Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Lezione n. 6 di Controlli Automatici A

prof. Aurelio Piazzi

La funzione di trasferimento

Università degli Studi di Parma – a.a. 2009-2010

Spazio delle **sequenze impulsive**:

$$\mathcal{I}^* \triangleq \left\{ d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* : d(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{r_i} c_{ij} \delta^{(j)}\left(t - t_i\right),\ c_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Estensione distribuzionale delle funzioni derivabili

a tratti: $PC^{\infty *} \triangleq PC^{\infty} + \mathcal{I}^*$

Esempi :

$$d(t) = 7\delta(t) + 4\delta^{(1)}(t) + 32\delta(t-10) + 2\delta^{(2)}(t-10) \in \mathcal{I}^*$$

$$f(t) = 1(t) + 2t \cdot 1(t-5) \in PC^{\infty}$$

$$D^* f(t) = \delta(t) + 2 \cdot 1(t-5) + 10\delta(t-5) \in PC^{\infty *}$$

$$D^{*2} f(t) = \delta^{(1)}(t) + 2\delta(t-5) + 10\delta^{(1)}(t-5) \in \mathcal{I}^* \subset PC^{\infty *}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] \triangleq \int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \lim_{t_a \to 0-} \lim_{t_b \to +\infty} \int_{t_a}^{t_b} f(t)e^{-st}dt$$

Esempi di trasformate di Laplace di funzioni impulsive :

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0-}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s\cdot 0} = 1$$

$$\mathcal{L}\left[\delta^{(1)}(t)\right] = \int_{0-}^{+\infty} \delta^{(1)}(t)e^{-st}dt = \left[\delta(t)e^{-st}\right]_{0-}^{+\infty} - \int_{0-}^{+\infty} \delta(t)\left(-se^{-st}\right)dt = s$$

$$\mathcal{L}\left[\delta(t) + 2\delta^{(1)}(t) + 9\delta^{(2)}(t)\right] = 1 + 2s + 9s^2$$

$$\mathcal{L}\left[7t^3 + \delta(t)\right] = 7\frac{3!}{s^4} + 1 = \frac{s^4 + 42}{s^4}$$

$$\mathcal{L}\left[te^{-3t} + \delta(t-2)\right] = \frac{1}{(s+3)^2} + e^{-2s}$$

La trasformata della derivata generalizzata

Sia $f \in PC^{\infty}\left(PC^{\infty *}\right)$ segue

$$\mathcal{L}\left[D^* f(t)\right] = sF(s) - f(0-)$$

Dim.:

Per semplicità si abbia un solo istante di discontinuità in $t = 0$:

$$D^* f(t) = Df(t) + \left(f_+ - f_-\right)\delta(t)$$

$$\mathcal{L}\left[D^* f(t)\right] = \mathcal{L}\left[Df(t)\right] + \left(f_+ - f_-\right)\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]$$

$$= sF(s) - f_+ + \left(f_+ - f_-\right) \qquad \square$$

derivate generalizzate di ordine superiore

$$\mathcal{L}\left[D^{*2} f\right] = \mathcal{L}\left[D^{*}\left(D^{*} f\right)\right] = s\mathcal{L}\left[D^{*} f\right] - D^{*} f(0-) =$$

$$= s\left(sF(s) - f(0-)\right) - Df(0-) =$$

$$= s^{2}F(s) - sf(0-) - Df(0-)$$

generalizzando:

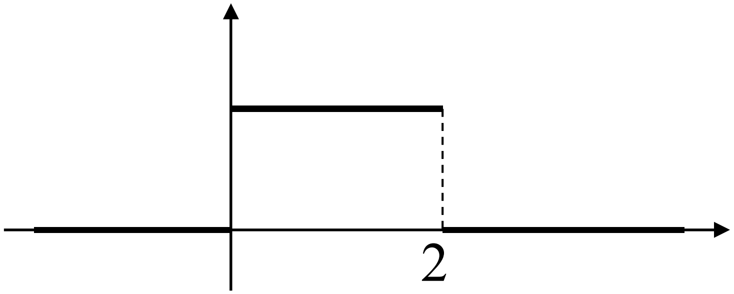
$$D^{i} f_{-} := D^{i} f(0-) \quad \text{con } i = 0,1,2,\ldots$$

$$\mathcal{L}\left[D^{*i} f\right] = s^{i}F(s) - s^{i-1} f_{-} - s^{i-2} Df_{-} - \ldots - sD^{i-2} f_{-} - D^{i-1} f_{-}$$

$$\mathcal{L}\left[D^{*i} f\right] = s^{i}F(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^{j} D^{i-1-j} f_{-}$$

Esempi:

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{per } 0\le t<2\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$



$$f(t)=1(t)-1(t-2)$$

$$\mathcal{L}\left[D^* f\right]=sF(s)-f(0-)=s\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-2s}\right)=1-e^{-2s}$$

con calcolo diretto: $\mathcal{L}\left[D^* f\right]=\mathcal{L}\left[\delta(t)-\delta(t-2)\right]=1-e^{-2s}$

$$\mathcal{L}\left[\delta^{(1)}(t)\right]=\mathcal{L}\left[D^*\delta(t)\right]=s\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]-\delta(0-)=s\cdot 1-0=s$$

$$\mathcal{L}\left[\delta^{(2)}(t)\right]=\mathcal{L}\left[D^{*2}\delta(t)\right]=s^2\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]-s\delta(0-)-\delta^{(1)}(0-)=s^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\delta^{(i)}(t)\right]=s^i,\quad i\in\mathbb{N}$$

Estensione dell'insieme dei behaviors

Dato un sistema dinamico Σ descritto dall'eq. differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u$$

si definisce **estensione impulsiva** dei behaviors di Σ

$$\mathcal{B}^* := \left\{ \left(u, y\right) \in PC^{\infty *} \times PC^{\infty *} \; : \sum_{i=0}^{n} a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^{*i} u \right\}$$

Ancora l'equazione differenziale è soddisfatta in senso distribuzionale per ogni $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$$

Proprietà

Sia $(u, y) \in \mathcal{B}^*$, segue $\left(D^* u, D^* y\right) \in \mathcal{B}^*$.

Dim.:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^{*i} u$$

Applico l'operatore D^* ad entrambi i membri dell'eq.:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{*i+1} y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^{*i+1} u$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{*i} \left(D^* y\right) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^{*i} \left(D^* u\right) \qquad \square$$

Def.:

Un segnale di ingresso $u(t) \not\equiv 0$ per $t > 0$ è detto **azione forzante** $\left(\text{su } \Sigma\right)$.

Sia $\left(u, y\right) \in \mathcal{B}$ con $u(t)$ azione forzante e con condizioni iniziali al tempo $t = 0-$ tutte nulle:

$y_- = 0, Dy_- = 0, \cdots, D^{n-1}y_- = 0$ e $u_- = 0, Du_- = 0, \cdots, D^{m-1}u_- = 0$

Il segnale $y(t)$ per $t > 0$ è detto **risposta (evoluzione) forzata** $\left(\text{di } \Sigma\right)$.

Proprietà (della coppia azione forzante - risposta forzata)

Sia $\left(u, y\right) \in \mathcal{B}^*$ con $u(t)$ azione forzante ed $y(t)$ risposta forzata. Segue

$$\left(\int_{0-}^{t} u(v)dv, \int_{0-}^{t} y(v)dv \right) \in \mathcal{B}^*$$

Dim.:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{*i} y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^{*i} u(t)$$

Applico l'operatore $\int_{0-}^{t}$ ad entrambi i membri dell'eq.:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \int_{0-}^{t} D^{*i} y(v)dv = \sum_{i=0}^{m} b_i \int_{0-}^{t} D^{*i} u(v)dv$$

$$\int_{0-}^{t} D^{*i} y(v)dv = \int_{0-}^{t} D^{*} \left(D^{*i-1} y(v) \right) dv = \left[D^{*i-1} y(v) \right]_{0-}^{t}$$

$$= D^{*i-1} y(t) - D^{*i-1} y(0-) = D^{*i-1} y(t) - D^{i-1} y(0-) = D^{*i-1} y(t)$$

analogamente $\int_{0-}^{t} D^{*i} u(v)dv = D^{*i-1} u(t)$

Dim. (continua) **:**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i D^{*i-1} y(t) + a_0 \int_{0-}^{t} y(v)dv = \sum_{i=1}^{m} b_i D^{*i-1} u(t) + b_0 \int_{0-}^{t} u(v)dv$$

valgono $y(t) = D^{*}\left(\int_{0-}^{t} y(v)dv\right)$, $u(t) = D^{*}\left(\int_{0-}^{t} u(v)dv\right)$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i D^{*i}\left(\int_{0-}^{t} y(v)dv\right) + a_0 \int_{0-}^{t} y(v)dv = \sum_{i=1}^{m} b_i D^{*i}\left(\int_{0-}^{t} u(v)dv\right) + b_0 \int_{0-}^{t} u(v)dv$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{*i}\left(\int_{0-}^{t} y(v)dv\right) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^{*i}\left(\int_{0-}^{t} u(v)dv\right) \qquad \square$$

Il problema fondamentale dell'analisi nel dominio del tempo di un sistema Σ

Note le condizioni iniziali al tempo $0-$

$$y_-, Dy_-, \ldots, D^{n-1} y_- \ \text{ e } \ u_-, Du_-, \ldots, D^{m-1} u_-$$

e l'azione forzante $u(t),\ t \geq 0$

determinare la risposta $y(t),\ t \geq 0.$

Soluzione dell'equazione differenziale

I segnali $u(t)$ e $y(t)$ soddisfano in senso distribuzionale l'equazione differenziale di Σ:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{*i} y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^{*i} u(t)$$

Applichiamo all'equazione la trasformata di L.:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{L}\left[D^{*i} y(t) \right] = \sum_{i=0}^{m} b_i \mathcal{L}\left[D^{*i} u(t) \right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{L}\left[D^{*i} y(t) \right] + a_0 Y(s) = \sum_{i=1}^{m} b_i \mathcal{L}\left[D^{*i} u(t) \right] + b_0 U(s)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(s^i Y(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} y_- \right) + a_0 Y(s) = \sum_{i=1}^{m} b_i \left(s^i U(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j D^{i-1-j} u_- \right) + b_0 U(s)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i s^i \right) Y(s) - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} D^{i-1-j} y_- \; s^j = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i s^i \right) U(s) - \sum_{i=1}^{m} b_i \sum_{j=0}^{i-1} D^{i-1-j} u_- \; s^j$$

$$Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} U(s) + \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_- \; s^j - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_- \; s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

$$Y_{\text{for.}}(s) := \mathcal{L}\left[y_{\text{for.}}(t)\right] := \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} U(s)$$

$$Y_{\text{lib.}}(s) := \mathcal{L}\left[y_{\text{lib.}}(t)\right] := \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_{-} \, s^j - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_{-} \, s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

$$Y(s) = Y_{\text{for.}}(s) + Y_{\text{lib.}}(s)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = y_{\text{for.}}(t) + y_{\text{lib.}}(t), \quad t \geq 0$$

$y_{\text{for.}}(t)$ è la risposta forzata di Σ all'azione forzante

$y_{\text{lib.}}(t)$ è definita quale **risposta (evoluzione) libera** di Σ

Def. - Funzione di Trasferimento

Si definisce f.d.t. di un sistema la funzione di variabile complessa $G(s)$ per la quale è valida la relazione

$$\mathcal{L}\left[y(t)\right] = G(s)\mathcal{L}\left[u(t)\right]$$

$\forall \ \left(u(t), y(t)\right) \in \mathcal{B}$ con $u(t) = 0, y(t) = 0$ per $t < 0$.

Proprietà : La f.d.t. del sistema dinamico Σ introdotto è

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \quad \left(=: \frac{b(s)}{a(s)} \right)$$

E' un modello matematico alternativo all'eq. diff.

Se le condizioni iniziali sono tutte nulle (sistema in quiete per $t = 0-$) :

$Y(s) = G(s)U(s)$

$Y_{\text{for.}}(s) = G(s)U(s)$ (trasformata della risposta forzata)

Sia $g(t) := \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right]$ $(g(t) = 0,\ t < 0)$: $g(t)$ è la **risposta all'impulso** a partire da una condizione di quiete: $\left(\delta(t), g(t)\right) \in \mathcal{B}^*$

Dal teorema di convoluzione:

$$y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t g(t-v)u(v)dv \quad \text{od anche} \quad y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t u(t-v)g(v)dv$$

Soluzione generale dell'equazione differenziale $(t \geq 0)$

$$y(t) = \int_0^t g(t-v)u(v)dv + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} a_i D^{i-1-j} y_-\, s^j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{i-1} b_i D^{i-1-j} u_-\, s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right]$$

Esempio: riprendiamo il sistema Σ descritto da

$$Dy(t)+2y(t)=2Du(t)+2u(t)$$

con $y(t)=e^{-2t},\ \ t<0$ e $u(t)=1(t)$

Determinare $y(t),\ t\geq 0.$

Condizioni iniziali al tempo $0-:\ y_{-}=1,\ u_{-}=0$

$$D^{*}y(t)+2y(t)=2D^{*}u(t)+2u(t)$$

applichiamo $\mathcal{L}\left[\cdot\right]$:

$$\left(sY(s)-y_{-}\right)+2Y(s)=2\left(sU(s)-u_{-}\right)+2U(s)$$

$$(s+2)Y(s)=(2s+2)U(s)+y_{-}-2u_{-}$$

$$Y(s) = \frac{2s+2}{s+2}U(s) + \frac{y_- - 2u_-}{s+2}$$

$G(s) = \dfrac{2s+2}{s+2}$ è la funzione di trasferimento

$\dfrac{y_- - 2u_-}{s+2}$ è la trasformata di Laplace della risposta libera

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[2 - \frac{2}{s+2}\right] = 2\delta(t) - 2e^{-2t}$$

$$y(t) = \int_0^t \left(2\delta(t-v) - 2e^{-2(t-v)}\right)u(v)dv + (y_- - 2u_-)e^{-2t}$$

$u(t) = 1(t)$ e $y_- = 1,\ u_- = 0$

$$y(t) = \int_0^t \left(2\delta(t-v) - 2e^{-2(t-v)}\right)dv + e^{-2t}$$

$$= \left(2 - 2\int_0^t e^{-2(t-v)}dv\right) + e^{-2t} = \left(2 - \left(1 - e^{-2t}\right)\right) + e^{-2t}$$

$$= \left(1 + e^{-2t}\right) + e^{-2t} = 1 + 2e^{-2t}$$

Quando $U(s)$ è una funzione razionale è normalmente più conveniente antitrasformare direttamente $Y_{\text{for.}}(s)$ e $Y_{\text{lib.}}(s)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+2}{s+2} \cdot \frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$\rho := n - m$

• **Def. :** Un sistema Σ si dice ***(strettamente) proprio*** se la sua funzione di trasferimento è ***(strettamente) propria***.

Quindi:

Se $n \geq m$ $(\rho \geq 0)$ $\leftrightarrow$ Σ proprio; se $n > m$ $(\rho \geq 1)$ $\leftrightarrow$ Σ strettamente proprio.

• **Def. (guadagno statico di Σ)**

É il rapporto fra il valore costante dell'uscita e il valore costante dell'ingresso ($\neq 0$) quando Σ è all'equilibrio:

$$K := \frac{y_c}{u_c} \quad \text{con} \quad (u_c, y_c) \in \mathcal{B} \ \text{ e } \ u_c \neq 0$$

Dall'equazione diff. si deduce: $K = \dfrac{b_0}{a_0} \qquad \Rightarrow \qquad K = G(0)$

Def. (Polinomio Caratteristico di Σ)

Dato il sistema Σ descritto dall'eq. diff. $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u,$

il polinomio $a(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$ è detto polinomio caratteristico di Σ.

Nota: È il polinomio a denominatore della f.d.t. G(s).

Def. - poli e zeri di Σ

Sono i poli e gli zeri della f.d.t. $G(s)$ di Σ.

Normalmente i poli sono le radici di $a(s) = 0$ ma ...

Se $G(s) = \dfrac{s^2 + 5s + 4}{(s+1)(s+2)(s+3)^2}$

$\Rightarrow$ { zeri di Σ } $= \{-4\}$, { poli di Σ } $= \{-2, -3, -3\}$

- **Def.** (**modi del sistema dinamico Σ**)

Sono le funzioni “tipiche” associate ai poli di Σ secondo la regola:

Se p è un polo reale di molteplicità h :

$$e^{pt}, te^{pt}, \cdots, t^{h-1}e^{pt}$$

Se σ ± j ω è una coppia di poli complessi coniugati di molteplicità h:

$$e^{\sigma t}\text{sen}(\omega t+\varphi_1), te^{\sigma t}\text{sen}(\omega t+\varphi_2), \cdots, t^{h-1}e^{\sigma t}\text{sen}(\omega t+\varphi_h)$$

Esempio:

$$G(s)=\frac{(s+1)(s^2+2s+7)}{(s+4)^3(s+5)[(s+1)^2+4]^2}$$

$$\left\{\text{modi di } \Sigma\right\}=\left\{e^{-4t}, te^{-4t}, t^2e^{-4t}, e^{-5t},\ e^{-t}\text{sen}(2t+\varphi_1),\ te^{-t}\text{sen}(2t+\varphi_2)\right\}$$

• **Proprietà (risposta libera e modi di Σ)**

Sia Σ un sistema per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico (a(s) e b(s) sono coprimi fra loro). Allora la risposta libera è una combinazione lineare dei suoi modi.

Dim.:

$$L\left[y_{\text{lib.}}(s)\right]=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}a_i D^{i-1-j}y_{-}\, s^j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{i-1}b_i D^{i-1-j}u_{-}\, s^j}{a(s)}$$

Il numeratore è un polinomio di grado ≤ n – 1 dipendente dalle c.i.

Dall'assunzione fatta i modi di Σ sono associati alle radici di a(s) = 0 . Quindi dallo sviluppo in fratti semplici segue la tesi … □

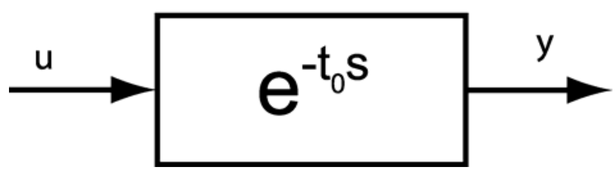
Nota: {poli di Σ} ⊆ {radici del pol. carat. di Σ}

{poli di Σ} = {radici del pol. carat. di Σ} se a(s) e b(s) sono coprimi.

• Non tutti i sistemi dinamici lineari e stazionari sono caratterizzati da f.d.t. razionali.

Esempio: il sistema denominato ***"ritardo finito".*** Se u(t) è il segnale all'ingresso, il segnale all'uscita è y(t) = u(t-t_0) dove t_0 è il tempo di ritardo.

$$\mathcal{L}\left[y(t)\right]=\mathcal{L}\left[u(t-t_0)\right]=\mathcal{L}\left[u(t)\right]e^{-t_0 s} \quad \Rightarrow \quad G(s)=e^{-t_0 s}$$



In generale, i sistemi dinamici lineari e stazionari retti da eq. diff. alle derivate parziali hanno f.d.t. trascendenti (non razionali).

Segnali tipici per l'ingresso di Σ :

$\delta(t)$ impulso unitario (delta di Dirac) $\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1$

$1(t)$ gradino unitario $\mathcal{L}\left[1(t)\right] = \frac{1}{s}$

$t \cdot 1(t)$ rampa unitaria $\mathcal{L}\left[t \cdot 1(t)\right] = \frac{1}{s^2}$

$\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$ parabola unitaria $\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)\right] = \frac{1}{s^3}$

- **Def. Risposta canonica**

É la risposta forzata di Σ ad un segnale tipico all’ingresso.

Le risposte canoniche usualmente adottate sono:

$g(t) \equiv$ risposta all'impulso $\delta(t)$ o **risposta impulsiva**

$g_s(t) \equiv$ risposta al gradino $1(t)$ o **risposta indiciale**

$\left(g(t) = g_s(t) = 0 \text{ per } t < 0 \right)$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right], \; g_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right]$$

Proprietà

$$\int_0^t g(v)dv = g_s(t), \quad g(t) = D^* g_s(t)$$

$\left(\text{per i sistemi strettamente propri } g(t) = Dg_s(t) \right)$

Dim.: $\left(\delta(t), g(t)\right) \in \mathcal{B}^*$ $\qquad$ $\left(1(t), g_s(t)\right) \in \mathcal{B}$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(\int_0^t \delta(v)dv, \int_0^t g(v)dv\right) \in \mathcal{B}^* \qquad \left(D^* 1(t), D^* g_s(t)\right) \in \mathcal{B}^*$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left(1(t), \int_0^t g(v)dv\right) \in \mathcal{B} \qquad \left(\delta(t), D^* g_s(t)\right) \in \mathcal{B}^*$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\int_0^t g(v)dv = g_s(t) \qquad D^* g_s(t) = g(t)$$

Se $\rho \geq 1 \;\Rightarrow\; g_s(t) \in C^0\left(\mathbb{R}\right) \;\Rightarrow\; D^* g_s(t) = D g_s(t)$ $\square$

Proprietà (integrali di Vaschy)

Nota la risposta al gradino $g_s(t)$, la risposta forzata $y_{\text{for.}}(t),\ t \geq 0$ effetto dell'azione forzante $u(t),\ t \geq 0$ è determinabile come:

$$y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t u'(v) g_s(t-v) dv + u(0+) g_s(t)$$

$$y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t g_s(v) u'(t-v) dv + u(0+) g_s(t)$$

Dim.:

$$Y_{\text{for.}}(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s}G(s)\cdot sU(s); \qquad \frac{1}{s}G(s) = \mathcal{L}\left[g_s(t)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[u'(t)\right] = sU(s) - u(0+) \quad \Rightarrow \; sU(s) = \mathcal{L}\left[u'(t)\right] + u(0+) = \mathcal{L}\left[u'(t)\right] + \mathcal{L}\left[u(0+)\delta(t)\right]$$

$$sU(s) = \mathcal{L}\left[u'(t) + u(0+)\delta(t)\right]$$

Applicando il teorema di convoluzione :

$$y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t g_s(v)\big(u'(t-v) + u(0+)\delta(t-v)\big)dv$$

$$= \int_0^t g_s(v)u'(t-v)dv + \int_0^t g_s(v)u(0+)\delta(t-v)dv = \int_0^t g_s(v)u'(t-v)dv + u(0+)g_s(t)$$

Da $y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t \big(u'(v) + u(0+)\delta(v)\big)g_s(t-v)d\tau$

analogamente si ottiene $y_{\text{for.}}(t) = \int_0^t u'(v)g_s(t-v)dv + u(0+)g_s(t)$ □

I concetti introdotti dalla lezione:

- Sequenze e funzioni impulsive
- Trasformate delle derivate generalizzate
- Estensione impulsiva dell’insieme dei behaviors
- Risposta forzata e risposta libera
- Funzione di trasferimento
- Soluzione generale dell’equazione differenziale
- Guadagno statico, polinomio caratteristico, poli e zeri, modi
- Risposta impulsiva e risposta indiciale