Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Lezione n. 7 di Controlli Automatici A

prof. Aurelio Piazzi

Sistemi dinamici elementari

Università degli Studi di Parma – a.a. 2009-2010

- Studiare le caratteristiche dei sistemi dinamici più semplici: **primo ordine** con grado relativo uno e **secondo ordine** con grado relativo due.

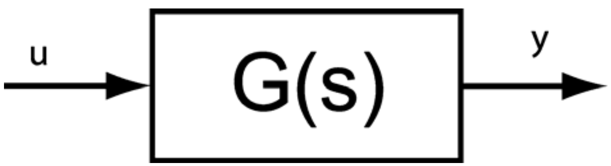
- Semplificare lo studio di un sistema più complesso (ordine maggiore di due, grado relativo piccolo) comparandolo ad un sistema del secondo ordine.

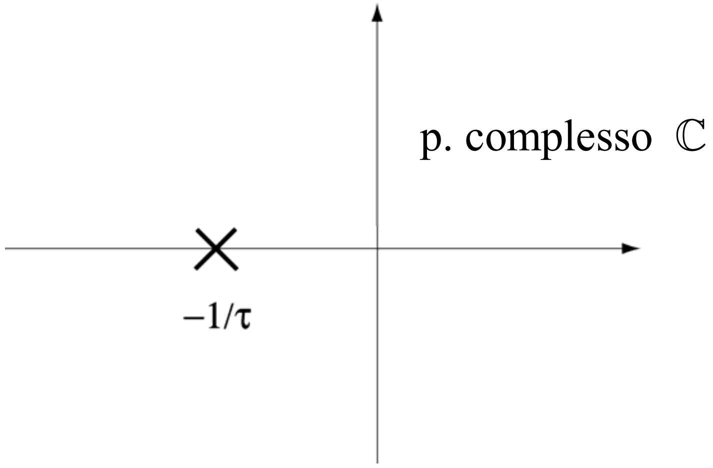
Sistemi del primo ordine (strettamente propri)

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau\, s} \quad \text{(guadagno statico normalizzato ad 1)}$$

Eq. diff. $\tau Dy + y = u \qquad \tau \equiv$ costante di tempo (>0)

$$\{\text{poli di } \Sigma\} = \left\{-\frac{1}{\tau}\right\} \qquad \{\text{modi di } \Sigma\} = \left\{e^{-\frac{1}{\tau}\,\mathrm{t}}\right\}$$

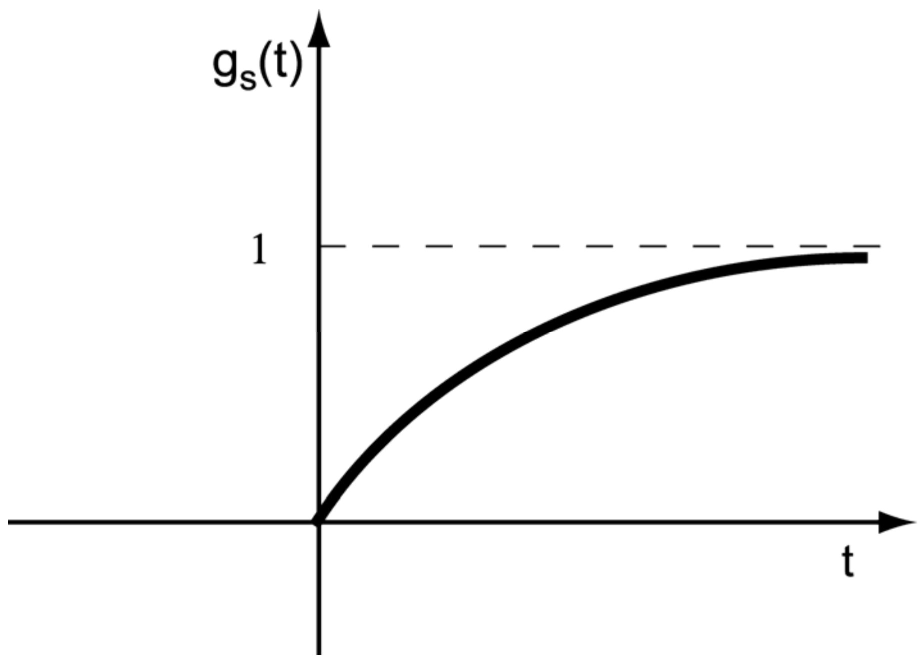




• determinazione di $g_s(t)$ (risposta al gradino unitario)

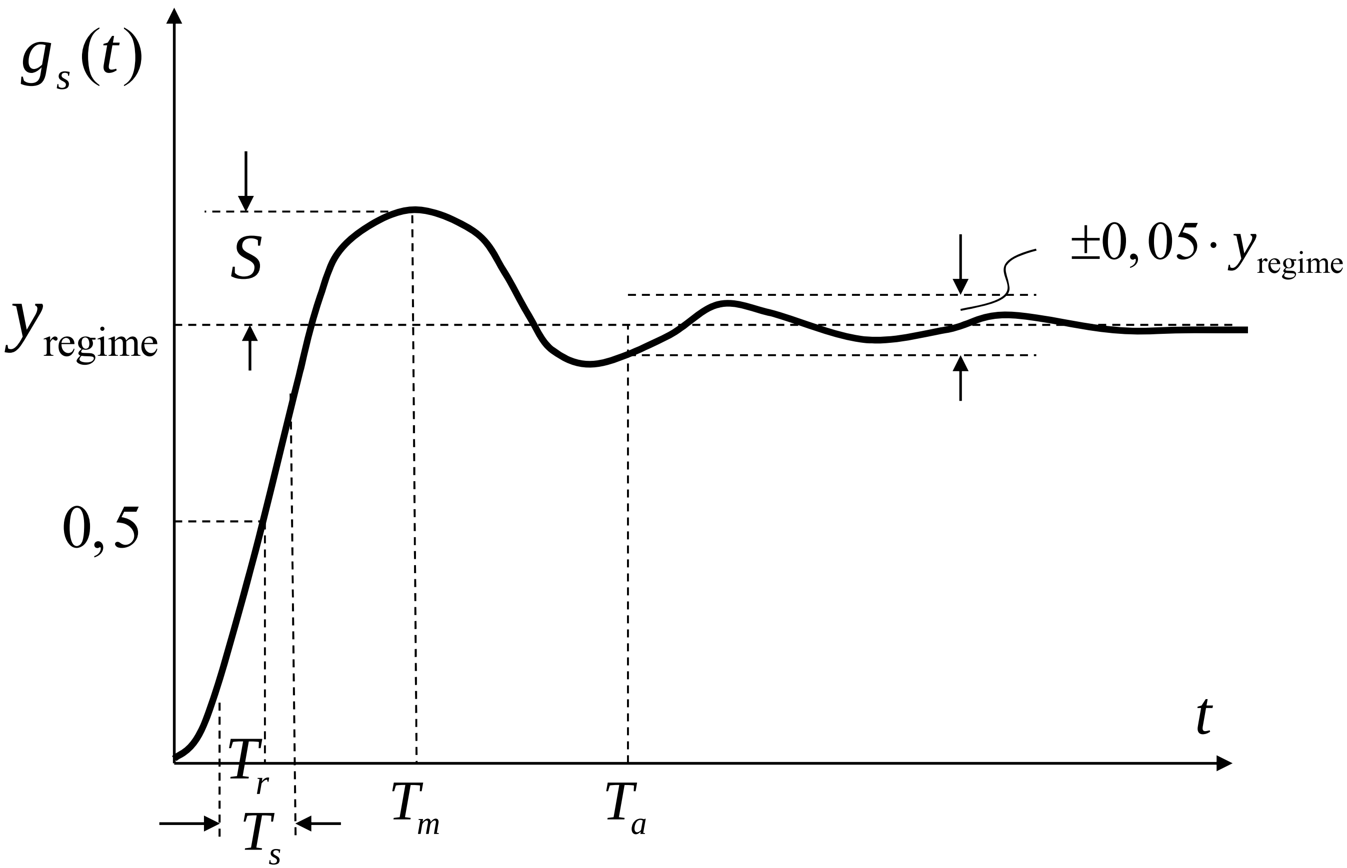
$$g_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+\tau\ s}\cdot\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{\tau}}{\left(s+\frac{1}{\tau}\right)s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right] = 1-e^{-t/\tau} \quad , t \geq 0$$

Per $t = 3\tau$ (5τ) l'uscita y raggiunge il 95% (99,3%) del valore di regime.



Parametri della risposta al gradino

Spesso la risposta al gradino unitario di un sistema dinamico generico ha l'andamento di figura dove si evidenziano "parametri" caratteristici.



$S \equiv$ massima sovraelongazione (in % del valore di regime)

$T_r \equiv$ tempo di ritardo

$T_s \equiv$ tempo di salita

$T_m \equiv$ istante di massima sovraelongazione

$T_a \equiv$ tempo di assestamento

$$T_a := \inf\left\{ T > 0 : \left| g_s(t) - y_{\text{regime}} \right| \leq 0,05\, y_{\text{regime}} \quad \forall t \geq T \right\}$$

Sistemi del secondo ordine (senza zeri)

La funzione di trasferimento G(s) sia così parametrizzata:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \;, \quad G(0) = 1$$

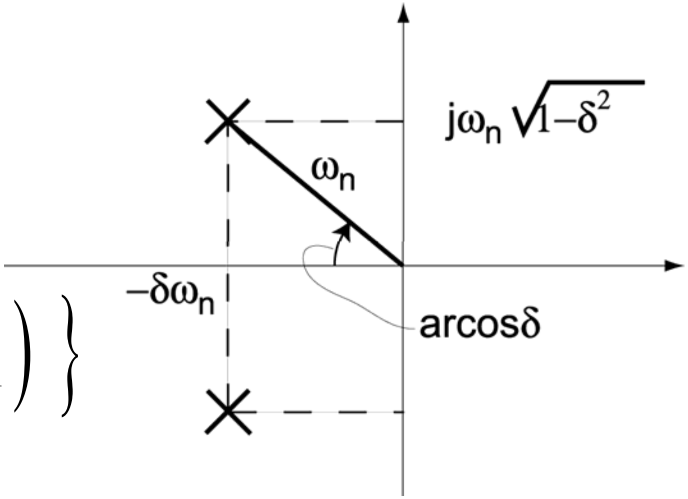
Eq. diff. $D^2 y + 2\delta\omega_n D y + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u$

$\omega_n \equiv$ pulsazione naturale (> 0)

$\delta \equiv$ coefficiente di smorzamento, $\in (0,1)$

$$\{\text{poli di } G(s)\} = \left\{ -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \right\}$$

$$\{\text{modi di } G(s)\} = \left\{ e^{-\delta\omega_n t}\,\text{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t + \varphi_1\right) \right\}$$

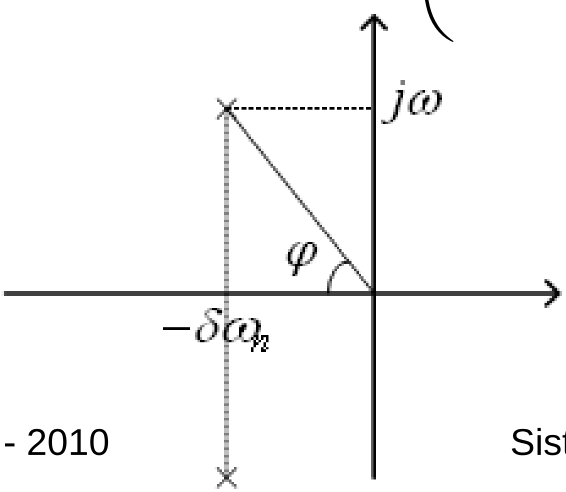


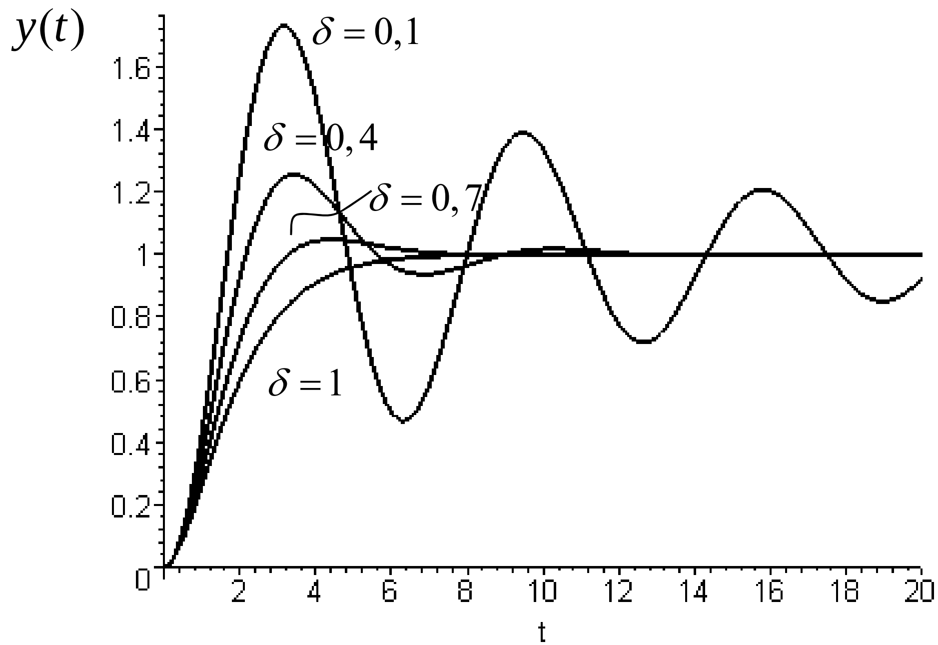
• Determinazione della risposta al gradino unitario

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}\right] = 1 - Ae^{-\delta\omega_n t}\operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$\omega := \omega_n\sqrt{1-\delta^2} \qquad A := \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$\varphi := \arccos(\delta) \quad \left(= \operatorname{arcsen}\sqrt{1-\delta^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \right)$$





$\left(\omega_n = 1 \ \text{ rad/s}\right)$

$$\text{per } \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1 - \text{sen}\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos\left(\omega_n t\right)$$

per $\delta = 1$ non posso utilizzare l'espressione precedente (A = $+\infty$!)

ma rifacendo i calcoli $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}\right] = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$

$$y(t) = 1 - Ae^{-\delta\omega_n t}\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \varphi\right)$$

- Calcolo della massima sovraelongazione S

$\ldots \quad Dy(t) = 0$

$$A\delta\omega_n e^{-\delta\omega_n t}\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \varphi\right) - Ae^{-\delta\omega_n t}\omega\,\cos\left(\omega t + \varphi\right) = 0$$

$$\delta\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \varphi\right) = \sqrt{1-\delta^2}\,\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$\mathrm{tg}\left(\omega t + \varphi\right) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega t = n\pi \quad , \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

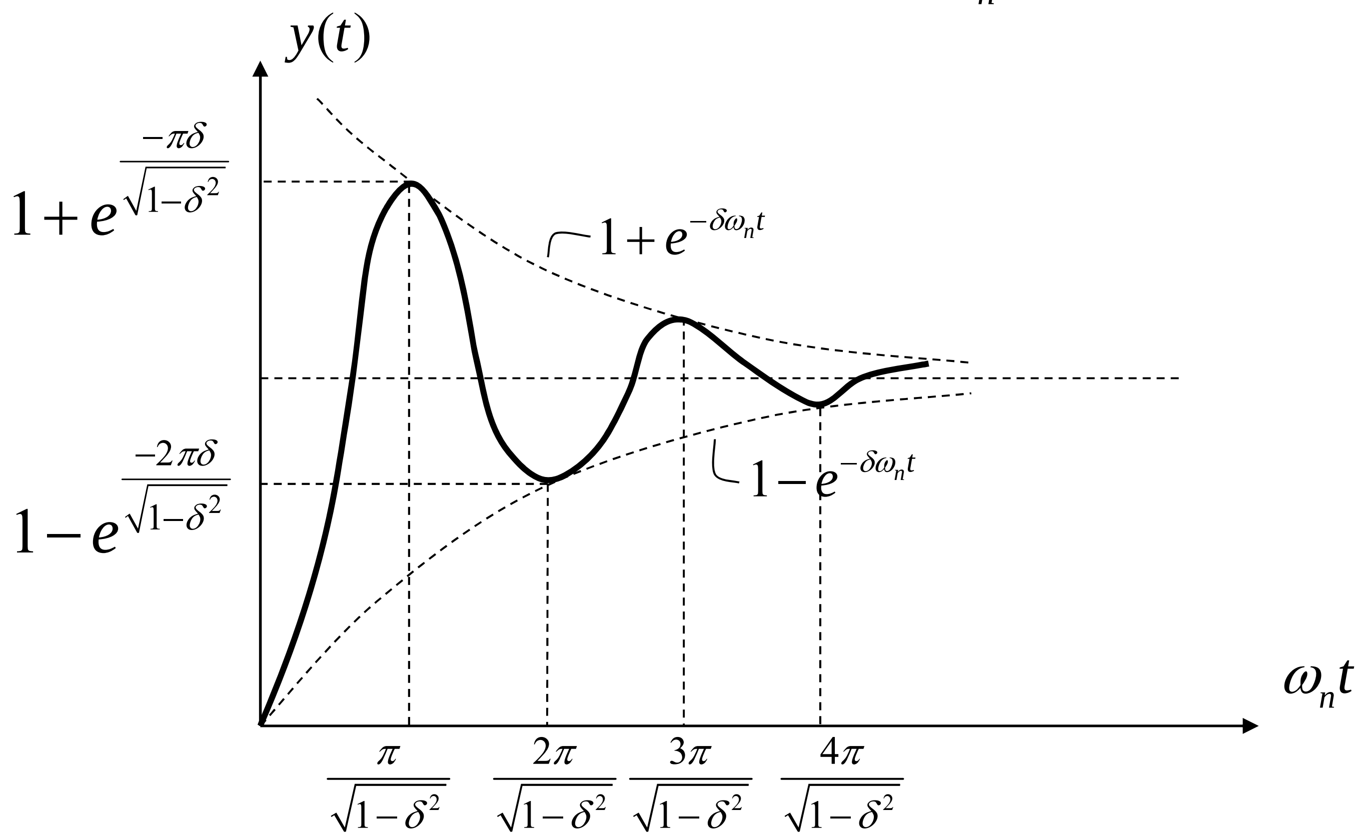
$$t = \frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y(t)\Big|_{\min,\max} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\,\exp\left\{-\frac{\delta n\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right\}\,\mathrm{sen}\left(n\pi + \varphi\right) =$$

$$\text{dato che} \quad \varphi = \ \mathrm{arcsen}\,\sqrt{1-\delta^2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{sen}\left(n\pi + \varphi\right) = (-1)^n\sqrt{1-\delta^2}$$

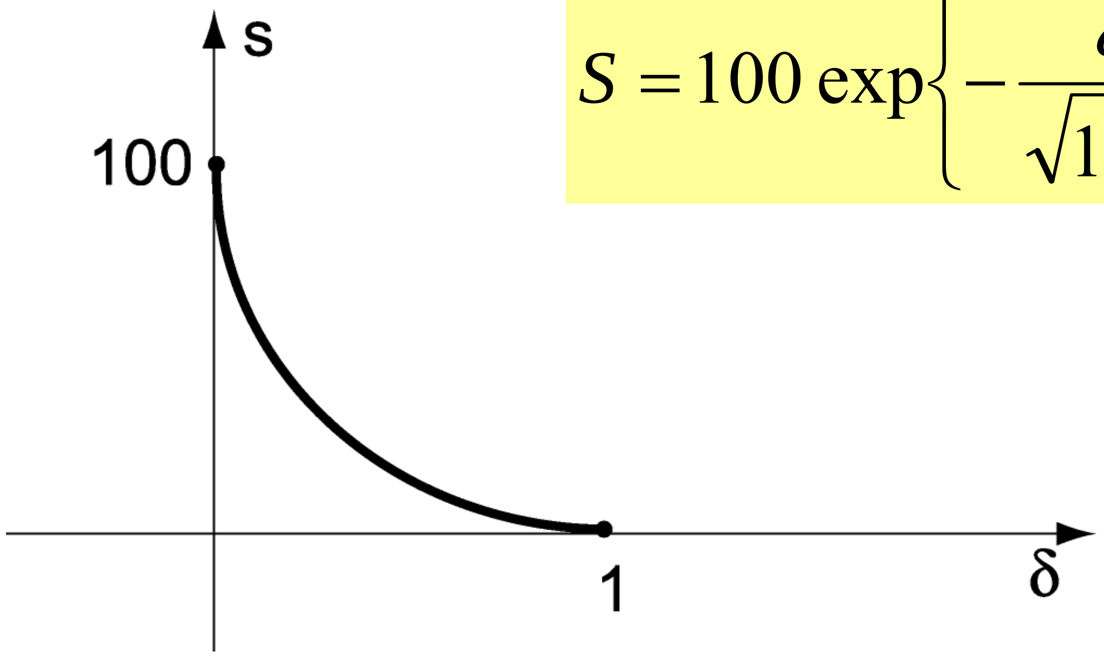
$$y(t)\big|_{\min,\max} = 1-(-1)^n \exp\left\{-\frac{\delta n\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right\}$$

$$y(t)\big|_{\min,\max} = 1-(-1)^n \exp\{-\delta\omega_n t\} \quad \text{dove } t=\frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}} \quad n=0,1,2,\ldots$$



$$y_{\max} = 1 + \exp\left\{ -\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}} \right\}$$

$$S = 100\left(y_{\max} - 1\right)$$



$$S = 100\,\exp\left\{ -\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}} \right\}$$

- Calcolo del tempo di assestamento T_a

Una stima può essere determinata risolvendo l'eq. :

$$e^{-\delta\omega_n T_a} = 0{,}05 \qquad -\delta\omega_n T_a = \ln 0{,}05 \cong -3$$

$$\boxed{T_a \cong \frac{3}{\delta\omega_n}}$$

- Tempo di salita T_s

$$\boxed{T_s \approx \frac{1{,}8}{\omega_n}}$$

É una relazione approssimata dedotta interpolando dati numerici

Poli dominanti di un sistema dinamico

Sistema Σ generico con f.d.t. G(s) = b(s)/a(s), n poli ed m zeri, tutti i poli hanno parte reale negativa (tutti i modi convergono a zero per t → +∞).

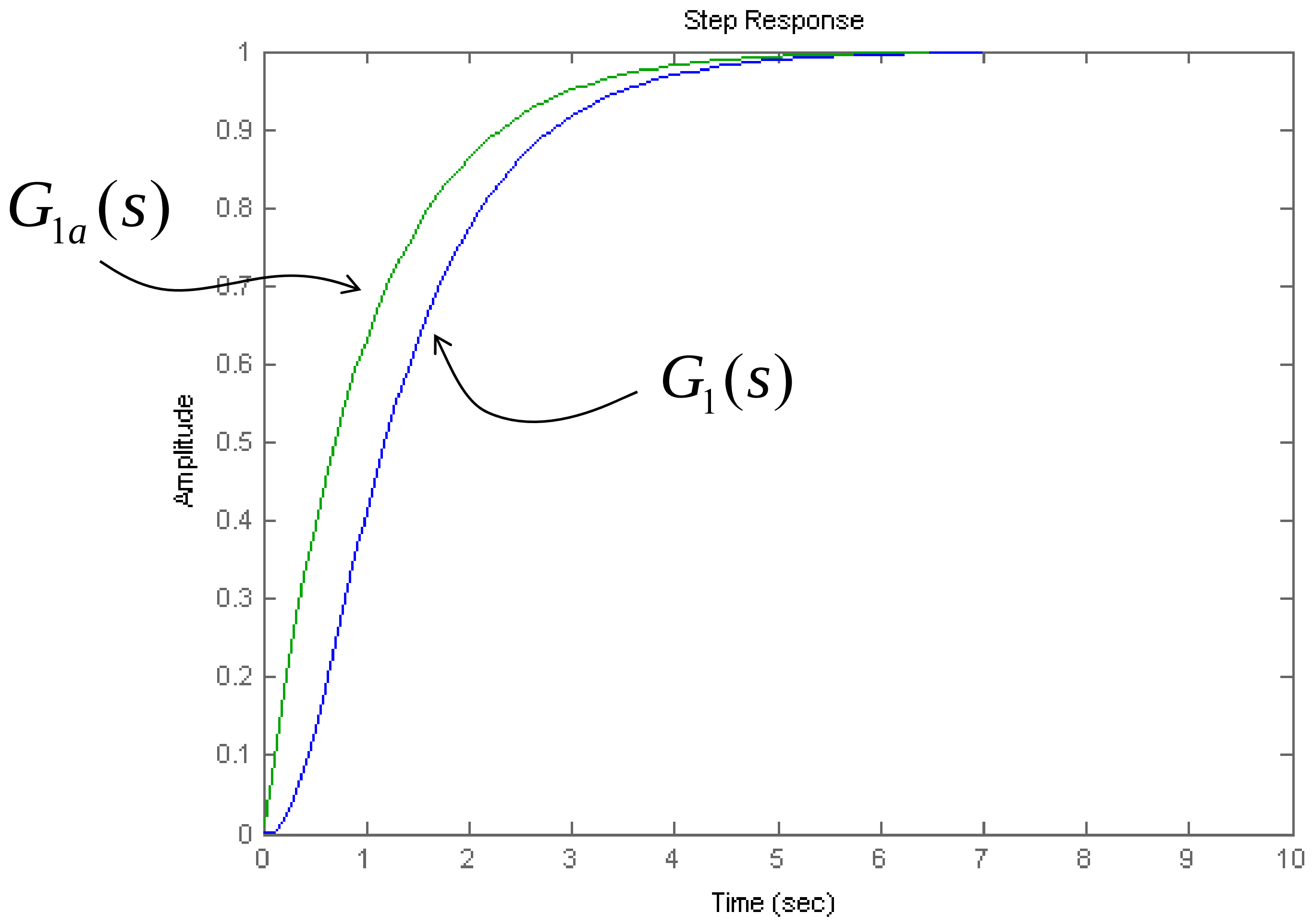
Esempi $$G_1(s) = \frac{20}{(s+1)(s+4)(s+5)}$$

$$\{\text{poli di } \Sigma_1\} = \{-1, -4, -5\} \quad \{\text{modi di } \Sigma_1\} = \{e^{-t}, e^{-4t}, e^{-5t}\}$$

-1 è il polo dominante. Si può costruire una f.d.t. approssimante $G_{1a}(s) \cong G_1(s)$ con questo solo polo.

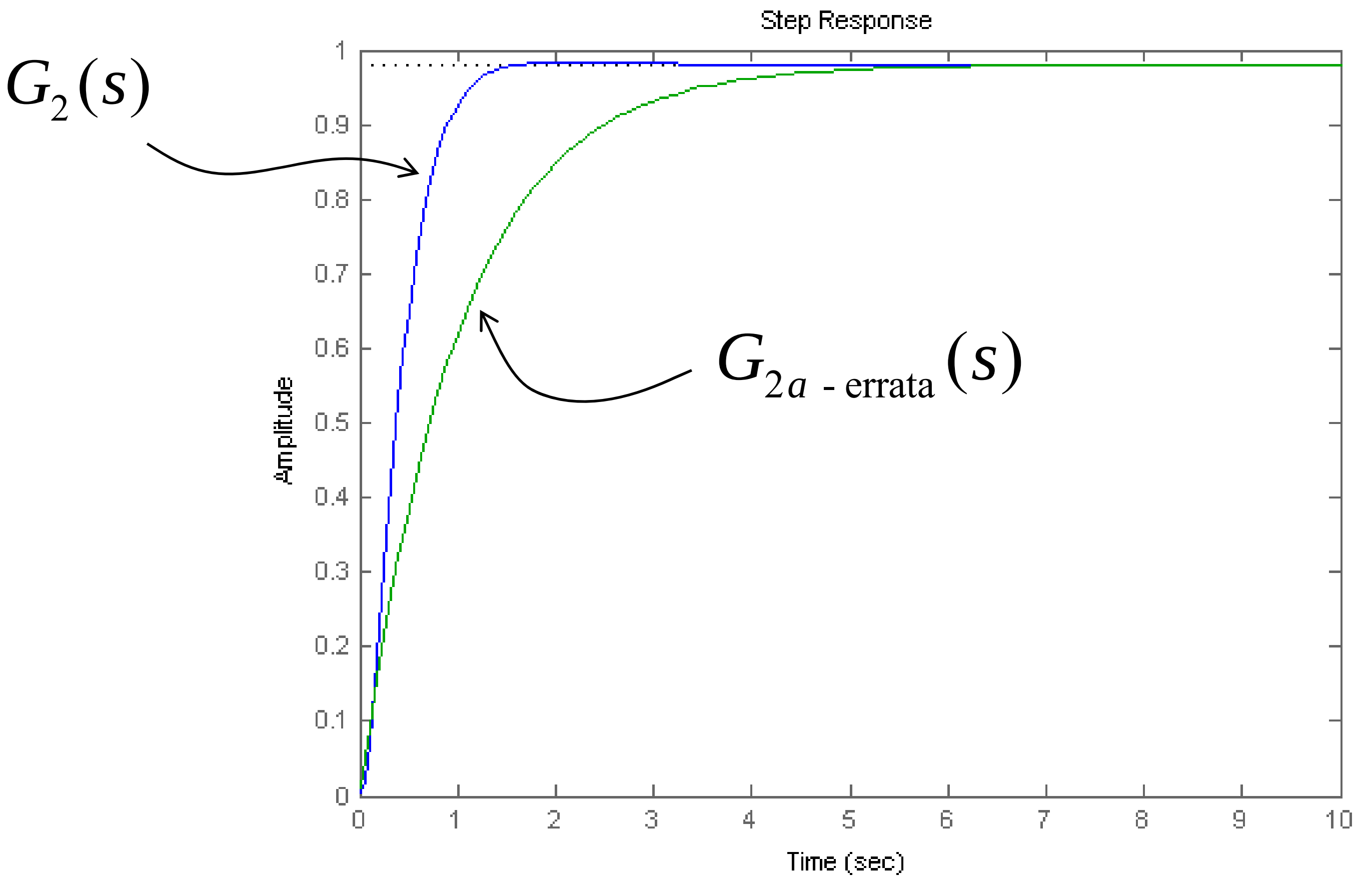
$G_{1a}(s) = \dfrac{c}{s+1}$, la costante c è determinata da $G_{1a}(0) = G_1(0) \Rightarrow c = 1$

$$G_{1a}(s) = \frac{1}{s+1}$$



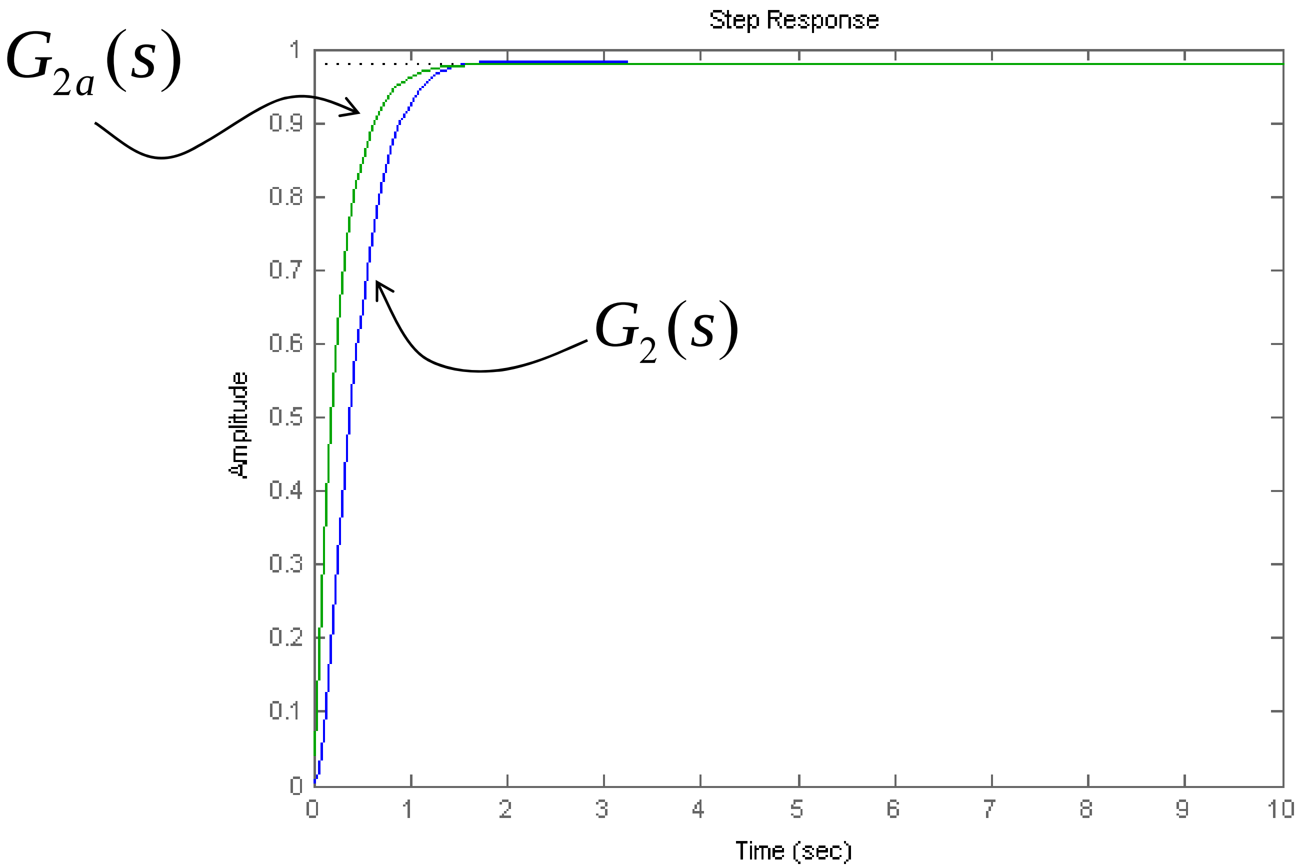
Grafici realizzati con **Control System Toolbox** di **MATLAB** (www.mathworks.com)

$$G_2(s) = \frac{20(s+0.98)}{(s+1)(s+4)(s+5)} \quad \text{potrei } G_{2a\text{ - errata}}(s) = \frac{0.98}{s+1}$$

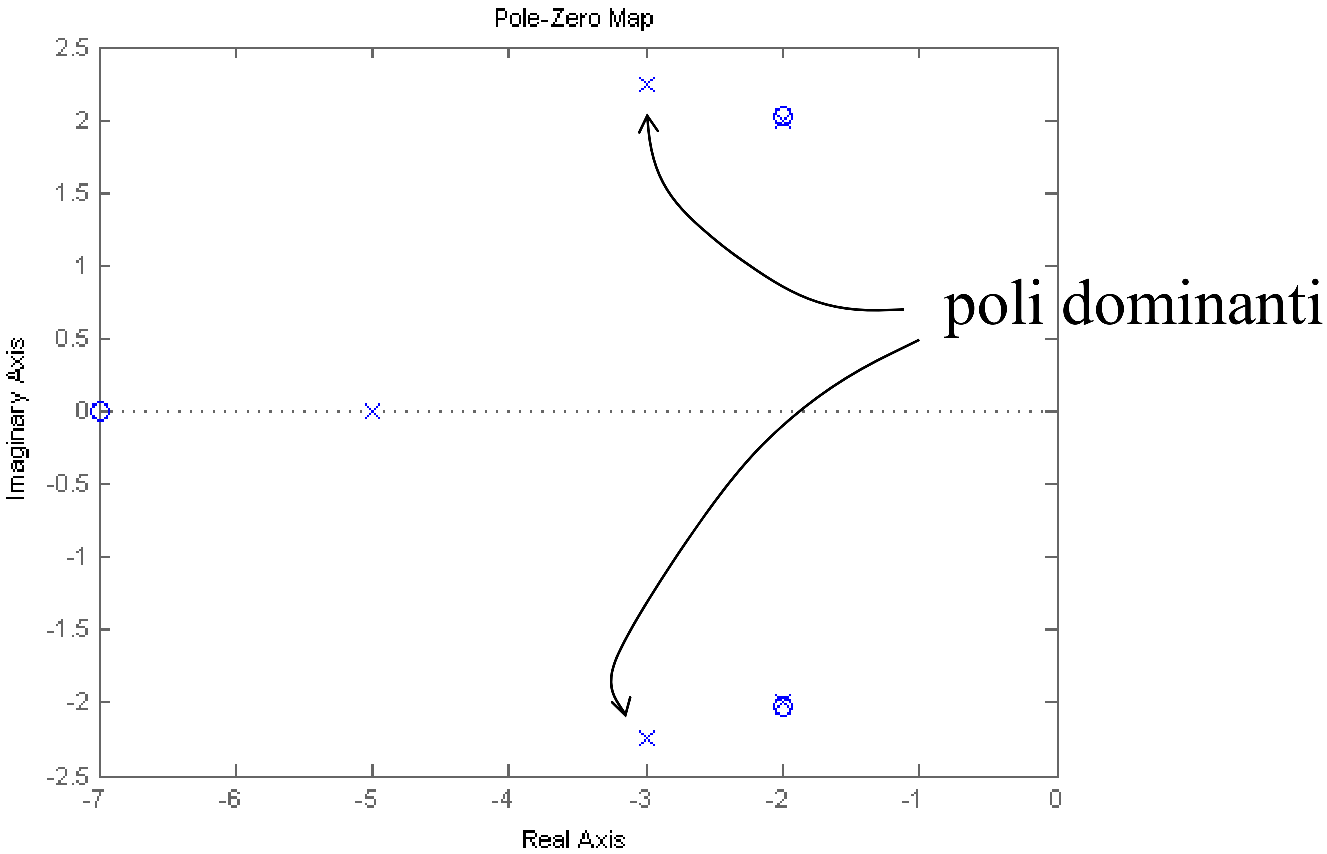


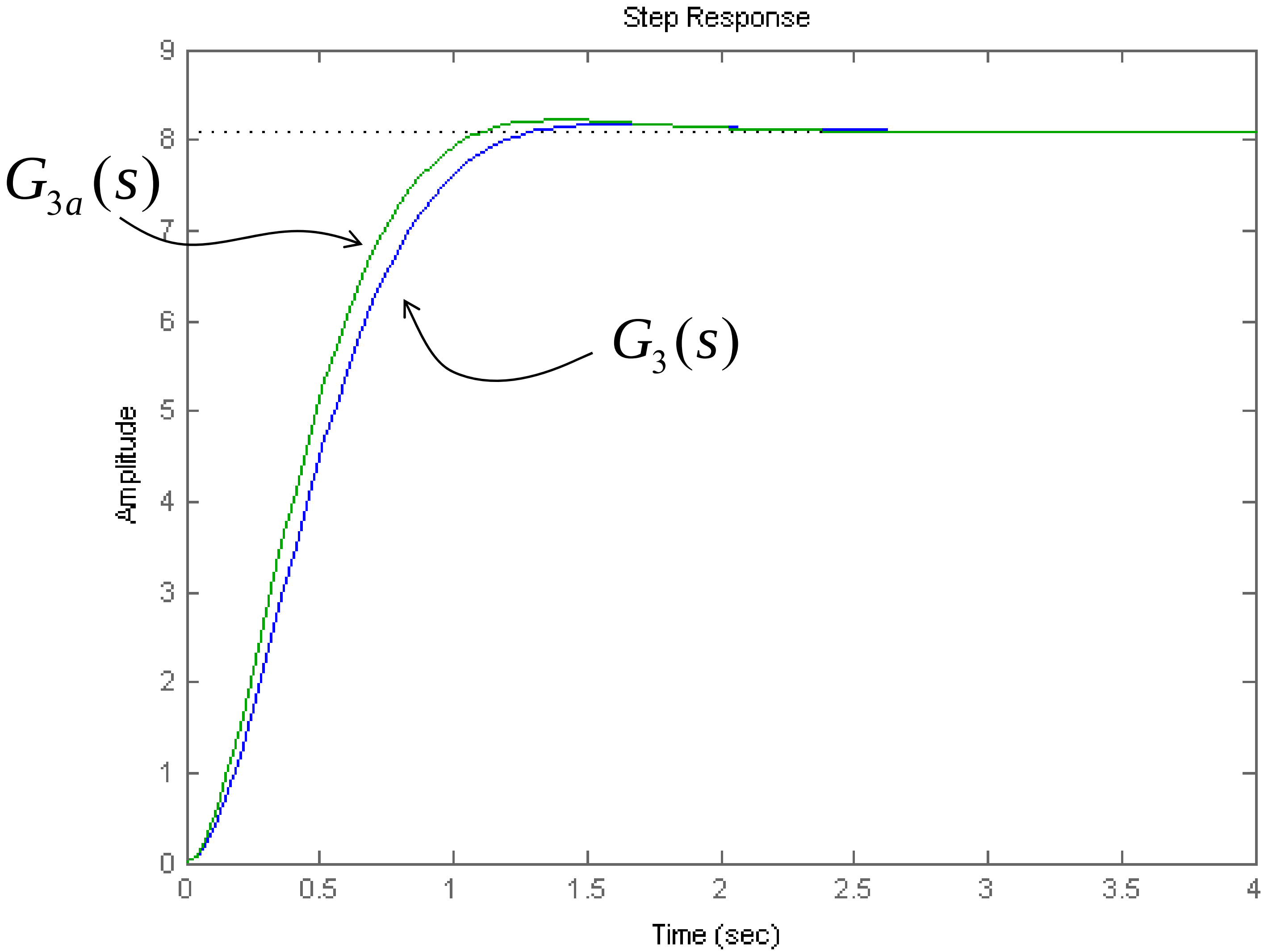
Il polo dominante escluso il polo -1 quasi cancellato dallo zero -0.98

è $-4 \;\Rightarrow\; G_{2a}(s) = \dfrac{3.92}{s+4}$



$$G_3(s)=\frac{80(s+7)[(s+2)^2+4.1]}{[(s+2)^2+4][(s+3)^2+5](s+5)} \quad \Rightarrow \quad G_{3a}(s)=\frac{113.4}{[(s+3)^2+5]}$$





Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
$G_{3a}(s)$
$G_3(s)$

Poli dominanti (def.)

Sono i poli (normalmente una coppia), non soggetti a quasi cancellazione polo-zero, più vicini all’asse immaginario.

Proprietà qualitativa: La risposta al gradino unitario dipende approssimativamente dai soli poli dominanti di Σ.

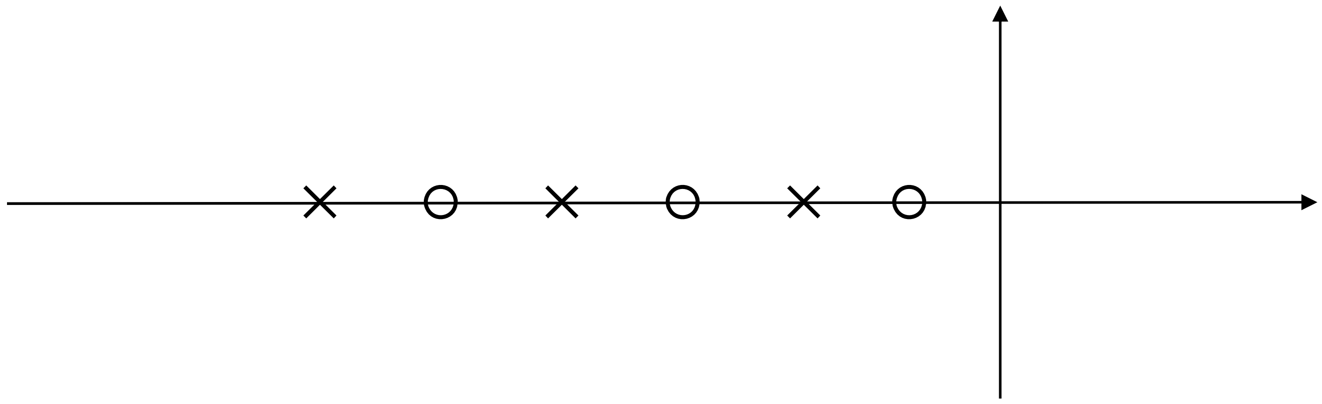
… la dinamica “transiente” è “dominata” dall’influenza dei poli dominanti …

Conseguenza: se i poli dominanti sono complessi coniugati i parametri della risposta S, T_a e T_s sono determinabili approssimativamente dalle relazioni presentate per i sistemi di ordine due.

Precisazioni:

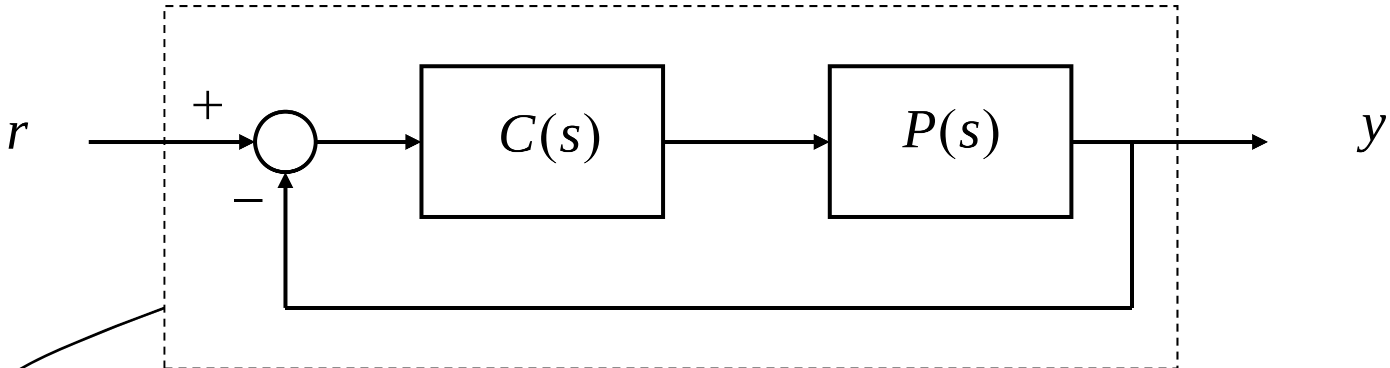
1. Il concetto di poli dominanti porta ad una approssimazione del comportamento transiente che può essere anche molto rozza …

2. Non è sempre possibile individuare un insieme significativo di poli dominanti.



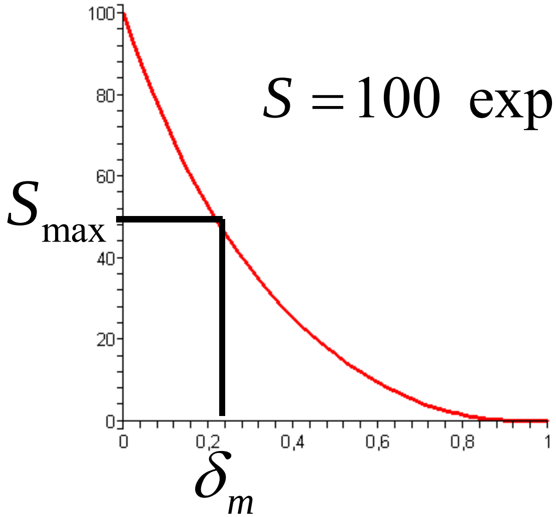
Specifiche sulla risposta al gradino per un sistema di controllo

$$S \leq S_{\max} \ , \ T_a \leq T_{a\text{-max}}$$

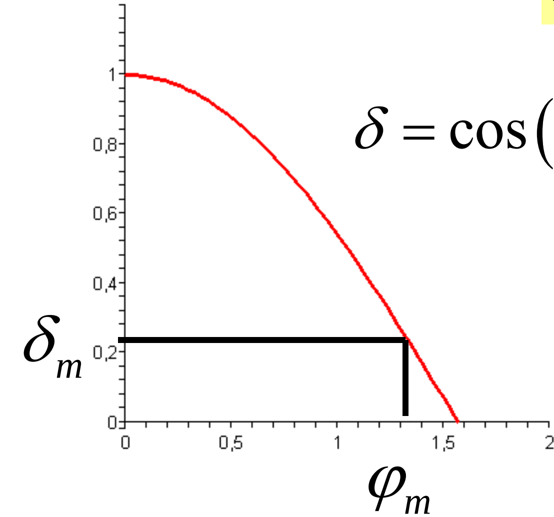


$$G_{ry}(s) \cong G_{ry-a}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \ , \ \omega_n > 0, \ \ \delta \in (0,1)$$

$$\varphi := \arccos(\delta)$$

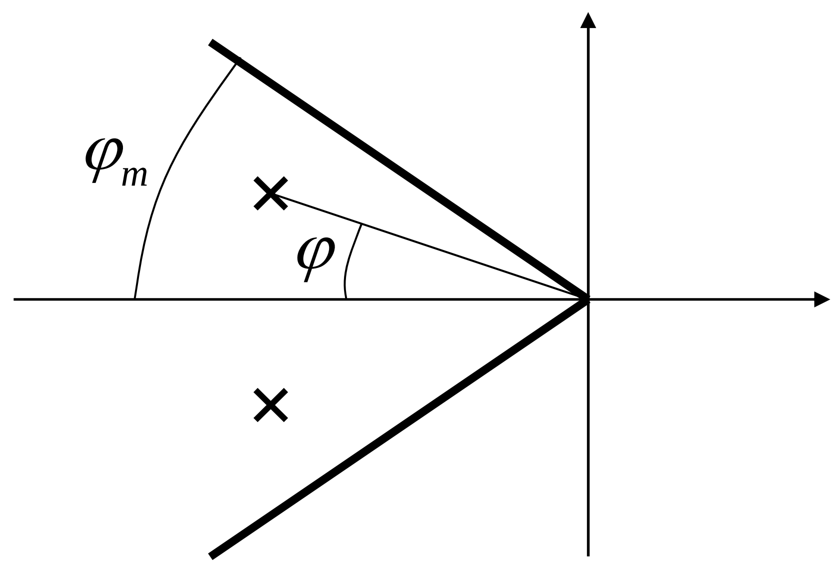


$$S = 100\ \exp\left\{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}\right\}$$

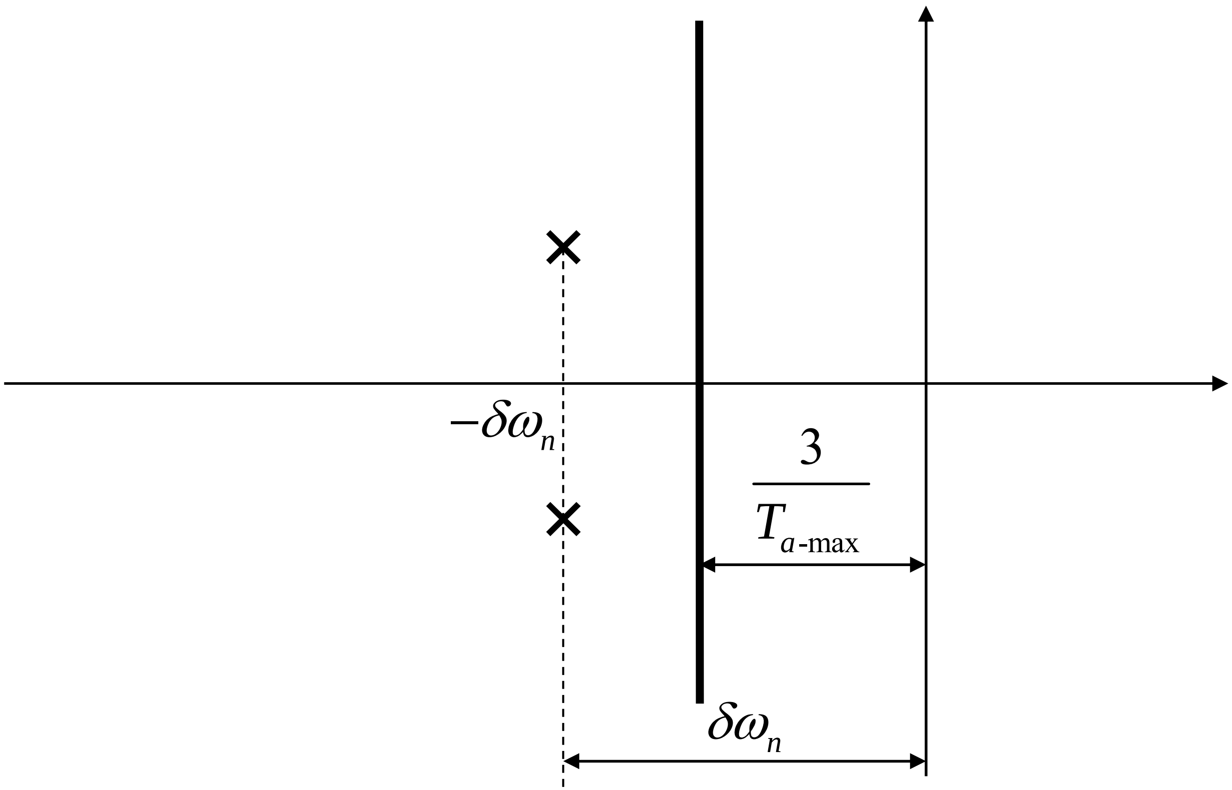


$$\delta = \cos(\varphi)$$

$$S \le S_{\max},\ \ S(\delta) \le S_{\max} \quad \Leftrightarrow \quad \delta \ge \delta_m,\ \ \delta(\varphi) \ge \delta_m \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \le \varphi_m$$

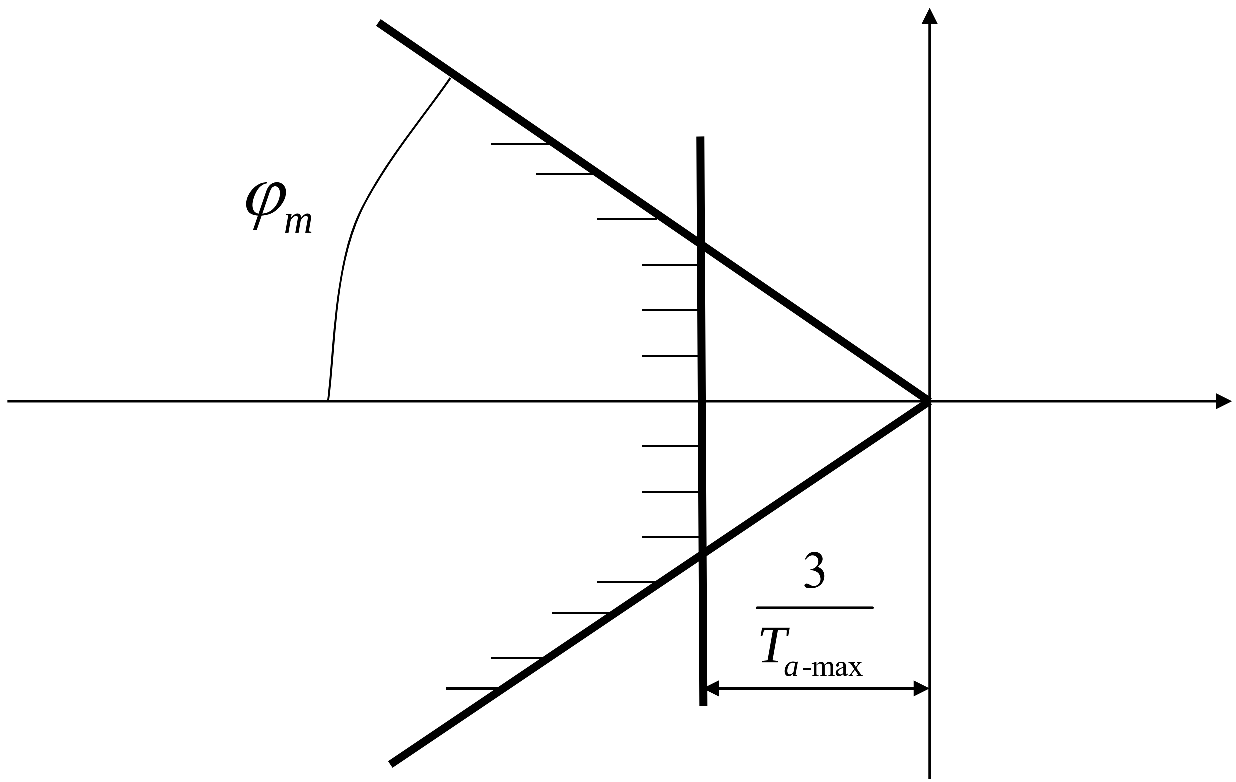


$$T_a \le T_{a\text{-max}}, \quad \frac{3}{\delta\omega_n} \le T_{a\text{-max}} \quad \Leftrightarrow \quad \delta\omega_n \ge \frac{3}{T_{a\text{-max}}}$$



Le specifiche $S \leq S_{\max}$ e $T_a \leq T_{a\text{-max}}$ devono essere soddisfatte entrambe.
Quindi i poli $-\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$ devono appartene al cono troncato di figura.

$\Rightarrow$ Si impone che tutti i poli di $G_{ry}(s)$ appartengano al cono troncato.



I concetti introdotti dalla lezione:

- Risposte al gradino dei sistemi del primo e secondo ordine
- Sovraelongazione, tempo di assestamento e tempo di salita
- Poli dominanti
- Specifiche su sovraelongazione e tempo di assestamento: condizione di ***root clustering***