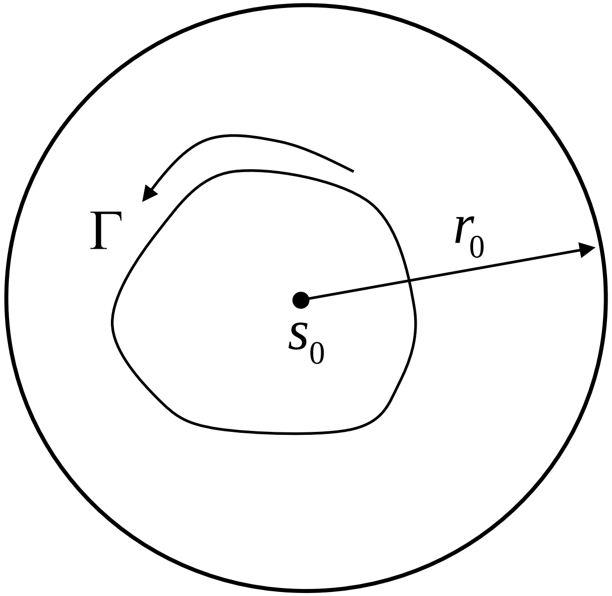
Sia $f(s)$ una funzione analitica sul cerchio $B(s_0, r_0)$ ad eccezione del suo centro s_0.

Allora $\forall s \in B(s_0, r_0) - \{s_0\}$

$$f(s) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i (s - s_0)^i = \cdots + \frac{c_{-2}}{(s - s_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(s - s_0)} + c_0 + c_1 (s - s_0) + c_2 (s - s_0)^2 + \cdots$$

dove

$$c_i = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{\left(s - s_0\right)^{i+1}} ds \qquad \forall i \in \mathbb{Z}.$$



$$f(s) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(s-s_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(s-s_0)} + c_0 + c_1(s-s_0) + c_2(s-s_0)^2 + \cdots$$

Classificazione del punto isolato s_0 :

- Se $c_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}^- \ (i = -1, -2, \dots)$

  definendo $f(s_0) = c_0$ risulta $f(s)$ analitica in $s = s_0$.

  Es.: $f(s) = \dfrac{(s-1)(s+3)}{(s-1)(s-2)(s+1)}, \quad f(s) = -2 - \dfrac{3}{2}(s-1) - \dfrac{7}{4}(s-1)^2 + \cdots$

- Se $c_i \neq 0$ per qualche $i \in \mathbb{Z}^-$ s_0 è una **SINGOLARITA'** di $f(s)$:

  1) Singolarità POLO quando i $c_i \neq 0$ sono in numero finito;

     sia $-n = \min\{i \in \mathbb{Z}^- : c_i \neq 0\}$: s_0 è polo di ordine n.

     Es.: $f(s) = \dfrac{s+3}{(s-1)^2(s+1)}, \quad f(s) = 2(s-1)^{-2} - \dfrac{1}{2}(s-1)^{-1} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8}(s-1) + \dfrac{1}{16}(s-1)^2 + \cdots$

     $$f(s) = \frac{1}{2}(s+1)^{-1} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}(s+1) + \frac{7}{16}(s+1)^2 + \cdots$$

  2) Singolarità ESSENZIALE quando i $c_i \neq 0$ con $i \in \mathbb{Z}^-$ sono infiniti.

     Es.: $f(s) = e^{\frac{1}{s}} = 1 + \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{2!\,s^2} + \dfrac{1}{3!\,s^3} + \cdots$

Proprietà

Assumiamo $f(s)$ analitica in $B(s_0, r_0) - \{s_0\}$.

s_0 è una singolarità di $f(s)$ se e solo se $f(s)$ assume valori illimitati in un intorno di s_0.

Teorema di Picard

Sia s_0 una singolarità essenziale di $f(s)$. In ogni intorno di s_0, la funzione $f(s)$ assume ogni valore complesso infinite volte con l'eventuale eccezione di un solo particolare valore.

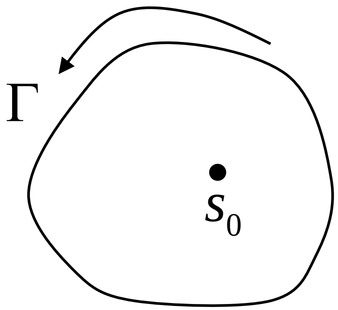
[ovvero: In ogni intorno di s_0, esistono sempre infinite radici dell'equazione $f(s) = c$ tranne, al più, per un valore eccezionale di c.]

$$f(s) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(s-s_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(s-s_0)} + c_0 + c_1(s-s_0) + c_2(s-s_0)^2 + \cdots$$

Def. **Residuo**

Sia s_0 una singolarità di $f(s)$. Il coefficiente c_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent si dice RESIDUO della funzione $f(s)$ in s_0.

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} f(s) ds$$

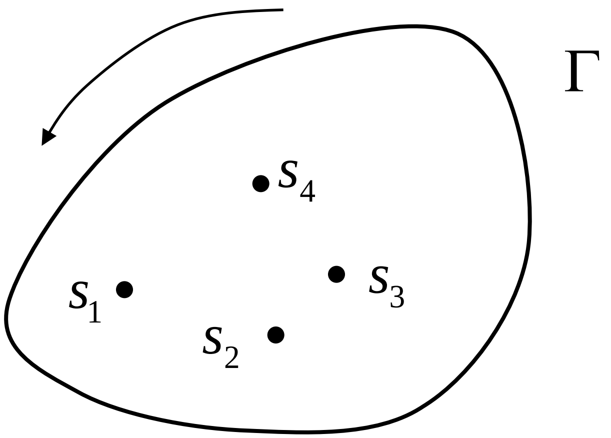


Teorema dei residui di Cauchy

Data una funzione $f(s)$ analitica su di una regione aperta e semplicemente connessa U ad eccezione dei punti singolari $s_1, s_2, \cdots, s_n$ vale

$$\oint_{\Gamma} f(s)ds = 2\pi j\left(R_1 + R_2 + \cdots R_n\right)$$

dove $\Gamma \subseteq U$ è una curva chiusa semplice contenente al suo interno le singolarità s_i ed R_i è il residuo associato a s_i.



Poli di $f(s)$

Proprietà :

Sia s_0 una singolarità polo di $f(s)$. Allora s_0 è polo di ordine n se e solo se esiste $g(s)$ analitica in s_0 con $g(s_0) \neq 0$ tale che

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s - s_0)^n}$$

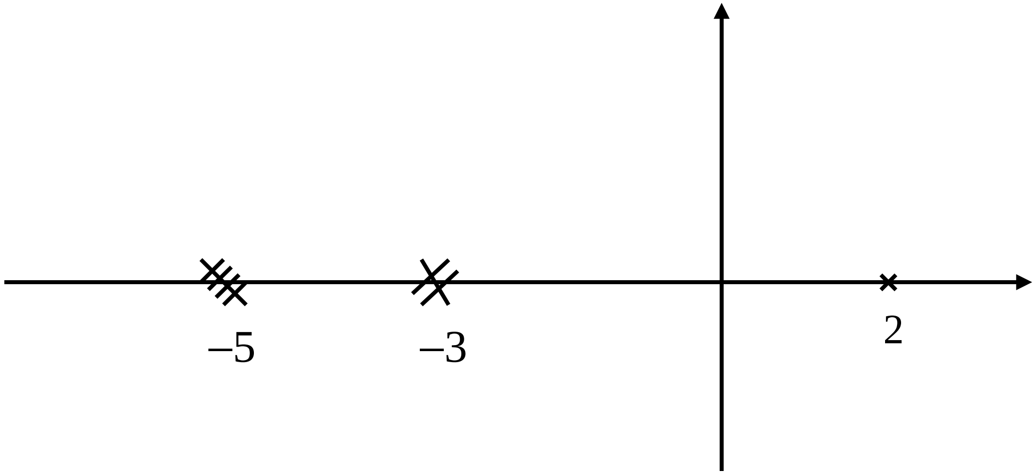
Esempio:

$$f(s) = \frac{s(s+6)^3}{(s-2)(s+3)^2(s+5)^4}$$

2 è un polo di ordine 1,

–3 è un polo di ordine 2,

–5 è un polo di ordine 4.



Zeri di $f(s)$

Sia $f(s)$ analitica in z.

Def.:

z è detto zero di f se $f(z)=0$. Considerato lo sviluppo di Taylor

$f(s)=c_1(s-s_0)+c_2(s-s_0)^2+\cdots$ ed $n:=\min\{i\in\mathbb{N}:\ c_i\neq 0\}$,

z è detto zero di ordine n di $f(s)$.

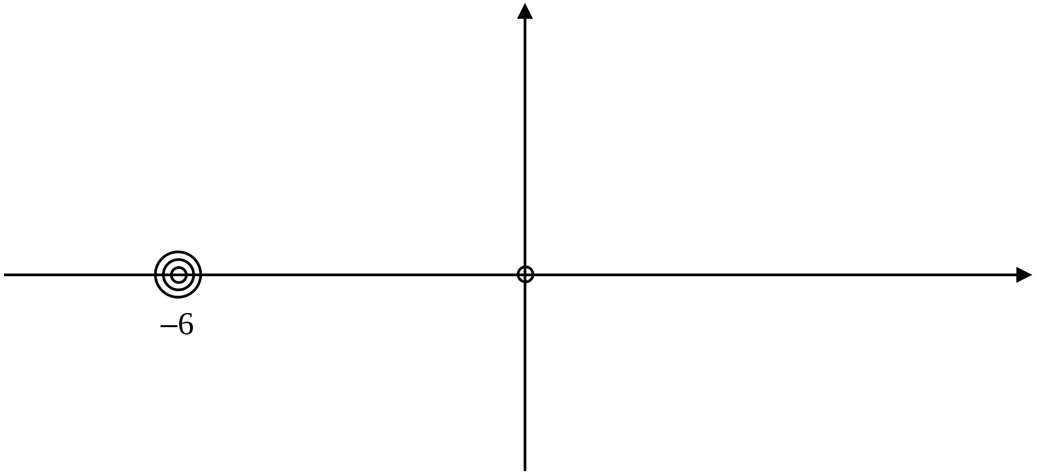
Proprietà:

z è zero di ordine n se e solo se esiste $g(s)$ analitica in z con $g(z)\neq 0$

tale che $f(s)=(s-z)^n g(s)$.

Esempio:

$$f(s)=\frac{s(s+6)^3}{(s-2)(s+3)^2(s+5)^4}$$



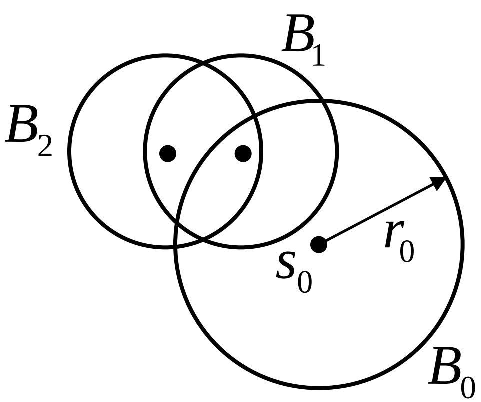
0 è uno zero di ordine 1,

–6 è uno zero di ordine 3.

Continuazione analitica

Data una funzione $f(s)$ definita da uno sviluppo in serie di Taylor su di un cerchio $B_0(s_0, r_0)$ è possibile estendere ("continuare") la definizione di $f(s)$ all'esterno di B_0 mediante lo sviluppo in serie di Taylor di altri punti di B_0. Il procedimento è ricorsivo:

$$B_0 \to B_1 \to B_2 \to \ldots$$



Possono emergere funzioni a più valori! (funzioni polidrome)

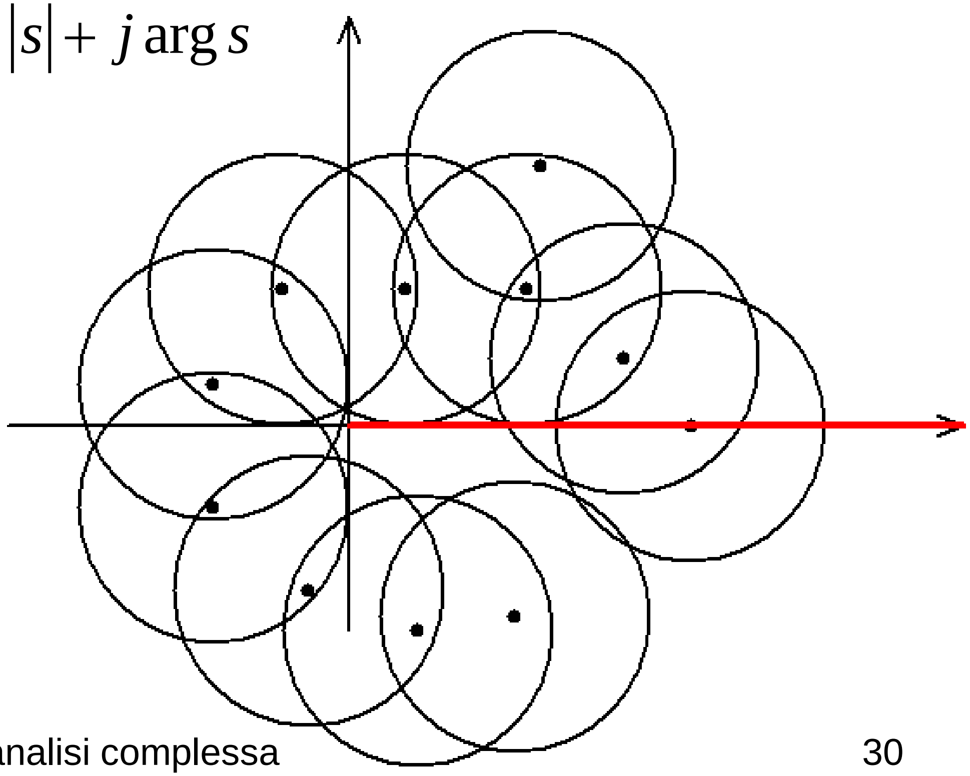
Esempio: estendere la definizione del logaritmo naturale dall'asse reale positivo al piano complesso mediante continuazione analitica. Si potrebbe dimostrare che

$$\ln s = \ln|s| + j \arg s$$

Deduzione euristica: $s = |s| e^{j \arg s}$

$$\Rightarrow \ln|s| e^{j \arg s} = \ln|s| + \ln e^{j \arg s} = \ln|s| + j \arg s$$

E’ una funzione polidroma.



I concetti introdotti dalla lezione:

- Limiti e derivate di funzioni complesse di variabili complesse
- Funzioni analitiche
- Condizioni di Cauchy-Riemann
- Integrali su curve del piano complesso
- Teorema dell'integrale di Cauchy
- Sviluppo in serie di Taylor
- Formula integrale di Cauchy
- Sviluppo in serie di Laurent
- Teorema dei residui di Cauchy
- Poli e zeri di una funzione
- Continuazione analitica e funzioni polidrome