Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Lezione n. 8 di Controlli Automatici A

prof. Aurelio Piazzi

La stabilità dei sistemi dinamici

Università degli Studi di Parma – a.a. 2009-2010

Stabilità dei sistemi dinamici (lineari)

- Stabilità (alle perturbazioni) di un sistema dinamico (stabilità di punti di equilibrio a seguito di perturbazioni).
- Stabilità BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) di un sistemi dinamico (stabilità della relazione causale ingresso-uscita).
- Un algoritmo per studiare la stabilità: il criterio di Routh.

Stabilità: definizioni e teoremi

Si consideri il sistema dinamico Σ descritto dall'eq. diff.

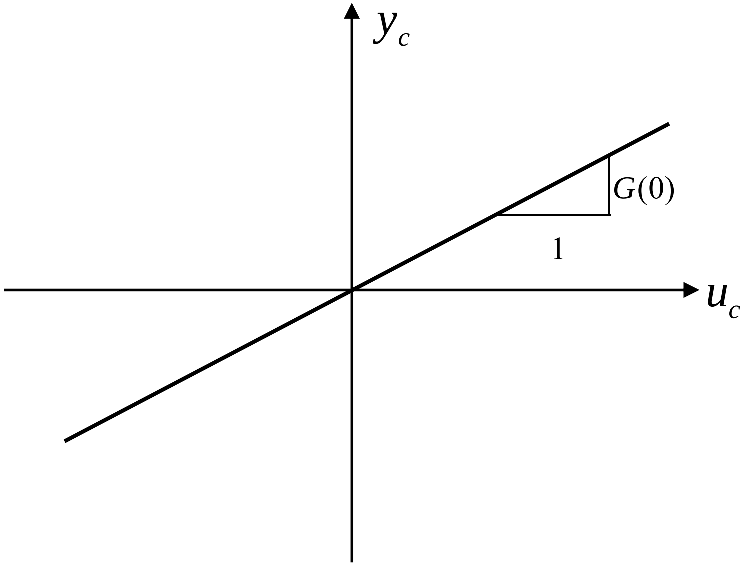
$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u$$

I punti di equilibrio di Σ sono caratterizzati da valori costanti nel tempo di u ed y $(u_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$ soddisfacenti la relazione:

$y_c = G(0) u_c \ , \ u_c \in \mathbb{R}$;

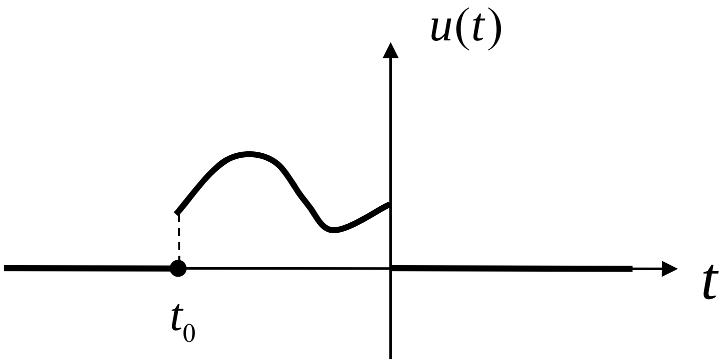
$G(s)$ f.d.t. di Σ,

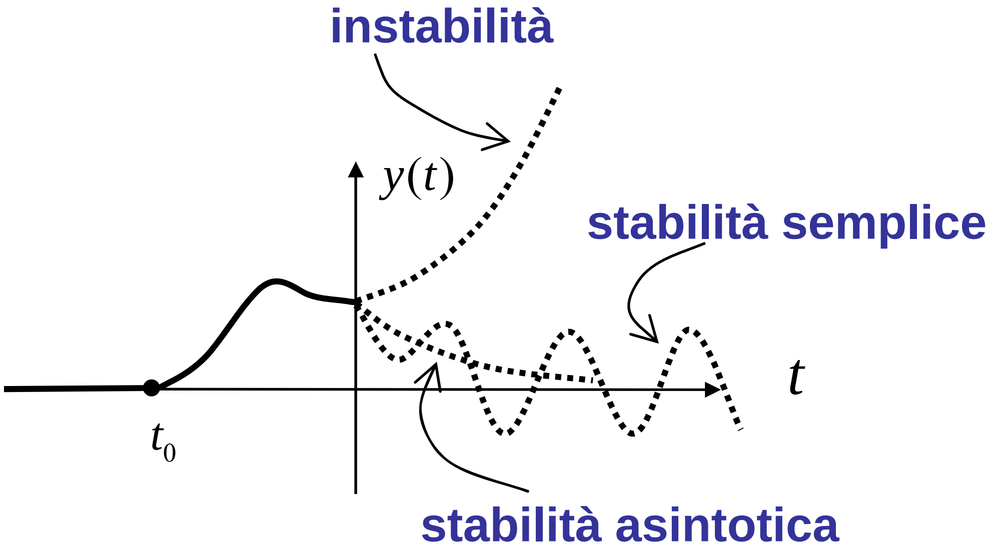
$G(0) = \dfrac{b_0}{a_0}$ guadagno statico di Σ.



Caratteristica statica di Σ

- Per lo studio della stabilità dei punti di equilibrio di Σ si scelga l'origine della caratteristica statica di Σ: $u_c = 0$, $y_c = 0$. Come vedremo tale studio porta alle medesime conclusioni per qualsivoglia punto di equilibrio.
- Per semplicità assumiamo a(s) e b(s) coprimi fra loro.
- Il punto di equilibrio $u_c = 0$, $y_c = 0$ venga perturbato nell'intervallo temporale $[t_0, 0)$, $t_0 < 0$ mediante una perturbazione introdotta con il segnale di ingresso.





$$u(t)=0 \ \text{ per } t<t_0, \quad u(t)\not\equiv 0 \ \text{ per } \ t\in\left[t_0,0\right), \quad u(t)=0 \ \text{ per } t\geq 0$$

$$y(t)=0 \ \text{ per } t<t_0, \quad y(t)\not\equiv 0 \ \text{ per } \ t\in\left[t_0,0\right), \quad y(t)=y_{\text{lib.}}(t) \ \text{ per } t\geq 0$$

Conseguenze: l'uscita è in evoluzione libera per $t\geq 0$

$$y_{\text{lib.}}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y_L(s)\right]$$

$$Y_{\text{lib.}}(s)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}a_i D^{i-1-j}y_- \, s^j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{i-1}b_i D^{i-1-j}u_- \, s^j}{\sum_{i=0}^{n}a_i s^i}$$

Comportamento della risposta libera $y_{\text{lib.}}(t)$ a seguito delle perturbazioni introdotte:

- $y_{\text{lib.}}(t)$ limitata su $[0,\ +\infty)$: punto di equilibrio **stabile**.
- $y_{\text{lib.}}(t)$ non limitata su $[0,\ +\infty)$: punto di equilibrio **instabile**.
- $y_{\text{lib.}}(t)$ limitata su $[0,\ +\infty)$ e convergente a zero per $t \rightarrow +\infty$:

punto di equilibrio **asintoticamente stabile**.

Proprietà: Per il sistema lineare Σ il comportamento della risposta libera a seguito di perturbazioni su di un punto di equilibrio rimane il medesimo per qualsivoglia altro punto di equilibrio.

Dim.: per semplicità sia $n=2,\ m=1$

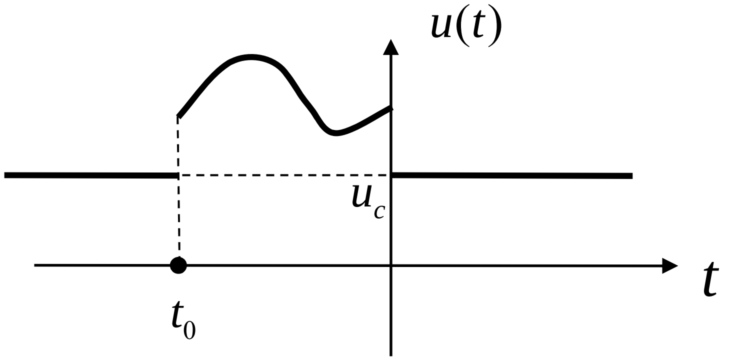
$$a_2D^2y + a_1Dy + a_0y = b_1Du + b_0u$$

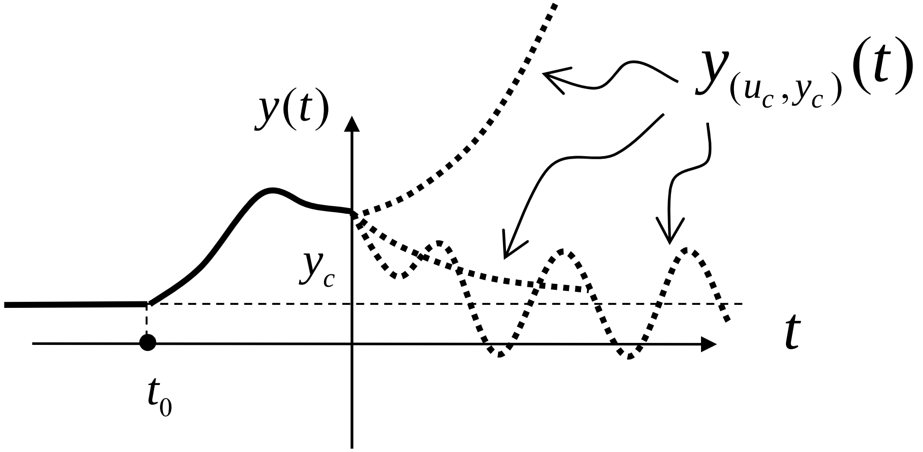
Per il punto di equilibrio $(0,0)$ la proprietà di stabilità/instabilità è associata all'evoluzione libera descritta da

$$a_2D^2y_{(0,0)}(t) + a_1Dy_{(0,0)}(t) + a_0y_{(0,0)}(t) = 0 \ \text{ per } t > 0$$

Consideriamo il punto di equilibrio (u_c, y_c) con $u_c \neq 0$ ed indichiamo con $y_{(u_c,y_c)}(t)$ la risposta libera a seguito di una perturbazione:

$$a_2D^2y_{(u_c,y_c)}(t) + a_1Dy_{(u_c,y_c)}(t) + a_0y_{(u_c,y_c)}(t) = b_0u_c \ \text{ per } t > 0$$





$$a_2 D^2 y_{(0,0)}(t) + a_1 D y_{(0,0)}(t) + a_0 y_{(0,0)}(t) = 0 \quad \text{per } t > 0$$

Dim. (cont.) :

Introduciamo il cambio di variabile $y(t) = \tilde{y}(t) + y_c$

per $t > 0$ sia $y_{(u_c, y_c)}(t) = \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + y_c$

$$\Rightarrow a_2 D^2 \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + a_1 D \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + a_0 \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + \cancel{a_0 y_c} = \cancel{b_0 u_c} \quad \text{per } t > 0$$

$$a_2 D^2 \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + a_1 D \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) + a_0 \tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t) = 0 \text{ per } t > 0$$

Il comportamento della risposta libera $\tilde{y}_{(u_c, y_c)}(t)$ è quindi il medesimo di $y_{(0,0)}(t)$. $\square$

Conseguenza: possiamo parlare di stabilità/instabilità del sistema anziché di stabilità/instabilità di un punto di equilibrio.

Def.: Stabilità (alle perturbazioni) di un sistema dinamico lineare

Il sistema lineare Σ si dice:

1. STABILE se per ogni perturbazione $y_{\text{lib.}}(t)$ è limitata su $[0,+\infty)$.
2. INSTABILE se non è stabile.
3. ASINTOTICAMENTE STABILE se è stabile ed inoltre $\lim_{t\to+\infty} y_{\text{lib.}}(t)=0$ per ogni perturbazione introdotta.
4. SEMPLICEMENTE STABILE se è stabile ed inoltre esiste una perturbazione per la quale $\lim_{t\to+\infty} y_{\text{lib.}}(t)=y_\infty \neq 0 \ \vee \ \left\{\text{non esiste } \lim_{t\to+\infty} y_{\text{lib.}}(t)\right\}$.

Teorema (poli di Σ e stabilità)

Sia Σ un sistema lineare per il quale i poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico (a(s) e b(s) sono coprimi fra loro).

a. Σ è ***stabile*** se e solo se tutti i poli hanno parte reale non positiva e gli eventuali poli puramente immaginari sono semplici.

b. Σ è ***asintoticamente stabile*** se e solo se tutti i suoi poli hanno parte reale negativa.

c. Σ è ***semplicemente stabile*** se e solo se tutti i poli hanno parte reale non positiva e quelli puramente immaginari (che devono esistere) sono semplici.

Corollario: Siano a(s) e b(s) coprimi fra loro. Allora Σ è ***instabile*** se e solo se esiste almeno un polo a parte reale positiva o un polo puramente immaginario con molteplicità maggiore di uno.

Nota: Se a(s) e b(s) non sono coprimi fra loro, il teorema di stabilità ammette la medesima formulazione sostituendo i "poli" con le "radici del polinomio caratteristico".

Esempi : Σ con f.d.t. $G(s) = b(s)/a(s)$

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+5)} \quad \Rightarrow \; \Sigma \text{ è semplicemente stabile}$$

$$\text{G(s)=}\frac{(s+2)(s-5)}{s^2(s+12)(s+50)} \quad \Rightarrow \; \Sigma \;\; \text{è instabile}$$

$$\text{G(s)=}\frac{(s+2)(s-5)}{(s+7)^4(s+50)} \quad \Rightarrow \; \Sigma \;\; \text{è asintoticamente stabile}$$

$$\text{G(s)=}\frac{(s+2)(s-5)}{(s-3)(s+50)} \quad \Rightarrow \; \Sigma \;\; \text{è instabile}$$

Stabilità ingresso-limitato uscita-limitata

(stabilità BIBO, *bounded-input bounded-output*)

Def. (stabilità BIBO)

Σ è BIBO stabile se per ogni azione forzante limitata la corrispondente risposta forzata è anch'essa limitata.

Formalmente: $\left[\| f(t) \|_\infty \triangleq \sup_{t \in \mathbb{R}} | f(t) | \right]$

$\forall \ \big(u(t), y(t)\big) \in \mathcal{B} \quad \text{con} \quad u(t) = 0, \ y(t) = 0 \text{ per } t < 0 \quad \text{e} \quad \|\mathrm{u(t)}\|_\infty < +\infty$

$\Rightarrow \quad \|y(t)\|_\infty < +\infty.$

Teorema (Stabilità BIBO)

Σ è BIBO stabile se e solo se $\int_0^{+\infty} |g(\tau)| d\tau < +\infty.$

Dim.: sufficienza

$$y(t) = \int_0^{+\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \Rightarrow \left|y(t)\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|g(\tau)\right|\left|u(t-\tau)\right| d\tau \leq \left(\int_0^{+\infty} \left|g(\tau)\right| d\tau \right) \cdot \left\|u(t)\right\|_\infty$$

necessità: Occorre provare che la stabilità BIBO implica la limitatezza dell'integrale improprio. Si ragiona per assurdo: si ipotizza che l'integrale sia illimitato e quindi per M > 0 grande a piacere esiste

$t_1 > 0$ tale che $\int_0^{t_1} \left|g(\tau)\right| d\tau = M$.

$y(t_1) = \int_0^{t_1} g(\tau)u(t_1-\tau)d\tau$ si sceglie $u(t) \ni u(t_1-\tau) = \text{sign}\, g(\tau) \;\; \forall \tau \in [0, t_1]$

$$y(t_1) = \int_0^{t_1} g(\tau)\text{sign}\, g(\tau)d\tau = \int_0^{t_1} \left|g(\tau)\right| d\tau = M$$

l'uscita assume valori illimitati in risposta ad un ingresso limitato... □

Si assuma a(s) e b(s) coprimi fra loro. Vale quindi la seguente equivalenza.

Teorema (Equivalenza tra Stabilità BIBO e Stabilità Asintotica)
Σ è BIBO stabile se e solo se Σ è asintoticamente stabile.

Il Criterio di Routh

Si consideri il sistema lineare Σ descritto dall'eq. diff.

$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u$; la sua f.d.t. è $G(s) = b(s)/a(s)$

con $a(s)$ polinomio caratteristico di Σ.

Def. (Equazione caratteristica)

Dato il sistema Σ l'eq. $a(s) = 0$ ovvero

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

è detta equazione caratteristica di Σ.

La stabilità di Σ è associata alle radici dell'eq. caratteristica.

- **Def. (Polinomi di Hurwitz)**

Un polinomio a(s) è detto di Hurwitz o hurwitziano se tutte le sue radici hanno parte reale negativa.

- **Proprietà**

Si assuma $a_n > 0$. Il polinomio a(s) è hurwitziano solo se tutti i suoi coefficienti sono positivi.

Dim.: Se le radici di $a(s)$ hanno tutte parte reale negativa allora

$$a(s) = a_n (s+\eta_1)(s+\eta_2)\cdots(s+\eta_k)\left(s^2+2\delta_1\omega_{n1}s+\omega_{n1}^2\right)\cdots\left(s^2+2\delta_l\omega_{nl}s+\omega_{nl}^2\right)$$

$$\eta_i > 0 \quad i = 1,\dots,k$$

$$\omega_{ni} > 0 \quad i = 1,\dots,l$$

$$\delta_i \in (0,1) \quad i = 1,\dots,l$$

Quindi sviluppando tutti i prodotti si deduce che i coefficienti sono positivi in quanto somme di termini positivi... □

É possibile determinare il segno delle radici di a(s) (Re > 0, Re = 0, Re < 0) mediante la cosiddetta *Tabella di Routh*.

- Costruzione della Tabella di Routh

$$
\begin{array}{c|cccc}
n & \gamma_{0,1} & \gamma_{0,2} & \gamma_{0,3} & \cdots \\
n-1 & \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \gamma_{1,3} & \cdots \\
n-2 & \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \gamma_{2,3} & \cdots \\
n-3 & \gamma_{3,1} & \gamma_{3,2} & \gamma_{3,3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\vdots & & & & \\
2 & \gamma_{n-2,1} & \gamma_{n-2,1} & & \\
1 & \gamma_{n-1,1} & & & \\
0 & \gamma_{n,1} & & &
\end{array}
$$

- Regole di costruzione della T.d.R. (algoritmo base)

1. Le prime due righe riportano in modo alterno i coefficienti di a(s):

$$\gamma_{0,1} = a_n \quad \gamma_{0,2} = a_{n-2} \quad \gamma_{0,3} = a_{n-4} \quad \cdots$$

$$\gamma_{1,1} = a_{n-1} \quad \gamma_{1,2} = a_{n-3} \quad \gamma_{1,3} = a_{n-5} \quad \cdots$$

Ove non esplicitamente definiti i coefficienti gamma assumono il valore di zero.

2. Le righe successive vengono definite dalla regola (k = 2, 3,… , n):

$$\gamma_{k,j} = -\frac{\begin{vmatrix} \gamma_{k-2,1} & \gamma_{k-2,j+1} \\ \gamma_{k-1,1} & \gamma_{k-1,j+1} \end{vmatrix}}{\gamma_{k-1,1}} = \frac{\gamma_{k-1,1}\gamma_{k-2,j+1} - \gamma_{k-2,1}\gamma_{k-1,j+1}}{\gamma_{k-1,1}}$$

- **Teorema (di Routh)**

Si assuma che la tabella di Routh possa essere completata. Allora ad ogni variazione di segno, degli elementi consecutivi della prima colonna, corrisponde una radice a parte reale positiva, ad ogni permanenza corrisponde una radice a parte reale negativa.

- **Criterio di Routh**

Il polinomio a(s) è hurwitziano se e solo se l'associata tabella di Routh può essere completata (con l'algoritmo base) e presenta nella prima colonna solo permanenze di segno.

Esempi :

$$s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0 \qquad (\text{radici} \;\; -1, 2, 3)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & 1 & 0 \\
2 & -4 & 6 & 0 \\
1 & \dfrac{-4-6}{-4} = \dfrac{5}{2} & 0 & \\
0 & 6 & &
\end{array}$$

$$\text{due variazioni} \quad \Rightarrow \quad \left\{\text{n. radici} \; \in \mathbb{C}_+\right\} = 2$$

$$\text{una permanenza} \quad \Rightarrow \quad \left\{\text{n. radici} \; \in \mathbb{C}_-\right\} = 1$$

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0 \qquad (\text{radici} \;\; 0.7555 \pm j1.4444, -1.0055 \pm j0.9331)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
4 & 2 & 3 & 10 & 0 \\
3 & 1 & 5 & 0 & 0 \\
2 & -7 & 10 & 0 & \\
1 & \dfrac{45}{7} & 0 & & \\
0 & 10 & & &
\end{array}$$

$$\text{due variazioni} \quad \Rightarrow \quad \left\{\text{n. radici} \; \in \mathbb{C}_+\right\} = 2$$

$$\text{due permanenze} \quad \Rightarrow \quad \left\{\text{n. radici} \; \in \mathbb{C}_-\right\} = 2$$

- **Proprietà**

Durante la costruzione della tabella di Routh i termini di una stessa riga possono essere moltiplicati tutti per uno stesso coefficiente positivo senza che ciò modifichi le variazioni (o permanenze) di segno nella prima colonna.

Esempi : $4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$

$$\begin{array}{c|cccccc}
4 & 4 & 5 & 1 & 0 & & \\
3 & 3 & 2 & 0 & 0 & & \\
2 & 7 & 3 & 0 & & & \text{(non si è diviso per 3)} \\
1 & 5 & 0 & & & & \text{(non si è diviso per 7)} \\
0 & 3 & & & & &
\end{array}$$

Tutte permanenze $\Rightarrow$ tutte radici con parte reale negativa

$$s^4 + 3s^3 + 7s^2 + 6s + 15 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccccl}
4 & 1 & 7 & 15 & 0 & \\
3 & 1 & 2 & 0 & 0 & \text{(si è diviso per 3)} \\
2 & 1 & 3 & 0 & & \text{(si è diviso per 5)} \\
1 & -1 & 0 & & & \\
0 & 3 & & & &
\end{array}$$

$$\text{due variazioni} \;\Rightarrow\; \left\{\text{n. radici } \in \mathbb{C}_+\right\} = 2$$

$$\text{due permanenze} \;\Rightarrow\; \left\{\text{n. radici } \in \mathbb{C}_-\right\} = 2$$

Casi singolari nella Costruzione della Tabella di Routh

a) Il primo elemento di una riga è zero.

b) Tutti gli elementi di una riga sono nulli.

Prosecuzione della tabella nel caso a)

1. Metodo ε (è obsoleto: algoritmicamente complesso e non sempre risolutivo)
2. **Metodo di Benidir-Picinbono** (1990): algoritmicamente semplice e *sempre* risolutivo.

Metodo di Benidir-Picinbono

Ogni riga, non nulla, che inizia con p zeri viene sommata con la riga da questa ottenuta moltiplicandola per $(-1)^p$ e traslandola verso sinistra di p posizioni. La tabella di Routh viene poi continuata ed interpretata nel modo usuale.

Esempio : $s^3 + 3s - 2 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 3 & 0 \\ \hdashline 2' & 0 & -2 & 0 \\ 2'' & 2 & 0 & 0 \\ \hdashline 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & \\ 0 & -2 & & \end{array}$$

$$\text{una variazione} \quad \Rightarrow \quad \{\text{n. radici } \in \mathbb{C}_+\} = 1$$

$$\text{due permanenze} \quad \Rightarrow \quad \{\text{n. radici } \in \mathbb{C}_-\} = 2$$

Prosecuzione della tabella nel caso b)

Tutti gli elementi di una riga sono nulli: quando il polinomio a(s) non ha radici nell’origine questo accade sempre su di una riga dispari.

$$\begin{array}{c|cccccc} 2i & \gamma_{n-2i,1} & \gamma_{n-2i,2} & \gamma_{n-2i,3} & \cdots & \gamma_{n-2i,i+1} & 0 \\ 2i-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}$$

Def. polinomio ausiliario $a_2(s)$

$$a_2(s) := \gamma_{n-2i,1}s^{2i} + \gamma_{n-2i,2}s^{2i-2} + \gamma_{n-2i,3}s^{2i-4} + \cdots + \gamma_{n-2i,i}s^{2} + \gamma_{n-2i,i+1}$$

L'eq. ausiliaria è quindi $a_2(s) = 0$

- **Proprietà**

1. Il polinomio ausiliario $a_2(s)$ divide $a(s)$. Quindi $\exists$ $a_1(s)$ $\ni$ $a(s) = a_1(s)\, a_2(s)$.
2. La prima parte della tabella (fino alla riga 2i) da informazioni sul segno delle radici di $a_1(s)$.

- **Proprietà (simmetria delle radici del p. ausiliario)**

Le radici del polinomio ausiliario $a_2(s)$ sono disposte simmetricamente rispetto all'origine del piano complesso.

Dim. (cenno) Nel polinomio $a_2(s)$ mancano i termini dispari …

Quindi $\sigma \pm j\omega$ è radice di $a_2(s)$ se e solo se $-\sigma \pm j\omega$ è radice di $a_2(s)$

- **Corollario**

L'equazione ausiliaria $a_2(s) = 0$ ha tante radici a parte reale negativa quante sono quelle a parte reale positiva e può anche presentare radici puramente immaginarie.

- **Come proseguire la costruzione della Tabella nel caso b)**

1. Si deriva il polinomio ausiliario.
2. I coefficienti del polinomio così ottenuto sostituiscono gli zeri della riga nulla.
3. Si prosegue la Tabella con l'algoritmo usuale: in questo caso però le permanenze corrispondono anche a radici puramente immaginarie.

$a(s) = a_1(s)a_2(s)$

Interpretazione della Tabella di Routh nel caso di singolarità completa (caso b))

1. La prima colonna della tabella dalla riga n alla riga $2i$ da informazioni sul segno delle radici di $a_1(s)$: una variazione → una radice a parte reale positiva, una permanenza → una radice a parte reale negativa.
2. La prima colonna della tabella dalla riga $2i-1$ alla riga 0 da informazioni sul segno delle radici di $a_2(s)$: una variazione → una radice a parte reale positiva, una permanenza → una radice a parte reale negativa oppure una radice puramente immaginaria.

La simmetria delle radici di $a_2(s)$ (pol. ausiliario) permette di stabilire il segno della parte reale di tutte le radici.

Esempio : $s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
6 & 1 & -2 & -7 & -4 & 0 \\
5 & 1 & -3 & -4 & 0 & 0 \\
4 & 1 & -3 & -4 & 0 & \\
\hdashline
3 & 2 & -3 & 0 & 0 & \\
2 & -3 & -8 & 0 & & \\
1 & -25 & 0 & & & \\
0 & -8 & & & &
\end{array}
$$

polinomio ausiliario $a_2(s) = s^4 - 3s^2 - 4$

$Da_2(s) = 4s^3 - 6s$ (si è diviso per 2)

$\{\text{n. radici } \in \mathbb{C}_+\} = 1$

$\{\text{n. radici } \in j\mathbb{R}\} = 2$ (calcolato come $4 - 1 - 1$)

$\{\text{n. radici } \in \mathbb{C}_-\} = 2 + 1 = 3$