Tracce delle soluzioni

1.

(1)
$$D^*f = \begin{cases} 0 & t<1 \\ \delta(0) & t=1 \\ \frac{1}{2} & 1<t<3 \\ -2\delta(0) & t=3 \\ 0 & t>3 \end{cases}$$

$$D^{*2}f = \begin{cases} 0 & t<1 \\ \delta^{(1)}(0)+\frac{1}{2}\delta(0) & t=1 \\ 0 & 1<t<3 \\ -2\delta^{(1)}(0)-\frac{1}{2}\delta(0) & t=3 \\ 0 & t>3 \end{cases}$$

Alternativamente si esprime $f(t)$ come

$$f(t) = \left[1+\frac{1}{2}(t-1)\right]\cdot 1(t-1) - \left[2+\frac{1}{2}(t-3)\right]\cdot 1(t-3)$$

$$D^*f(t) = \frac{1}{2}\cdot 1(t-1) + \left[1+\frac{1}{2}(t-1)\right]\delta(t-1) - \frac{1}{2}\cdot 1(t-3) - \left[2+\frac{1}{2}(t-3)\right]\delta(t-3) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1(t-1) + \delta(t-1) - \frac{1}{2}\cdot 1(t-3) - 2\delta(t-3)$$

$$D^{*2}f(t) = \frac{1}{2}\delta(t-1) + \delta^{(1)}(t-1) - \frac{1}{2}\delta(t-3) - 2\delta^{(1)}(t-3)$$

2.
Vedi dispense del corso.

3.
Vedi dispense del corso.

4.

a.
$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k(x_1 - x_2) - b(Dx_1 - Dx_2) \\ m D^2 x_2 = k(x_1 - x_2) + b(Dx_1 - Dx_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (mD^2 + bD + k)\, x_1 = b\, D x_2 + k\, x_2 + f \\ (bD + k)\, x_1 = m D^2 x_2 + b D x_2 + k x_2 \end{cases}$$

$$(mD^2 + bD + k)(mD^2 + bD + k)\, x_2 =$$
$$= (bD + k)\,[\, b D x_2 + k x_2 + f \,]$$

$$(mD^2 + bD + k)^2 x_2 = (bD + k)^2 x_2 + (bD + k) f$$

$$(m^2 D^4 + 2 m b D^3 + 2 m k D^2)\, x_2 = (bD + k) f$$

$$\boxed{\begin{aligned} & m^2 D^4 x_2(t) + 2 m b D^3 x_2(t) + 2 m k D^2 x_2(t) = \\ & \qquad = b D f(t) + k f(t) \end{aligned}}$$

b. $$G(s) = \frac{bs + k}{m^2 s^4 + 2 m b s^3 + 2 m k s^2}$$

c. $$G(s) = \frac{bs + k}{m s^2 (m s^2 + 2 b s + 2k)}$$

Quattro sono i poli di Σ: due a parte reale negativa ed un polo doppio nell'origine di $\mathbb{C}$. Quindi Σ è instabile. Infatti vale la proposizione: Σ è instabile se e solo se esiste almeno un polo a parte reale positiva od un polo $\in j\mathbb{R}$ (noto che $j0 = 0$) con molteplicità maggiore di uno.

5.

$$U(s) = \mathcal{L}[2t \cdot 1(t)] = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s^2(s+2)^3(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^3} + \frac{K_{22}}{(s+2)^2} + \frac{K_{23}}{s+2} + \frac{K_3}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$K_{21} = \left.\frac{2}{s^2(s+1)}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{2} \qquad K_3 = \left.\frac{2}{s^2(s+2)^3}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+2)^3(s+1)}\right]_{s=0} = -\frac{5}{8}$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2(s+1)}\right]_{s=-2} = -1$$

$$K_{12} + K_{23} + K_3 = 0 \Rightarrow K_{23} = -\frac{11}{8}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{4}t - \frac{5}{8} - \frac{1}{4}t^2 e^{-2t} - te^{-2t} - \frac{11}{8}e^{-2t} + 2e^{-t}$$

per $t > 0$

Si noti che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$. Dalla nota proprietà

$$u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \Leftrightarrow y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$$

Quindi il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

6.

a. $$L(j\omega) = \frac{1000}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+5)(j\omega+10)}$$

$$L(j0) = 10$$

$\omega \to +\infty \quad |L(j\omega)| \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -2\pi$

$1 + K L(s) = 0$ abbia radici puramente immaginarie

$$1 + K \frac{1000}{(s+1)(s+2)(s+5)(s+10)} = 0 \qquad \beta := 1000\,K$$

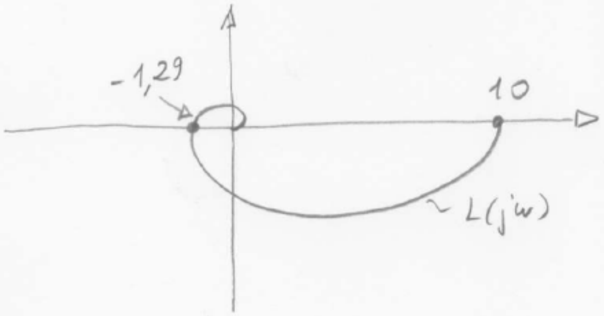
$$s^4 + 18 s^3 + 97 s^2 + 180 s + 100 + \beta = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 97 & 100+\beta \\ 3 & \cancel{18}\ 1 & \cancel{180}\ 10 & 0 \\ 2 & 87 & 100+\beta & 0 \\ 1 & 870-100-\beta & & \end{array}$$

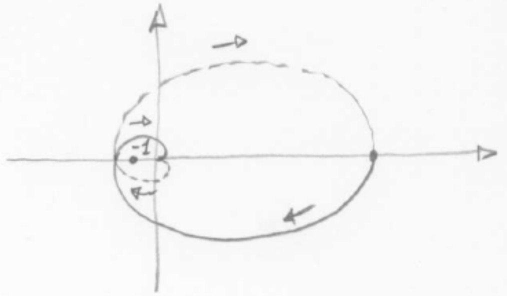
$770 - \beta = 0 \qquad \beta = 770$

$$K = \frac{77}{100} = 0{,}77$$

L'intersezione avviene in $-\frac{1}{K} = -\frac{100}{77} = -1{,}2987$



b.



Il diagramma polare completo circonda due volte, in senso orario, il punto critico -1. $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva, quindi per il Criterio di N. il sistema retroazionato è instabile.

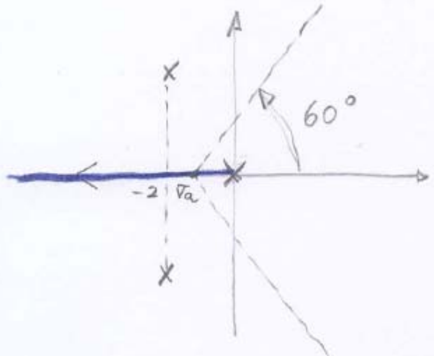
7.

a. Eq. caratteristica del sistema retroazionato

$$1 + K \frac{1}{s\left[(s+2)^2 + 16\right]} = 0 \quad , \quad K > 0$$

Poli ad anello aperto: $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -2 \pm j4$

ASINTOTI: centro in $\sigma_a = \dfrac{p_1 + p_2 + p_3}{3} = -\dfrac{4}{3}$



L'asse reale negativo appartiene al luogo.

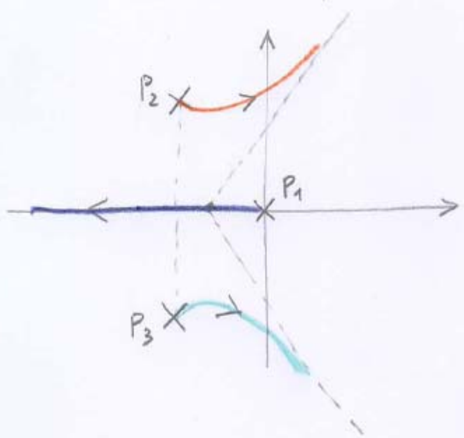
RADICI DOPPIE:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2-j4} + \frac{1}{s+2+j4} = 0$$

$$3s^2 + 8s + 20 = 0$$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16-60}}{3} \notin \mathbb{R}$$

Quindi non esistono radici doppie reali nel luogo.



ANGOLI DI PARTENZA:

$$\theta_2 = \pi - \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{2}{4}\right] =$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = -0{,}4636 = -26{,}^\circ 57$$

$$\theta_3 = +26{,}^\circ 57 \qquad \theta_1 = +180^\circ$$

b.

La configurazione dei poli retroazionati in corrispondenza del guadagno ottimo K^* è σ, $\sigma + j\omega$, $\sigma - j\omega$ $[\sigma, \omega \in \mathbb{R}]$.

Dal teorema del baricentro $3\sigma = -4 \Rightarrow \sigma = -\frac{4}{3}$

Quindi $K^* \ni 1 + K^* \dfrac{1}{\left(-\frac{4}{3}\right)\left[\left(-\frac{4}{3}+2\right)^2 + 16\right]} = 0$

$\Rightarrow K^* \cong 21{,}9$

8.
Il controllore è del tipo

$$C(s) = \frac{y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{(s^2+9)}$$

in cui la coppia di poli immaginari coniugati al denominatore serve per rimuovere il disturbo. Il guadagno ad anello aperto è

$$P(s)C(s) = \frac{5\left(y_2 s^2 + y_1 s + y_0\right)}{(s^2+9)(s+3)}$$

Dalla specifica 2) si ha $\frac{5y_0}{27} = 5$ da cui $y_0 = 18$. Dalla specifica 3) si imposta la seguente identità polinomiale

$$(s^2+9)(s+3) + 5\left(y_2 s^2 + y_1 s + 27\right) = ((s+3)^2+1)(s+c)$$

da cui otteniamo

$$c = 16,2 \quad y_1 = 19,64 \quad y_2 = 3,84$$

Si osservi che la soluzione è soddisfacente in quanto il parametro c = 16,2 corrisponde al polo $-16,2$ la cui dinamica è trascurabile rispetto ai poli $-3 \pm j$.

Il controllore è quindi

$$C(s) = \frac{3,84s^2 + 19,64s + 27}{s^2+9}.$$