Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Lezione n. 5 di Controlli Automatici A

prof. Aurelio Piazzi

Le funzioni impulsive e l'insieme dei behaviors

Università degli Studi di Parma – a.a. 2009-2010

Consideriamo un sistema dinamico Σ descritto da

$$Dy(t)+2y(t)=2Du(t)+2u(t)$$

ed assumiamo che per i tempi negativi sia

$$y(t)=e^{-2t} \quad \text{e} \quad u(t)=0 \quad \text{con} \quad t<0$$

Questa coppia di funzioni soddisfa l'eq. diff.:

$$Dy(t)=-2e^{-2t}$$

$$\Rightarrow \quad \left(-2e^{-2t}\right)+2\left(e^{-2t}\right)=0 \quad \forall t<0$$

Quindi:

$$\left(0,e^{-2t}\right)\Big|_{(-\infty,0)} \in \mathcal{B}$$

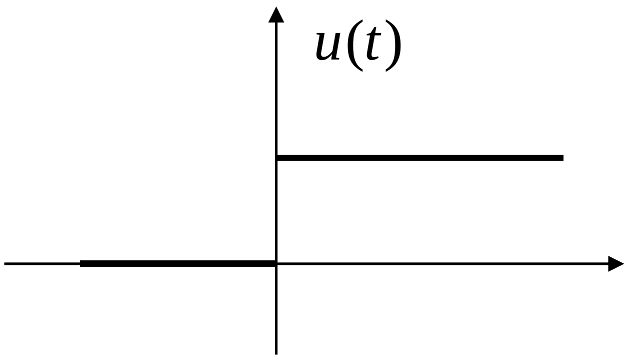
Introduciamo nel sistema una "azione forzante"

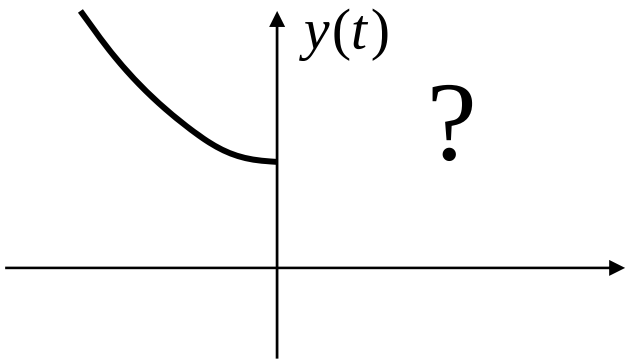
$$u(t) = 1 \quad \text{per } t \geq 0$$

Quindi $u(t) = 1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ $\big($è un gradino unitario$\big)$

Problema:

determinare $y(t)$ per $t \geq 0$





Condizioni iniziali:

$$u(0-)=0,\quad u(0+)=1,\quad y(0-)=1,\quad y(0+)=?$$

Se fosse noto $y_+ := y(0+)$ potremmo applicare la t. di Laplace:

$$sY(s)-y_+ + 2Y(s) = 2\big(sU(s)-u(0+)\big)+2U(s)$$

$$(s+2)Y(s)-y_+ = 2\big(sU(s)-1\big)+2U(s)$$

$$(s+2)Y(s) = (2s+2)U(s)+y_+ - 2$$

$$Y(s)=\frac{2s+2}{s+2}U(s)+\frac{y_+-2}{s+2};\qquad U(s)=\mathcal{L}\big[1(t)\big]=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{2s+2}{s+2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{y_+-2}{s+2}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2}+\frac{y_+-2}{s+2}$$

$$y(t)=1+e^{-2t}+(y_+-2)e^{-2t}\quad \text{per } t\geq 0$$

La coppia di funzioni:

$$u(t) = 1(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{cases} e^{-2t} & \text{per } t < 0 \\ 1 + e^{-2t} + (y_+ - 2)e^{-2t} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

soddisfa l'eq. differenziale

$$Dy + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

per qualunque valore del parametro y_+.

Non è quindi possibile definire l'insieme dei behaviours come

$$\mathcal{B} = \Big\{ \big(u(t), y(t)\big) \in PC^\infty : Dy + 2y = 2Du + 2u \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{t_1, t_2, \ldots\} \Big\}$$

Si osserva che

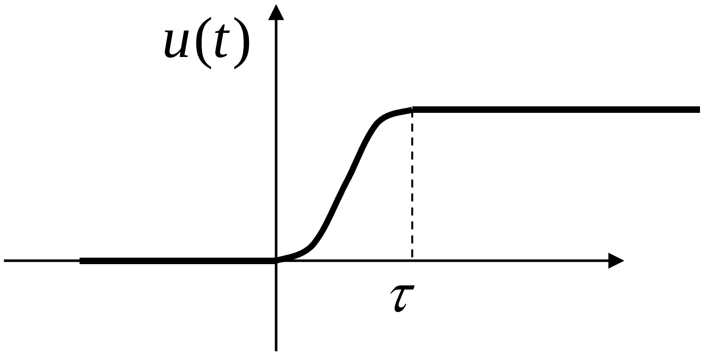
$$\left\{ \big(u(t), y(t)\big) \in C^{1,\infty} : Dy + 2y = 2Du + 2u \quad \forall t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{B}$$

Come risolvere l'impasse?

Idea: definisco l'azione forzante come

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 3\dfrac{t^2}{\tau^2} - 2\dfrac{t^3}{\tau^3} & \text{per } t \in [0, \tau) \\ 1 & \text{per } t \geq \tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(t) \in C^{1,\infty} \quad \forall \tau > 0$$



E' ragionevole ipotizzare $y(t) \in C^{1,\infty}$: $y(0-) = y(0+) = 1$

Posso quindi determinare $y(t)$ per $t > 0$ con le condizioni iniziali al tempo $0+$: $u(0+) = 0$ e $y(0+) = 1$.

Soluzione :

$$t \in [0,\tau):\ y(t) = 6\frac{t^2}{\tau^2} - 4\frac{t^3}{\tau^3} - 2e^{-2t}\int_0^t e^{2v}\left(3\frac{v^2}{\tau^2} - 2\frac{v^3}{\tau^3}\right)dv + e^{-2t}$$

$$t \geq \tau:\qquad y(t) = 1 + e^{-2t} - 2e^{-2t}\int_0^\tau e^{2v}\left(3\frac{v^2}{\tau^2} - 2\frac{v^3}{\tau^3}\right)dv + e^{-2(t-\tau)}$$

Si noti $y(0-) = y(0+)$ e $Dy(0-) = Dy(0+)$

$$y(\tau-) = y(\tau+) \text{ e } Dy(\tau-) = Dy(\tau+) \qquad \forall \tau > 0.$$

Quindi è verificato che $y(t) \in C^{1,\infty}$ ed inoltre la coppia $\big(u(t), y(t)\big)$ così definita soddisfa

$$Dy(t) + 2y(t) = 2Du(t) + 2u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \tau > 0.$$

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 3\dfrac{t^2}{\tau^2} - 2\dfrac{t^3}{\tau^3} & \text{per } t \in [0, \tau) \\ 1 & \text{per } t \geq \tau \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t < 0 \\ 6\dfrac{t^2}{\tau^2} - 4\dfrac{t^3}{\tau^3} - 2e^{-2t}\displaystyle\int_0^t e^{2v}\left(3\dfrac{v^2}{\tau^2} - 2\dfrac{v^3}{\tau^3}\right)dv + e^{-2t} & t \in [0, \tau) \\ 1 + e^{-2t} - 2e^{-2t}\displaystyle\int_0^\tau e^{2v}\left(3\dfrac{v^2}{\tau^2} - 2\dfrac{v^3}{\tau^3}\right)dv + e^{-2(t-\tau)} & t \geq \tau \end{cases}$$

Osserviamo che per $\tau \to 0+$

$$u(t) \to 1(t) \quad \text{e} \quad y(t) \to \begin{cases} e^{-2t} & \text{per } t < 0 \\ 1 + 2e^{-2t} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

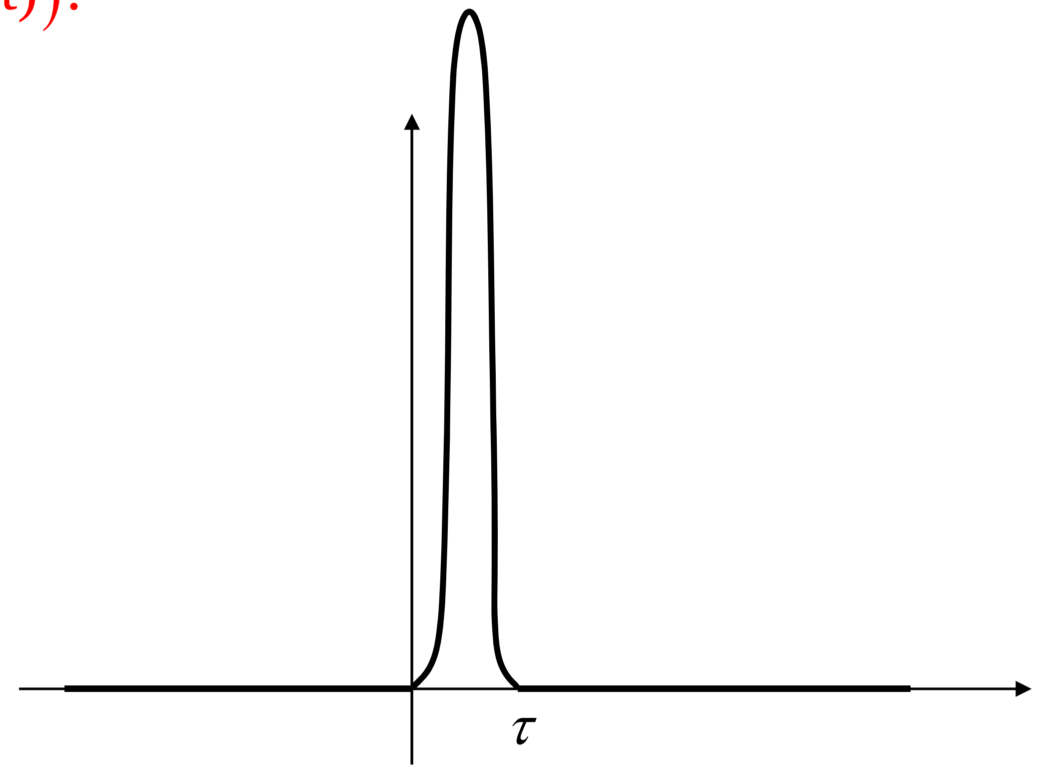
Da $\lim\limits_{t \to 0+} 1 + 2e^{-2t} = 3$ ovvero $y_+ = 3$.

Questa è la soluzione che vorremmo trovare subito senza utilizzare il metodo di *smoothing.*

Quando $\tau \to 0+ \quad Du(t)$ in un intorno dell'origine diverge all'infinito!

$$Du(t) = 6\frac{t}{\tau^2} - 6\frac{t^2}{\tau^3} \quad \text{per } t \in [0,\tau] \quad \Rightarrow \quad \max_{t\in[0,\tau]} Du(t) = Du(t)\Big|_{t=\frac{\tau}{2}} = \frac{3}{2\tau}$$

$Du(t)$ converge ad una "funzione" impulsiva (distribuzione) chiamata delta di Dirac $(\delta(\mathrm{t}))$.

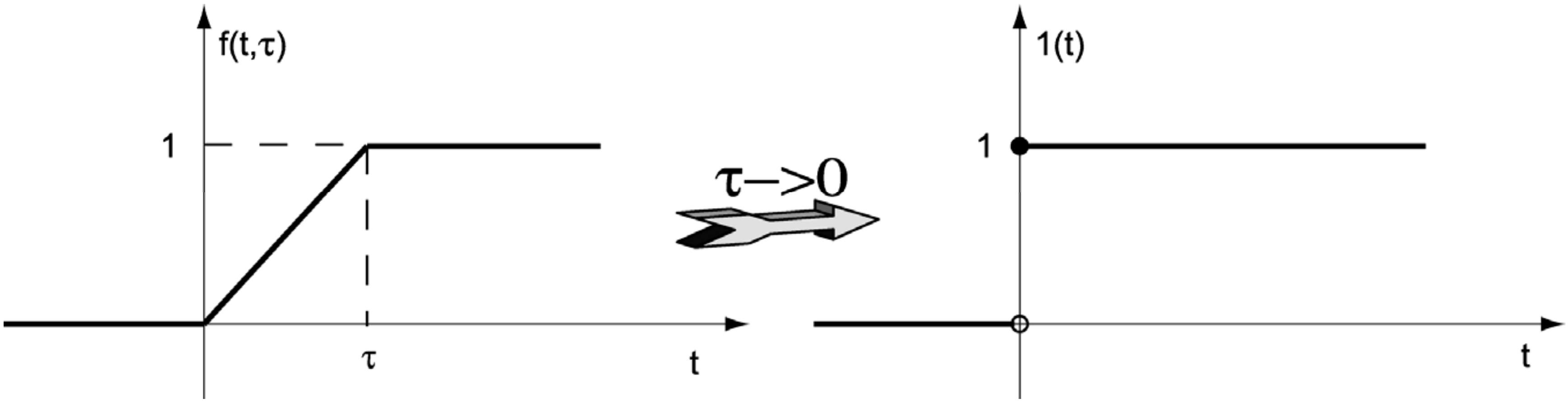


Cenni di teoria delle funzioni impulsive

Gradino unitario: $1(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

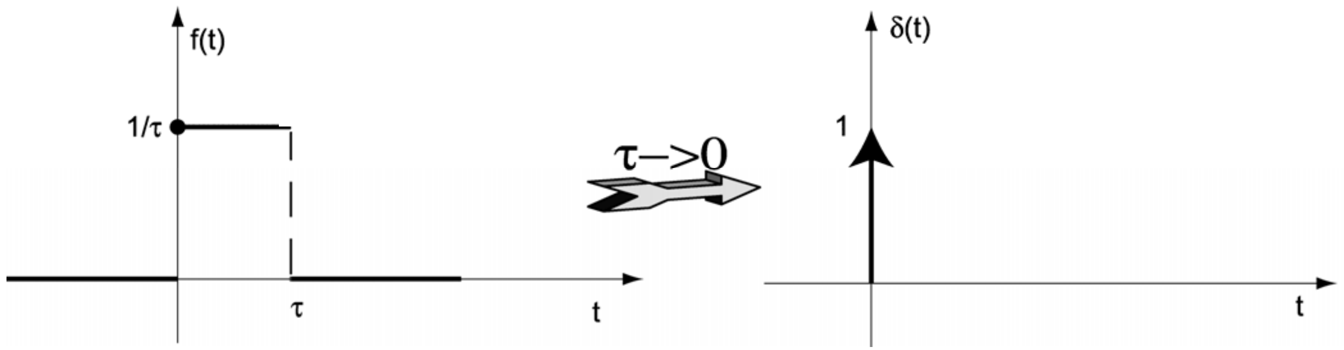
Introduciamo $f(t;\tau) \in C^{1,\infty}$: $\quad f(t;\tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{\tau}t & 0 \leq t \leq \tau \\ 1 & t > \tau \end{cases}$

$\lim_{\tau \to 0+} f(t;\tau) = 1(t)$



$$Df(t;\tau) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{\tau} & 0 \le t < \tau \\ 0 & t \ge \tau \end{cases}$$

Formalmente definiamo
$\delta(t) := \lim_{\tau \to 0+} Df(t;\tau)$
(è la delta di Dirac)



$\delta(t)$ è una distribuzione o, più informalmente, una funzione impulsiva.

- **Interpretazione di** $\delta(t)$

$\delta(t)$ è la **derivata generalizzata** del gradino unitario: $\delta(t) := D^* 1(t)$

D^* è l'operatore della derivata generalizzata: è un operatore lineare (come lo è D).

Più precisamente, D^* è la derivata (in senso) distribuzionale.

- Proprietà della delta di Dirac:

assumendo $t_a < T < t_b$:

$$\int_{t_a}^{t_b} \delta(t-T)dt = 1; \qquad \int_{t_a}^{t_b} f(t)\delta(t-T)dt = f(T)$$

- Introduciamo le derivate (generalizzate) di $\delta(t)$:

$D^{*i}\delta(t) \equiv$ derivata generalizzata di ordine i della delta di Dirac

$$\delta^{(i)}(t) := D^{*i}\delta(t)$$

Costruzione di $\delta^{(1)}(t)$ mediante limite di una funzione continua a tratti.

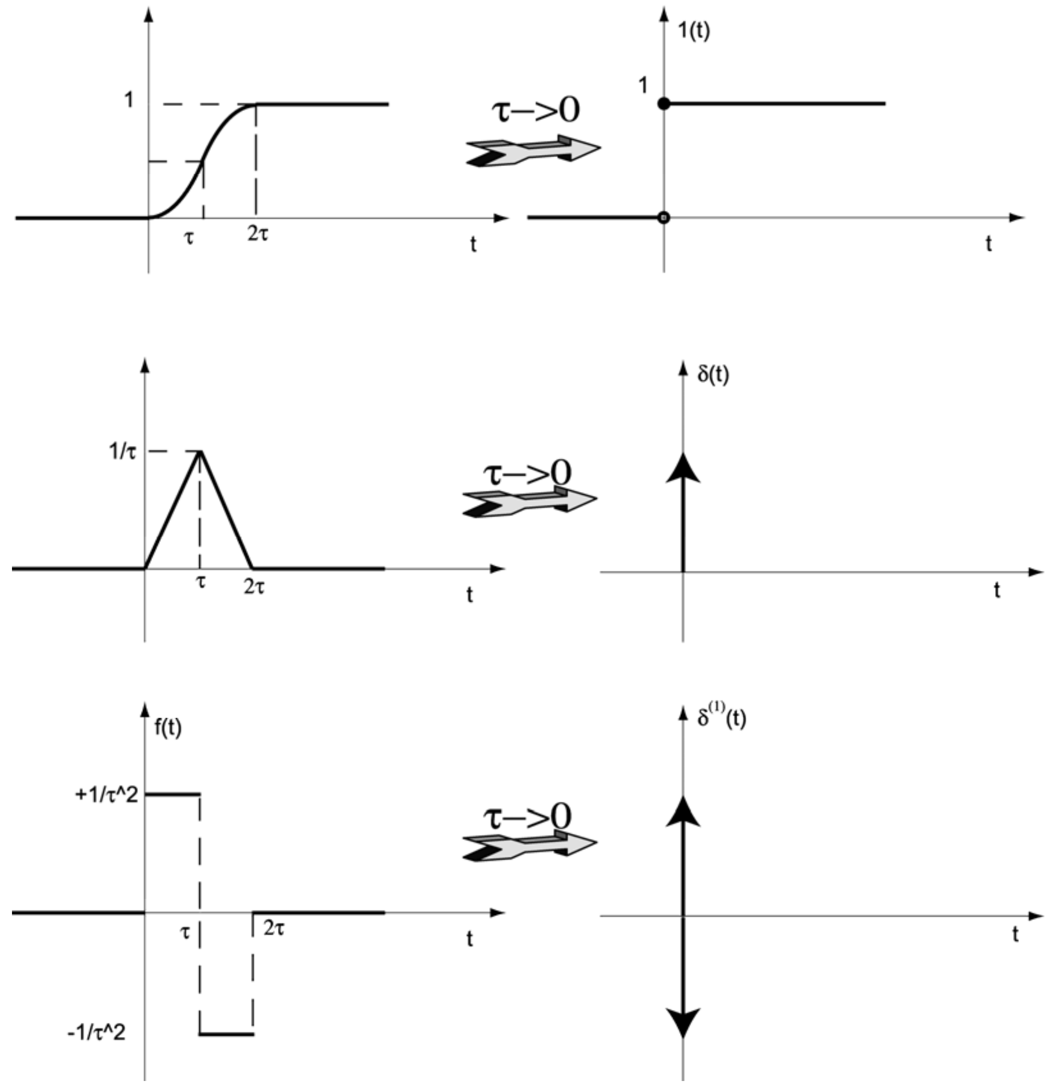
$$f(t;\tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{2\tau^2} t^2 & 0 \le t \le \tau \\ -\dfrac{1}{2\tau^2} t^2 + \dfrac{2}{\tau} t - 1 & \tau \le t \le 2\tau \\ 1 & t > 2\tau \end{cases} \quad ; \quad f(t;\tau) \in C^{1,\infty}$$

$$Df(t;\tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{\tau^2} t & 0 \le t \le \tau \\ -\dfrac{1}{\tau^2} t + \dfrac{2}{\tau} & \tau \le t \le 2\tau \\ 0 & t > 2\tau \end{cases} \qquad D^2 f(t;\tau) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{\tau^2} & 0 \le t \le \tau \\ -\dfrac{1}{\tau^2} & \tau \le t \le 2\tau \\ 0 & t > 2\tau \end{cases}$$

$$1(t) = \lim_{\tau \to 0+} f(t;\tau) \qquad \delta(t) := D^* 1(t) = \lim_{\tau \to 0+} Df(t;\tau)$$

$$\delta^{(1)}(t) := D^{*}\delta(t) = \lim_{\tau \to 0+} D^{2} f(t;\tau)$$

Questo metodo costruttivo si può estendere per mostrare il significato di $\delta^{(i)}(t),\ i > 1$.



- Derivate generalizzate del gradino unitario:

$$D^{*}1(t) = \delta(t)$$

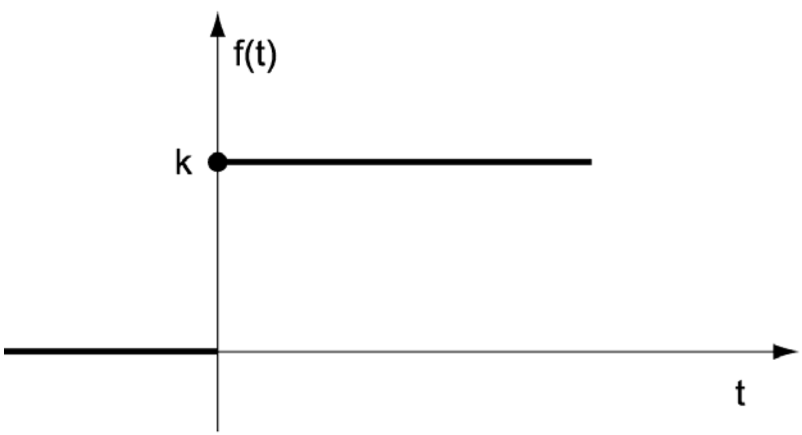
$$D^{*2}1(t) = D^{*}\left(D^{*}1(t)\right) = D^{*}\delta(t) = \delta^{(1)}(t)$$

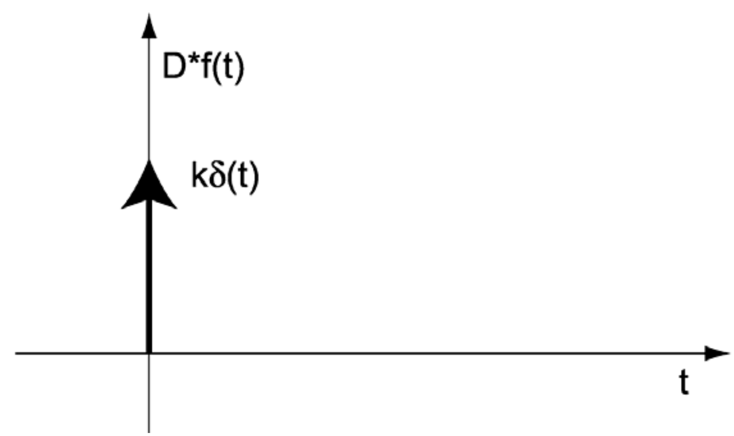
$$D^{*3}1(t) = D^{*}\left(D^{*2}1(t)\right) = D^{*}\delta^{(1)}(t) = \delta^{(2)}(t)$$

....

$$D^{*n}1(t) = \delta^{(n-1)}(t)$$

- Derivate generalizzate della funzione gradino $f(t) = k1(t)$





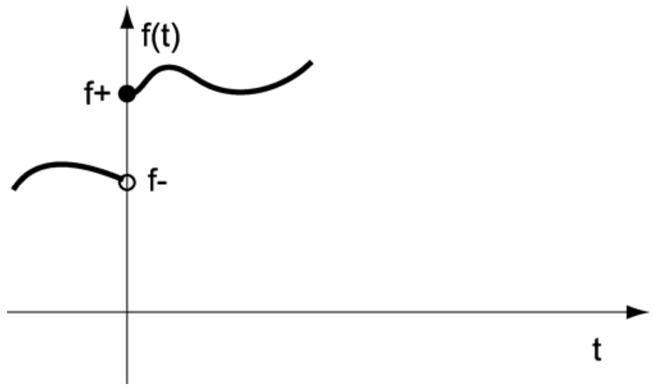
$$D^{*}\left(k1(t)\right)=kD^{*}\left(1(t)\right)=k\delta(t)$$
$$D^{*2}\left(k1(t)\right)=kD^{*2}\left(1(t)\right)=k\delta^{(1)}(t)$$
....
$$D^{*n}\left(k1(t)\right)=k\delta^{(n-1)}(t)$$

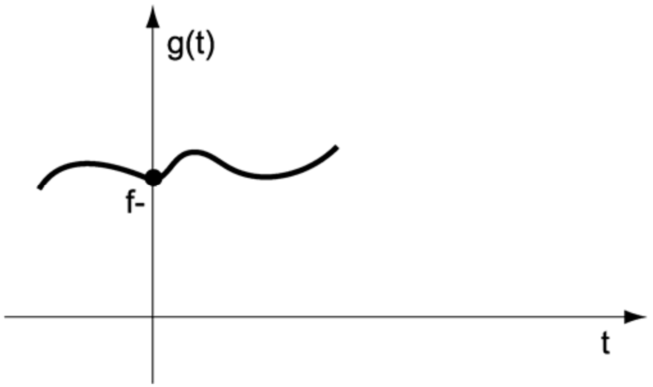
- **Derivate generalizzate di una funzione discontinua**

$f \in PC^{\infty}$ e sia $t=0$ il solo istante di discontinuità della f.

$$g(t):=\begin{cases} f(t) & t<0 \\ f(t)-\left(f_{+}-f_{-}\right) & t\geq 0 \end{cases} \quad ; \quad g(t)\in C^{0,\infty}$$

$$\Rightarrow g(t)=f(t)-\left(f_{+}-f_{-}\right)1(t)$$





Rappresentazione della funzione discontinua $f(t)$ (relazione di ordine zero):

$$f(t) = g(t) + \left(f_{+} - f_{-}\right)1(t)$$

ovvero

f. discontinua $=$ f. continua $+$ f. a gradino

Derivando in senso usuale $Df(t) = Dg(t)$ ed in $t = 0$ possiamo attribuire a $Df(t)$, ovvero a $Dg(t)$, il valore convenzionale Df_+.

Assunzione: la derivata generalizzata di una funzione continua sia la derivata usuale: $D^* g(t) := Dg(t)$

Applichiamo alla relazione di ordine zero l'operatore D^* :

$$D^* f(t) = D^* g(t) + D^* \left((f_+ - f_-) 1(t) \right)$$

$$D^* f(t) = Dg(t) + \left(f_+ - f_- \right) \delta(t)$$

$$D^* f(t) = Df(t) + \left(f_+ - f_- \right) \delta(t)$$

derivata gen. di ordine 1 = f. discontinua + f. impulsiva (di ordine 0)

$$D^* f(t) = Df(t) + \left(f_+ - f_-\right)\delta(t)$$

Se $t < 0$ o $t > 0$: $D^* f(t) = Df(t)$

Se $t = 0$: $D^* f(0) = Df(0) + \left(f_+ - f_-\right)\delta(0) = \left(f_+ - f_-\right)\delta(0)$

La funzione discontinua $Df(t)$ può essere scomposta nella somma di una funzione continua ed una funzione a gradino:

$$g_1(t) := Df(t) - \left(Df_+ - Df_-\right)1(t) \Rightarrow g_1(t) \in C^{0,\infty}$$

$$D^* f(t) = g_1(t) + \left(Df_+ - Df_-\right)1(t) + \left(f_+ - f_-\right)\delta(t)$$

d. generalizzata di ordine 1 = f. continua + f. a gradino + f. impulsiva di ordine 0

$g_1(t) = Df(t) - \left(Df_+ - Df_-\right)1(t)$ $\qquad$ $D^* f(t) = g_1(t) + \left(Df_+ - Df_-\right)1(t) + \left(f_+ - f_-\right)\delta(t)$

Applicando la derivata generalizzata alla relazione che esprime $D^* f(t)$:

$$D^{*2} f(t) = Dg_1(t) + \left(Df_+ - Df_-\right)\delta(t) + \left(f_+ - f_-\right)\delta^{(1)}(t)$$

Dalla definizione di $g_1(t)$: $Dg_1(t) = D^2 f(t)$

$$D^{*2} f(t) = D^2 f(t) + \left(Df_+ - Df_-\right)\delta(t) + \left(f_+ - f_-\right)\delta^{(1)}(t)$$

Se $t < 0$ o $t > 0$: $D^{*2} f(t) = D^2 f(t)$

Se $t = 0$: $D^{*2} f(0) = \left(Df_+ - Df_-\right)\delta(0) + \left(f_+ - f_-\right)\delta^{(1)}(0)$

$$g_2(t) := D^2 f(t) - \left(D^2 f_+ - D^2 f_-\right)1(t) \Rightarrow g_2(t) \in C^{0,\infty}$$

$$D^{*2} f(t) = g_2(t) + \left(D^2 f_+ - D^2 f_-\right)1(t) + \left(Df_+ - Df_-\right)\delta(t) + \left(f_+ - f_-\right)\delta^{(1)}(t)$$

[d. gen. di ord. 2 = f. cont. + f. a gradino + f. impul. di ord. 0 + f. impul. di ord. 1]

Iterando il ragionamento si ottiene:

$$D^{*n} f(t) = D^n f(t) + \left(D^{n-1} f_+ - D^{n-1} f_-\right)\delta(t) + \cdots + \left(f_+ - f_- \right)\delta^{(n-1)}(t)$$

Se $t < 0$ o $t > 0$: $D^{*n} f(t) = D^n f(t)$

Se $t = 0$: $D^{*n} f(0) = \left(D^{n-1} f_+ - D^{n-1} f_-\right)\delta(0) + \cdots + \left(f_+ - f_- \right)\delta^{(n-1)}(0)$

Più in generale: $f \in PC^{\infty}$ con $t_1, t_2, \ldots$ istanti di possibile discontinuità.

$$
\begin{aligned}
&D^{*n} f(t) = D^n f(t) + \\
&+\left(D^{n-1}(t_1+) - D^{n-1}(t_1-)\right)\delta(t-t_1) + \cdots + \left(f(t_1+) - f(t_1-)\right)\delta^{(n-1)}(t-t_1) + \\
&+\left(D^{n-1}(t_2+) - D^{n-1}(t_2-)\right)\delta(t-t_2) + \cdots + \left(f(t_2+) - f(t_2-)\right)\delta^{(n-1)}(t-t_2) + \\
&+\ldots
\end{aligned}
$$

$$D^{*n} f(t) = D^n f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{t_1, t_2, \ldots\}$$

$$D^{*n} f(t_1) = \left(D^{n-1}(t_1+) - D^{n-1}(t_1-)\right)\delta(0) + \cdots + \left(f(t_1+) - f(t_1-)\right)\delta^{(n-1)}(0)$$

$$D^{*n} f(t_2) = \left(D^{n-1}(t_2+) - D^{n-1}(t_2-)\right)\delta(0) + \cdots + \left(f(t_2+) - f(t_2-)\right)\delta^{(n-1)}(0)$$

$\ldots$

Principio di identità delle funzioni impulsive

Le funzioni impulsive

$$c_{-1} + c_0\delta(0) + c_1\delta^{(1)}(0) + \cdots + c_k\delta^{(k)}(0) \quad \text{e}$$

$$d_{-1} + d_0\delta(0) + d_1\delta^{(1)}(0) + \cdots + d_k\delta^{(k)}(0)$$

sono uguali fra loro se e solo se

$$c_0 = d_0,\ c_1 = d_1,\ \ldots,\ c_k = d_k$$

Esempi

$$7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) = 1 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) \quad \text{Vero}$$

$$7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) = 7 + 3\delta(0) + 4\delta^{(1)}(0) \quad \text{Falso}$$

$$7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) = 7 + 3\delta(0) + 9\delta^{(1)}(0) + 2\delta^{(2)}(0) \quad \text{Falso}$$

Ritorniamo all'esempio iniziale: l'eq. diff. di Σ interpretata in senso distribuzionale è

$$D^* y(t) + 2y(t) = 2D^* u(t) + 2u(t)$$

Deve essere soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ compresi gli istanti di discontinuità.

Per $t = 0$

$$\left[Dy_+ + (y_+ - y_-)\delta(0)\right] + 2y_+ = 2\left[Du_+ + (u_+ - u_-)\delta(0)\right] + 2u_+$$

$$Dy_+ + (y_+ - y_-)\delta(0) + 2y_+ = 2Du_+ + 2(u_+ - u_-)\delta(0) + 2u_+$$

$$y_+ - y_- = 2(u_+ - u_-)$$

$$\Rightarrow y_+ = y_- + 2(u_+ - u_-) = 1 + 2(1 - 0) = 3\ !$$

Insieme dei behaviors

Dato un sistema dinamico Σ descritto dall'eq. differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u$$

si definisce insieme dei behaviors di Σ

$$\mathcal{B} := \left\{ (u, y) \in PC^\infty \times PC^\infty \; : \; \sum_{i=0}^{n} a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^{*i} u \right\}$$

L'equazione differenziale è soddisfatta in senso distribuzionale per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Le condizioni iniziali associate a Σ al tempo $t = 0$ sono

$$y(0), Dy(0), \quad \dots \quad , D^{n-1} y(0)$$

$$u(0), Du(0), \quad \dots \quad , D^{m-1} u(0)$$

Se $t = 0$ è istante di discontinuità emergono le condizioni al tempo $0-$ e al tempo $0+$.

Le relazioni fra i valori al tempo $0-$

$$y_-, Dy_-, \quad \dots \quad , D^{n-1} y_-; \;\; u_-, Du_-, \quad \dots \quad , D^{m-1} u_-$$

e quelli al tempo $0+$

$$y_+, Dy_+, \quad \dots \quad , D^{n-1} y_+; \;\; u_+, Du_+, \quad \dots \quad , D^{m-1} u_+$$

sono determinabili uguagliando le espressioni impulsive dell'eq. differenziale al tempo $t = 0$.

Relazioni fra le condizioni iniziali in un istante di discontinuità $(\rho \geq 1)$

$$y_+ = y_- \;,\; Dy_+ = Dy_- \;,\; \ldots \;,\; D^{\rho-1}y_+ = D^{\rho-1}y_- \qquad [\rho = n-m]$$

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & & 0 \\ a_{n-1} & a_n & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{\rho+2} & & \ddots & a_n & 0 \\ a_{\rho+1} & a_{\rho+2} & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{\rho}y_+ - D^{\rho}y_- \\ D^{\rho+1}y_+ - D^{\rho+1}y_- \\ \vdots \\ \\ D^{n-1}y_+ - D^{n-1}y_- \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_m & 0 & \cdots & & 0 \\ b_{m-1} & b_m & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ b_2 & & \ddots & b_m & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_- \\ \vdots \\ \\ D^{m-1}u_+ - D^{m-1}u_- \end{bmatrix}$$

Relazioni fra le condizioni iniziali in un istante di discontinuità $(\rho = 0)$

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & & 0 \\ a_{n-1} & a_n & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_2 & & \ddots & a_n & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_+ - y_- \\ Dy_+ - Dy_- \\ \vdots \\ \\ D^{n-1}y_+ - D^{n-1}y_- \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_n & 0 & \cdots & & 0 \\ b_{n-1} & b_n & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ b_2 & & \ddots & b_n & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_- \\ \vdots \\ \\ D^{n-1}u_+ - D^{n-1}u_- \end{bmatrix}$$

$$\overline{C^{l,\infty}} := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \in C^{l,\infty} \wedge f \notin C^{l+1,\infty} \right\}$$

Proprietà - Sia $\left(u(t), y(t)\right) \in \mathcal{B}$ con $u(t)$ funzione discontinua.

Se $\rho = 0$ allora anche l'uscita $y(t)$ è una funzione discontinua.

Se $\rho \geq 1$ allora $y(t) \in \overline{C^{\rho-1,\infty}}$.

Dim.: Caso $\rho = 0 \Rightarrow a_n(y_+ - y_-) = b_n(u_+ - u_-)$ ...

Caso $\rho \geq 1 \Rightarrow y_+ = y_-$, $Dy_+ = Dy_-$, ... , $D^{\rho-1}y_+ = D^{\rho-1}y_-$ ... $\square$

Proprietà - relazione fra i gradi di continuità dell'ingresso e dell'uscita

Sia $\left(u(t), y(t)\right) \in \mathcal{B}$ e $p \in \mathbb{N}$. Allora

$$u(t) \in C^{p,\infty} \Leftrightarrow y(t) \in C^{\rho+p,\infty}, \qquad u(t) \in \overline{C^{p,\infty}} \Leftrightarrow y(t) \in \overline{C^{\rho+p,\infty}}$$

Dim. (cenno)**:**

Se $p = 0$ occorre provare $u(t) \in C^{0,\infty} \Leftrightarrow y(t) \in C^{\rho,\infty}$ e $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \Leftrightarrow y(t) \in \overline{C^{\rho,\infty}}$

$$a_n\left(D^{\rho}y_+ - D^{\rho}y_-\right) = b_m\left(u_+ - u_-\right)$$

$$a_{n-1}\left(D^{\rho}y_+ - D^{\rho}y_-\right) + a_n\left(D^{\rho+1}y_+ - D^{\rho+1}y_-\right) = b_{m-1}\left(u_+ - u_-\right) + b_m\left(Du_+ - Du_-\right) \ \dots \ \square$$

Un cenno storico sulle funzioni impulsive

Heaviside (1893) – calcolo operazionale

van der Pol (1929) – introduce il termine “funzione impulsiva”

Dirac (1930) – introduce la “delta”

Sobolev (1936) – concetto di “soluzione debole”

Schwartz (1951) – sistemazione rigorosa dell’argomento: teoria delle **distribuzioni**.

I concetti introdotti dalla lezione:

- Il problema delle funzioni discontinue ed il metodo di smoothing
- Introduzione euristica alle funzioni impulsive
- Derivata generalizzata (distribuzionale) di una funzione derivabile a tratti
- Definizione distribuzionale dell’insieme dei behaviors
- Relazioni fra le condizioni iniziali in un istante di discontinuità
- Relazione fra i gradi di continuità dei segnali di ingresso e di uscita