**Tracce delle soluzioni**

**1.**

Si ricorda che per una funzione $f \in PC^\infty$ con una sola discontinuità nell'origine vale:

$$D^* f(t) = Df(t) + (f_+ - f_-)\delta(t)$$

$$D^{*2} f(t) = D^2 f(t) + (Df_+ - Df_-)\delta(t) + (f_+ - f_-)\delta^{(1)}(t)$$

L'equazione data con le derivate generalizzate è

$$9D^{*2}y + 7D^* y + 3y = 6D^{*2}u + 4D^* u + 2u \; .$$

Questa equazione è soddisfatta $\forall t \in \mathbb{R}$ e quindi anche per $t = 0$:

$$9\left[D^2 y + (Dy_+ - Dy_-)\delta(t) + (y_+ - y_-)\delta^{(1)}(t)\right] +$$
$$+ 7\left[Dy + (y_+ - y_-)\delta(t)\right] + 3y =$$
$$= 6\left[D^2 u + (Du_+ - Du_-)\delta(t) + (u_+ - u_-)\delta^{(1)}(t)\right] +$$
$$+ 4\left[Du + (u_+ - u_-)\delta(t)\right] + 2u$$

$$\underbrace{\begin{cases} 9(y_+ - y_-) = 6(u_+ - u_-) \\ 9(Dy_+ - Dy_-) + 7(y_+ - y_-) = 6(Du_+ - Du_-) + 4(u_+ - u_-) \end{cases}}$$

Queste sono le relazioni algebriche fra le condizioni iniziali per il sistema dato.

**2.**
Vedi dispense del corso.

**3.** Vedi dispense del corso.

**4**.

a.

$$\begin{cases} m D^2 x_1 = +k(x_2 - x_1) - b D x_1 \\ m D^2 x_2 = -k(x_2 - x_1) - b D x_2 + f \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_2 = (m D^2 + b D + k) x_1 \\ (m D^2 + b D + k) x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m D^2 + b D + k)^2 x_1 = k f + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 2 m b D^3 x_1 + (b^2 + 2 m k) D^2 x_1 + 2 b k D x_1 = k f}$$

b.

$$G(s) = \frac{k}{s\left[m^2 s^3 + 2 m b s^2 + (b^2 + 2 m k) s + 2 b k\right]}$$

c.

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & m^2 & b^2 + 2 m k & 0 \\ 2 & \cancel{2} m \cancel{b} & \cancel{2} \cancel{b} k & 0 \\ 1 & \underbrace{b^2 m + 2 m^2 k - k m^2}_{b^2 m + m^2 k} & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \end{array}$$

La prima colonna della tabella ha tutti elementi positivi e quindi tutte permanenze di segno. Per il criterio di Routh il polinomio $m^2 s^3 + 2mbs^2 + (b^2 + 2mk)s + 2bk$ è hurwitziano. Quindi $\Sigma$ ha un polo semplice nell'origine ed i rimanenti poli con parte reale negativa. Per il teorema sulla stabilità alle perturbazioni $\Sigma$ è SEMPLICEMENTE STABILE.

**5.**

$$Y(s)=10\cdot\frac{1-s}{s(s+1)(s+2)(s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{s+5}$$

Calcolando i residui con le formule usuali otteniamo $A=1$ , $B=-5$ , $C=5$, $D=-1$ . Quindi

$$y(t)=0 \quad \text{per} \quad t<0$$
$$y(t)=1-5e^{-t}+5e^{-2t}-e^{-5t} \qquad \text{per } t\geq 0$$

L'ingresso applicato al sistema $u(t)=1(t)$ (gradino unitario) è una funzione discontinua e l'ordine relativo del sistema è $\rho=2\geq 1$. Quindi da una nota proprietà l'uscita è grado di continuità $\rho-1=1$ ovvero $y(t)\in C^{1,\infty}$ . Considerato che $y(t)$ non può avere grado 2 di continuità (perché implicherebbe un ingresso continuo) si deduce che $y(t)$ ha grado massimo di continuità pari ad 1 $\left[y(t)\in\overline{C^{1,\infty}}\right]$.

**6.**

1)

$$L(j\omega)=\frac{50(j\omega+1)^2}{(j\omega)^3(j\omega+10)}$$

$$\left|L(j\omega)\right|=\frac{50\left(1+\omega^2\right)}{\omega^3\left(100+\omega^2\right)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega)=-\frac{3}{2}\pi-arctg0.1\omega+2arctg\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega\to 0^+$:

Il diagramma polare parte da un punto all'infinito

$$\lim_{\omega\to 0+}\left|L(j\omega)\right|=\infty$$

$$\lim_{\omega\to 0^+}\arg L(j\omega)=-\frac{3}{2}\pi$$

Comportamento per $\omega\to\infty$:

Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty}\left|L(j\omega)\right|=0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega)=-\pi$$

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L\left(j\omega_p\right) = -\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi - arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = -\pi$$

$$-arctg\,0.1\omega + 2arctg\,\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$1 + tg\left(2arctg\,\omega\right) \cdot 0.1\omega = 0$$

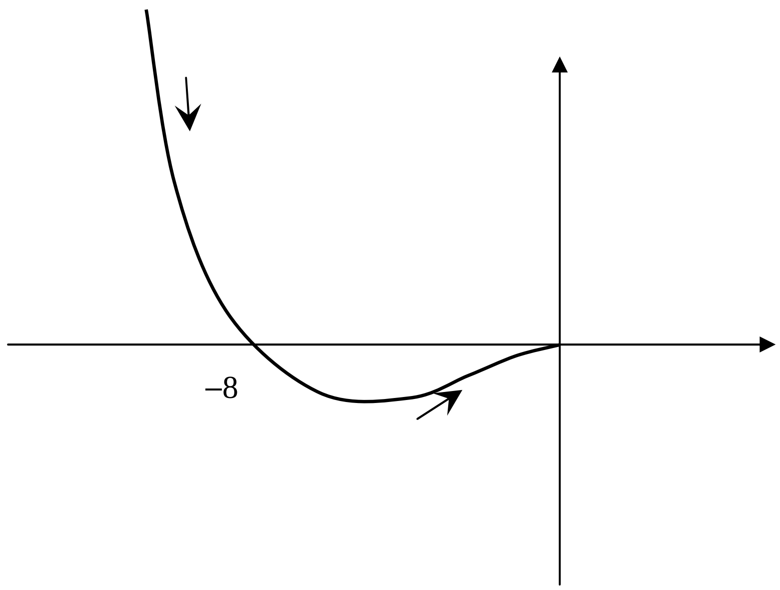
$$1 + \frac{2\omega}{1-\omega^2} \cdot \frac{\omega}{10} = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{5/4} \simeq 1.118 rad/\sec$$

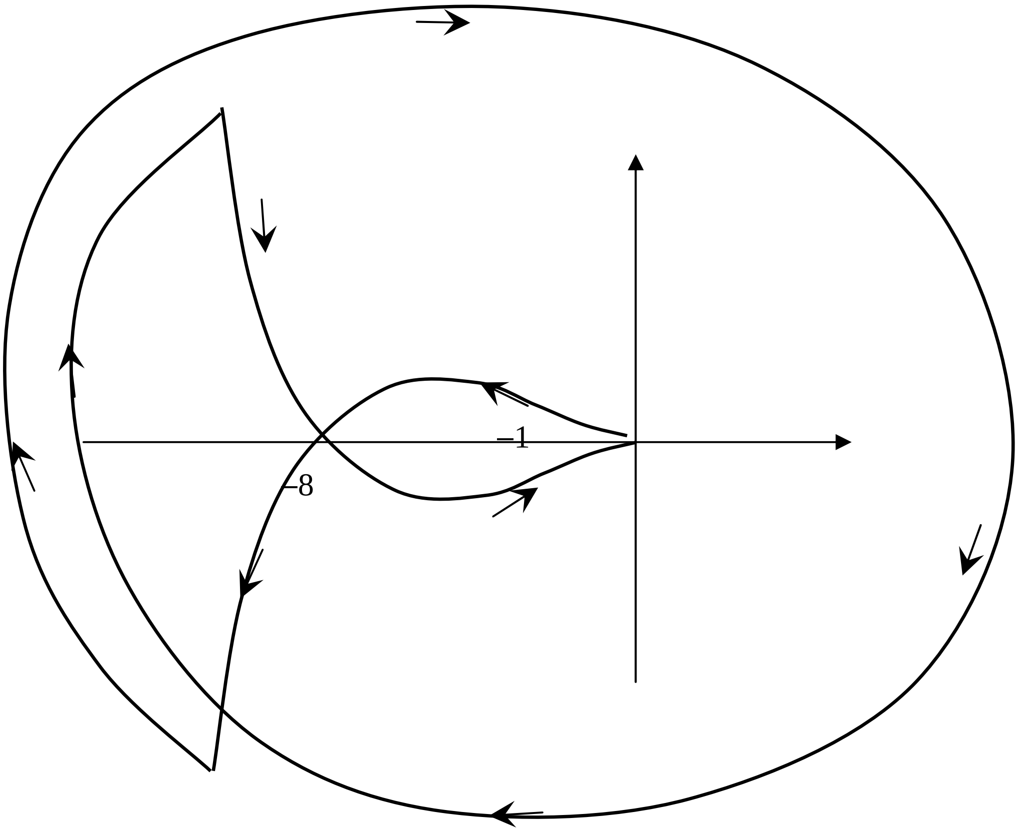
$$\left|L\left(j\omega_p\right)\right| = 8$$

$$L\left(j\omega_p\right) = -8$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:




2) Il diagramma polare completo è:




Si può concludere che per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è **asintoticamente stabile**, infatti il numero totale di giri del diagramma polare completo attorno al punto critico -1 è nullo.

**7.**

La configurazione dei poli e zeri è la seguente:

- uno zero per $s=1$ con molteplicità 1
- uno zero per $s=-1$ con molteplicità 3
- uno polo per $s=-2$ con molteplicità 2

Essendo $n-m=4$ il luogo presenta quattro asintoti.
Tali asintoti formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a=\frac{1}{4}((-1-1-1-2-2)-1)=-2$$

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 5 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\theta_{a,0}=\frac{\pi}{4};\ \ \theta_{a,1}=\frac{3}{4}\pi;\ \ \theta_{a,2}=\frac{5}{4}\pi;\ \ \theta_{a,3}=\frac{7}{4}\pi$$

- le radici doppie, se esistono, sono individuate dalle soluzioni della seguente equazione

  $$\frac{1}{s-1}-3\frac{1}{s+1}-2\frac{1}{s+2}=0$$

  cioè

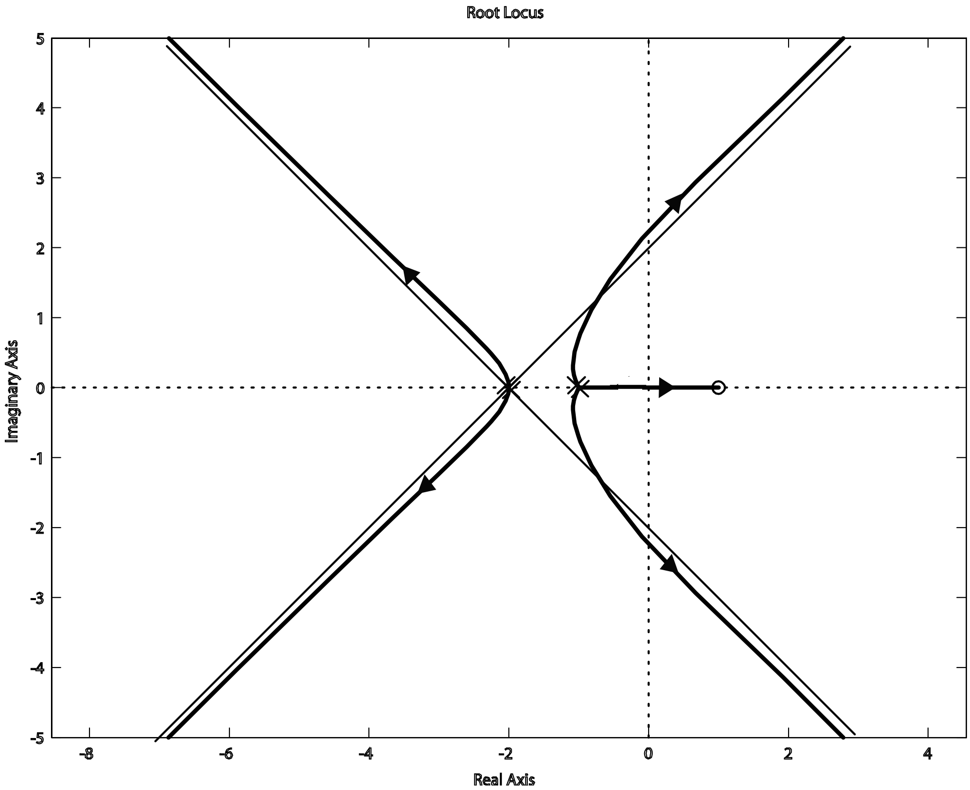
  $$4s^2-10=0$$

  e risultano essere

  $$s_1=-\sqrt{5/2}\cong-1{,}58\,;\qquad s_2=\sqrt{5/2}\cong1{,}58\,.$$

  Queste soluzioni non appartengono al luogo delle radici e quindi non esistono radici doppie sul luogo.

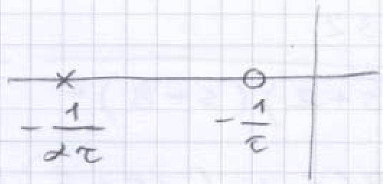
si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1>0$ ha l'andamento riportato in figura:



**8**.

(5)

$$C(s) = K\,\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$$




$$L(s) := C(s)P(s)$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} L(s) = K\cdot\frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{2}\cdot 8^2} = \frac{5K}{64}$$

$$e_r = \frac{1}{1+K_p} \qquad e_r = 0{,}05 = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \quad K_p = 19 \qquad \frac{5K}{64} = 19 \qquad K = \frac{1216}{5} = 243{,}2$$

progetto per cancellazione polo-zero ammissibile:

$$-\frac{1}{\tau} = -2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{2}$$

$$L(s) = \frac{1216}{5}\cdot\frac{1+\frac{1}{2}s}{1+\alpha\frac{1}{2}s}\cdot\frac{10}{(s+2)(s+8)^2} =$$

$$= \frac{1216}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{s+2}}{\alpha s+2}\cdot\frac{\cancel{10}^{\,2}}{\cancel{(s+2)}(s+8)^2} =$$

$$= \frac{2432}{(\alpha s+2)(s+8)^2}$$

Si impone che l'eq. $L(s;\alpha) + \frac{1}{2} = 0$ abbia radici puramente immaginarie. Se questo è possibile significa che il diagramma polare del guadagno di anello interseca l'asse reale in $-\frac{1}{2}$ e quindi si ottiene la stabilità asintotica del sistema retroazionato (dal criterio di Nyquist) con $M_A = 2$.

$$\frac{2432}{(\alpha s+2)(s+8)^2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$4864 + (\alpha s+2)(s^2+16s+64) = 0$$

$$\alpha s^3 + (16\alpha+2)s^2 + (64\alpha+32)s + 4992 = 0$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | $\alpha$ | $64\alpha+32$ | 0 |
| 2 | $16\alpha+2$ | 4992 | 0 |
| 1 | $f(\alpha)$ | 0 | |

$$f(\alpha) = (16\alpha+2)(64\alpha+32) - 4992\cdot\alpha =$$
$$= 1024\alpha^2 - 4352\alpha + 64 = 0$$

$\alpha =$ 4,2352 è da scartare perchè $\alpha \in (0,1)$

0,0148