Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Lezione n. 4 di Controlli Automatici A

prof. Aurelio Piazzi

La trasformata di Laplace

Università degli Studi di Parma – a.a. 2009-2010

- La trasformata di Laplace è un operatore funzionale che converte (“trasforma”) una equazione differenziale in una equazione algebrica.

- Il metodo basato sulla trasformata di Laplace permette di risolvere una equazione differenziale lineare con condizioni iniziali arbitrarie.

- Permette di analizzare i fenomeni transitori ed asintotici di una grande varietà di sistemi (elettrici, meccanici, termici, ecc.)

La **trasformata di Laplace** è un operatore funzionale che si applica ad una funzione f di variabile reale con codominio $\mathbb{R}$ $(\text{o } \mathbb{C})$:

1. Assumiamo $f \in PC^{\infty}$

2. $\exists \sigma \in \mathbb{R}$ per il quale $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < +\infty$

Note:

- spesso assumeremo $f(t) = 0$ per $t < 0$
- se vale la condizione 2 allora $\forall \sigma_1 > \sigma$: $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < +\infty$

Def. **ascissa di convergenza di** $f(t)$

$$\sigma_c := \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < +\infty \right\}$$

Def.: **Trasformata di Laplace**

La trasformata di Laplace di un segnale (funzione) $f(t)$ è la funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ definita da

$$F(s) = \int_{0-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

per i valori $s \in \mathbb{C}$ per i quali l'integrale converge.

- F è una funzione complessa di variabile complessa, $\mathcal{L}[\cdot]$ indica l'operatore di Laplace.
- Notazione usuale: le lettere minuscole denotano segnali e funzioni, le corrispondenti lettere maiuscole denotano le trasformate di Laplace, p.e., $Y(s)$ indica $\mathcal{L}[y(t)]$, E indica $\mathcal{L}[e]$, ecc.

Consideriamo $s = \sigma + j\omega$

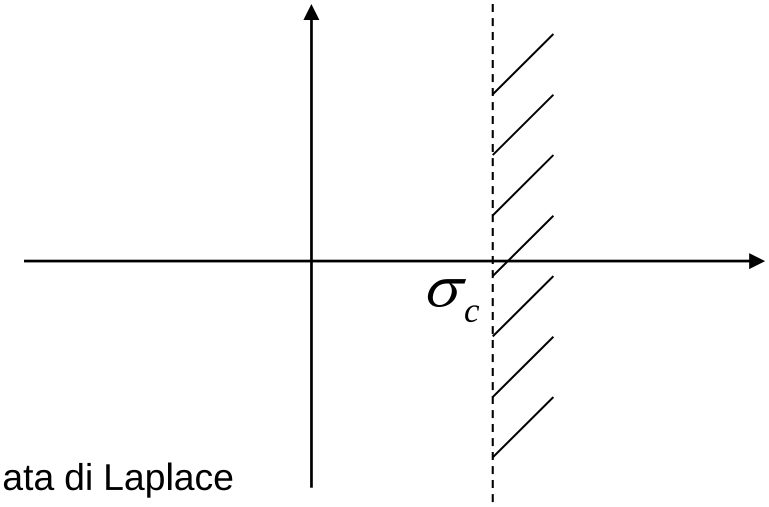
$$F(s) = \int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma + j\omega)t}dt$$

$$\left|F(s)\right| \le \int_{0}^{+\infty} \left| f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\right| dt = \int_{0}^{+\infty} \left| f(t)\right|\left|e^{-\sigma t}\right|\left|e^{-j\omega t}\right| dt = \int_{0}^{+\infty} \left| f(t)\right| e^{-\sigma t} dt$$

$F(s)$ è ben definito per $\sigma > \sigma_c$ ovvero $\operatorname{Re} s > \sigma_c$.

Proprietà

La trasformata di Laplace $F(s)$ è una funzione analitica sul semipiano $\left\{ s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma_c \right\}$.



Esempio: **segnale gradino unitario** $1(t) := \begin{cases} 1 \ \text{ per } t \geq 0 \\ 0 \ \text{ per } t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_{0-}^{+\infty} 1(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{+\infty} = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=+\infty} - \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=0} = \frac{1}{s}$$

Calcolo corretto se $e^{-st} \to 0$ per $t \to +\infty$: vero per $\operatorname{Re} s > 0$ (σ_c =0).

Infatti $e^{-st} = e^{-(\sigma + j\omega)t} = e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}$.

$\mathcal{L}[1(t)] = \dfrac{1}{s}$ è ben definita ed analitica per $\operatorname{Re} s > 0$.

Utilizzando la continuazione analitica $\mathcal{L}[1(t)] = \dfrac{1}{s} \ \forall s \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Esempio: **segnale esponenziale** e^{at}

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_{0-}^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^{+\infty} =$$

$$= \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_{t=+\infty} - \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_{t=0} = \frac{1}{s-a}$$

$e^{-(s-a)t} \to 0$ per $t \to +\infty$ quando $\mathrm{Re}(s-a) > 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\, s > a$ ($\sigma_c = a$).

$\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$ è ben definita ed analitica per $\mathrm{Re}\, s > a$.

Utilizzando la continuazione analitica $\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a} \;\; \forall s \in \mathbb{C} - \{a\}$.

La trasformata è valida anche quando $a \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \;\; \forall s \in \mathbb{C} - \{a\}, \;\; \sigma_c = \mathrm{Re}\, a$$

Linearità

La trasformata di Laplace è un operatore lineare: per ogni segnale $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e per ogni scalare c_1 e c_2

$$\mathcal{L}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1 \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + c_2 \mathcal{L}\left[f_2(t)\right]$$

Dim.: è immediata conseguenza della linearità dell'integrale... □

Esempio

$$\mathcal{L}\left[4 + 6e^{-t}\right] = 4\mathcal{L}[1] + 6\mathcal{L}\left[e^{-t}\right] = 4\frac{1}{s} + 6\frac{1}{s-(-1)} = \frac{10s+4}{s(s+1)}$$

Iniettività

La trasformata di Laplace è iniettiva:

se $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \mathcal{L}\left[g(t)\right] \;\Rightarrow\; f(t) = g(t)$ su $[0, +\infty)$

- $F(s)$ determina univocamente $f(t)$ su $[0, +\infty)$. E' quindi ben definita la **trasformata inversa di Laplace** $\mathcal{L}^{-1}$.

Esempio (slide precedente)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10s+4}{s(s+1)}\right] = 4 + 6e^{-t}$$

In altre parole, l'unica funzione $f(t)$ tale che $F(s) = \dfrac{10s+4}{s(s+1)}$ è

$f(t) = 4 + 6e^{-t}$.

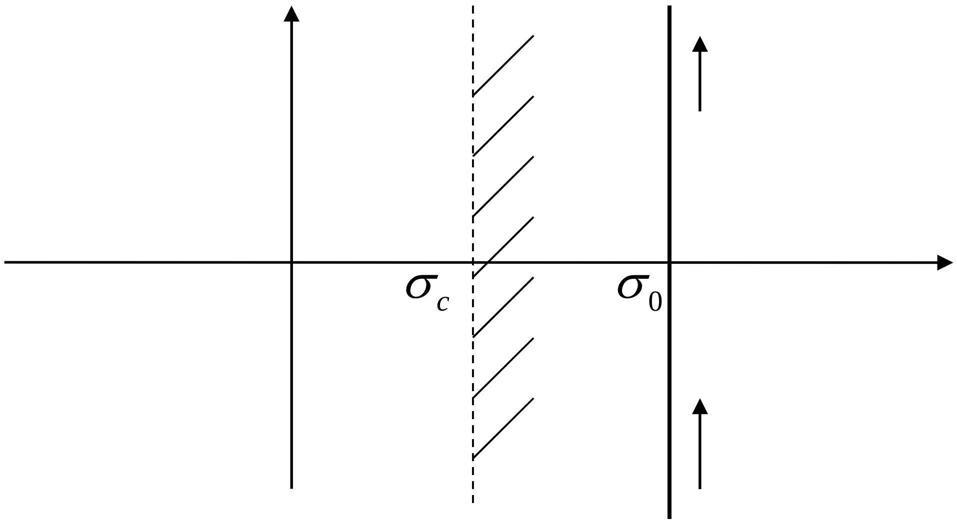
La trasformata inversa di Laplace

Sia $F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ allora

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

per ogni $\sigma_0>\sigma_c$.

- Si indica $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$.



La trasformata della derivata

Sia $f \in C^1\left(\mathbb{R}_+\right)$ segue

$$\mathcal{L}\left[Df(t)\right] = sF(s) - f(0+)$$

Dim.:

$$\int_{0-}^{+\infty} Df(t)e^{-st}dt = \int_{0+}^{+\infty} Df(t)e^{-st}dt = \left[f(t)e^{-st} \right]_{0+}^{+\infty} - \int_{0+}^{+\infty} f(t)(-se^{-st})dt =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-st} - \lim_{t\to 0+} f(t)e^{-st} + s\int_{0+}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-st} - f(0+) + sF(s)$$

Se $\operatorname{Re} s > \sigma_c$ (ascissa di convergenza di $f(t)$)

$$\Rightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-st} = 0 \qquad \square$$

derivate di ordine superiore

Sia $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ segue

$$\mathcal{L}\left[D^2 f\right] = \mathcal{L}\left[D(Df)\right] = s\mathcal{L}[Df] - Df(0+) =$$

$$= s\left(sF(s) - f(0+)\right) - Df(0+) =$$

$$= s^2 F(s) - sf(0+) - Df(0+)$$

generalizzando con ricorsione $\left[f \in C^i(\mathbb{R}_+)\right]$:

$D^i f_+ := D^i f(0+)$ con $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathcal{L}\left[D^i f\right] = s^i F(s) - s^{i-1} f_+ - s^{i-2} Df_+ - \ldots - sD^{i-2} f_+ - D^{i-1} f_+$$

$$\mathcal{L}\left[D^i f\right] = s^i F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} f_+$$

Trasformata dell'integrale

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(v)dv\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

Esempio

$$\mathcal{L}[t] = \mathcal{L}\left[\int_0^t 1 \cdot dv\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

si noti

$$\mathcal{L}[t] = \mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$$

Teorema del valore finale

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ con f e Df aventi ascisse di convergenza non positive. Se esiste il limite $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ vale

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Esempio

$$f(t) = 4 + 6e^{-t} \Rightarrow F(s) = \frac{10s+4}{s(s+1)}, \quad \sigma_c = 0$$

$$Df(t) = -6e^{-t} \Rightarrow \mathcal{L}\left[Df\right] = -6 \cdot \frac{1}{s+1}, \quad \sigma_c = -1$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{10s+4}{s+1} = 4$$

Teorema del valore iniziale

Se esiste il limite $\lim_{s\to+\infty} sF(s)$ vale

$$f(0+) = \lim_{s\to+\infty} sF(s)$$

Esempio

$$f(t) = 4 + 6e^{-t}, \quad F(s) = \frac{10s+4}{s(s+1)}$$

$$\lim_{s\to+\infty} sF(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{10s+4}{s+1} = 10 = f(0+)$$

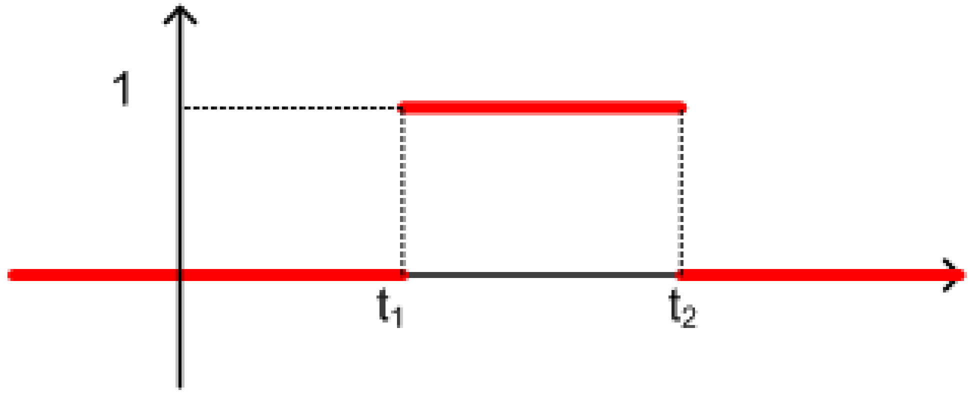
Traslazione nel tempo

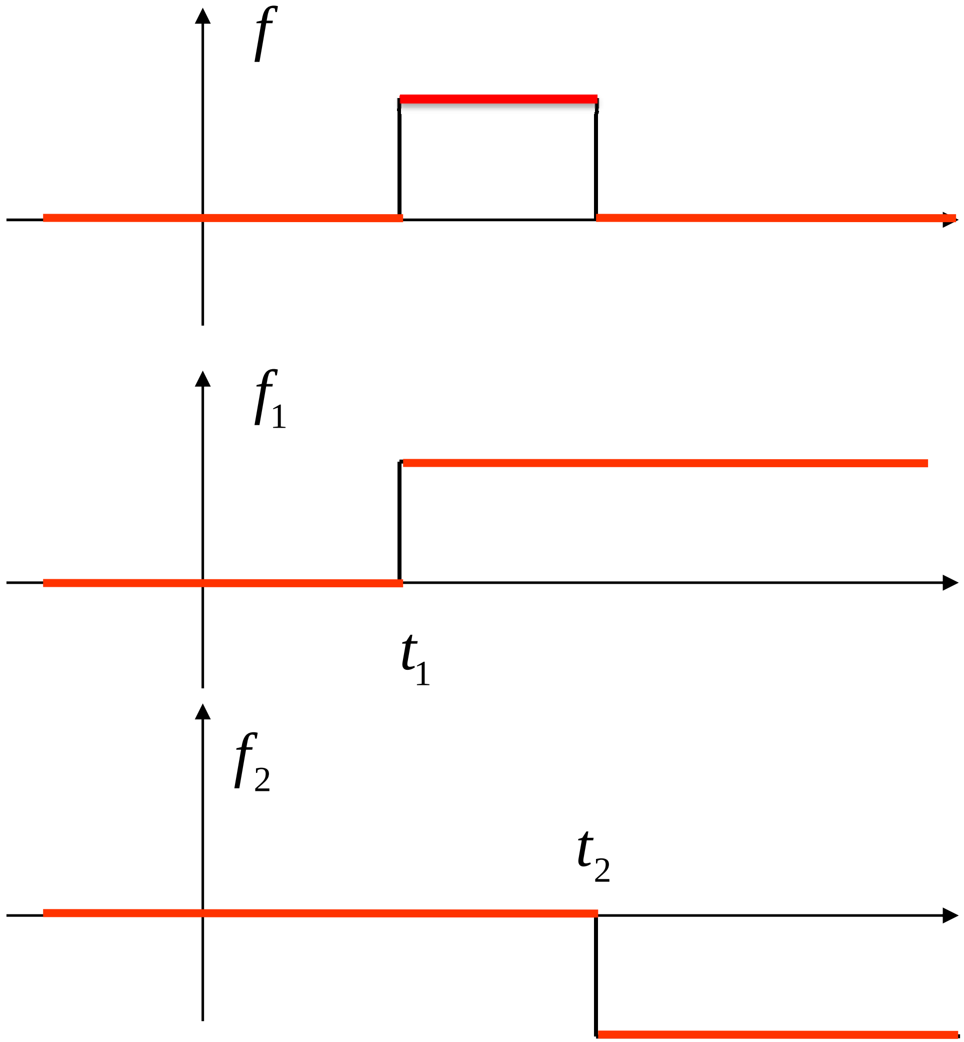
$$\text{Sia } f(t) = 0 \text{ per } t < 0,\ \forall t_0 \geq 0 \text{ vale}$$

$$\mathcal{L}\left[f(t - t_0) \right] = e^{-t_0 s} F(s)$$

Esempio

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \in [t_1, t_2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{con } 0 < t_1 < t_2 \quad \text{(impulso rettangolare)}$$





$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

$$f_1(t) := \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq t_1 \\ 0 & \text{per } t < t_1 \end{cases}$$

$$f_2(t) := \begin{cases} -1 & \text{per } t \geq t_2 \\ 0 & \text{per } t < t_2 \end{cases}$$

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

$$= \left(\frac{1}{s}\right) e^{-t_1 s} + \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-t_2 s}$$

$$= \frac{e^{-t_1 s} - e^{-t_2 s}}{s}$$

Traslazione nella variabile complessa (s)

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) vale

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s+a)$$

Dim.:

$$\int_{0-}^{+\infty} e^{-at} f(t) e^{-st} dt = \int_{0-}^{+\infty} f(t) e^{-(s+a)t} dt = F(s+a)$$

Esempio

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left[te^{at}\right] = \mathcal{L}\left[te^{-(-a)t}\right] = \frac{1}{\left(s+(-a)\right)^2} = \frac{1}{\left(s-a\right)^2}$$

$$\mathcal{L}\left[t^n e^{at}\right] = ?$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t v^{n-1}dv\right]=\frac{1}{s}\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right] \quad \text{(dal teorema dell'integrale)}$$

$$\int_0^t v^{n-1}dv=\left[\frac{v^n}{n}\right]_0^t=\frac{t^n}{n}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n}\right]=\frac{1}{s}\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left[t^n\right]=\frac{n}{s}\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right]$$

$$\mathcal{L}\left[t^n\right]=\frac{n}{s}\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right]=\frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\mathcal{L}\left[t^{n-2}\right]=\frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\mathcal{L}\left[t^{n-3}\right]=$$

$$=\frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{s}\mathcal{L}\left[t\right]=\frac{n!}{s^{n-1}}\cdot\mathcal{L}\left[t\right]=\frac{n!}{s^{n-1}}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\left[t^n e^{at}\right]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad \text{(dal teorema della traslazione in s)}$$

Teorema di convoluzione

Si abbia $f(t) = g(t) = 0$ per $t < 0$. La convoluzione dei segnali f e g, spesso indicata come $f * g$, è il segnale

$$\int_0^t f(v)g(t-v)dv$$

rappresentabile anche come $\left(f * g = g * f \right)$

$$\int_0^t g(v)f(t-v)dv.$$

La trasformata della convoluzione è

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(v)g(t-v)dv\right] = F(s)G(s).$$

...riprendiamo il problema:

Σ definito da $D^2 y(t) + 3Dy(t) + 2y(t) = u(t)$

Noto $u(t),\ t \geq 0$

e le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $Dy(0) = 1$

trovare $y(t),\ t \geq 0$?

Assumiamo che $u(t) \in C^0\left(\mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow$ Se $\left(u(t), y(t)\right) \in \mathcal{B} \Rightarrow y(t) \in C^2\left(\mathbb{R}\right)$

(il perchè lo vedremo più avanti nel corso)

Ne consegue che le condizioni iniziali sono funzioni continue per ogni $t \in \mathbb{R}$ (il problema è ben posto).

Applichiamo la trasformata di Laplace all'eq. differenziale:

$$\mathcal{L}\left(D^2 y(t) + 3Dy(t) + 2y(t)\right) = \mathcal{L}\left(u(t)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - Dy(0) + 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$s^2 Y(s) - s - 1 + 3\left(sY(s) - 1\right) + 2Y(s) = U(s)$$

$$\left(s^2 + 3s + 2\right)Y(s) - s - 4 = U(s)$$

$$\left(s^2 + 3s + 2\right)Y(s) = U(s) + s + 4$$

Eq. algebrica del primo ordine!

Soluzione nello spazio delle trasformate:

$$Y(s)=\frac{U(s)}{s^2+3s+2}+\frac{s+4}{s^2+3s+2}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{s^2+3s+2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2+3s+2}\right], \quad t\geq 0$$

$$\frac{s+4}{s^2+3s+2}=\frac{s+4}{(s+1)(s+2)}=\frac{a}{s+1}+\frac{b}{s+2}$$

$$s+4=a(s+2)+b(s+1)\Leftrightarrow s+4=(a+b)s+2a+b$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=4 \end{cases}\Rightarrow a=3, b=-2 \;\left(\text{vedremo un metodo più efficiente...}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2+3s+2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}-\frac{2}{s+2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right]$$

$$=3e^{-t}-2e^{-2t}$$

$$G(s):=\frac{1}{s^2+3s+2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{s^2+3s+2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)U(s)\right]$$

$$\frac{1}{s^2+3s+2}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \quad \Rightarrow \quad g(t):=\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right]=e^{-t}-e^{-2t}$$

dal teorema di convoluzione

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)U(s)\right]=\int_0^t\left(e^{-(t-v)}-e^{-2(t-v)}\right)u(v)dv$$

Si giunge alla soluzione ($t \geq 0$)

$$\boxed{y(t) = \int_0^t \left(e^{-(t-v)} - e^{-2(t-v)}\right)u(v)dv + 3e^{-t} - 2e^{-2t}}$$

L'espressione di $y(t)$ individuata è valida in realtà per ogni $t \in \mathbb{R}$ (può essere dimostrato con calcolo diretto!).

Interpretazione della soluzione...

Antitrasformazione delle funzioni razionali
(il caso dei poli semplici)

Dato $F(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$, funzione razionale strettamente propria $\left(\deg b(s) < \deg a(s)\right)$ con poli tutti semplici si determini

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right].$$

Siano $a(s)$ e $b(s)$ polinomi con coefficienti reali ed $n := \deg a(s)$.

Soluzione:

$$F(s) = \frac{b(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} \quad \text{con } p_i \neq p_j \text{ se } i \neq j.$$

idea: **sviluppo in fratti semplici** di $F(s)$

$\exists!\ k_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \ni$

$$F(s) = \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_2)} + \ldots + \frac{k_n}{(s-p_n)}$$

k_i è il residuo di $F(s)$ in p_i (perchè? ...)

Come calcolare i k_i ?

$$(s-p_1)F(s) = k_1 + \frac{k_2}{(s-p_2)}(s-p_1) + \ldots + \frac{k_n}{(s-p_n)}(s-p_1)$$

$$\Rightarrow\ k_1 = (s-p_1)F(s)\Big|_{s=p_1}$$

in generale $\quad k_i = (s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i} \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{k_n}{s-p_n}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_1}{s-p_1}\right] + \ldots + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_n}{s-p_n}\right] =$$

$$= k_1 e^{p_1 t} + \ldots + k_n e^{p_n t}$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{p_i t} \qquad \square$$

esempio

$$\frac{s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

$$k_1 = \left.\frac{s+4}{s+2}\right|_{s=-1} = 3 \qquad k_2 = \left.\frac{s+4}{s+1}\right|_{s=-2} = -2$$

I concetti introdotti dalla lezione:

- La trasformata di Laplace
- Linearità ed iniettività (invertibilità)
- La trasformata inversa di Laplace
- Teoremi: della derivata, dell'integrale, del valore finale, del valore iniziale, della traslazione nel tempo, della traslazione in s, di convoluzione.
- Antitrasformazione delle funzioni razionali nel caso dei poli semplici

Trasformate notevoli

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a}$$