Tracce delle soluzioni

1.
vedi dispense del corso.

2.
vedi dispense del corso.

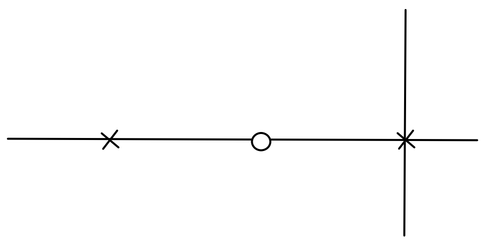
3.
vedi dispense del corso.

4.
1.

$$G(s) = -\frac{Z_f}{Z_{t,i}} = -\frac{R + \frac{1}{sC}}{2R + \frac{R^2}{\frac{1}{sC}}} = -\frac{1 + RCs}{2RCs + R^2C^2s^2} = -\frac{1+Ts}{Ts(2+Ts)}$$

2.

$$G(s) = \left(-\frac{1}{T}\right)\frac{s + \frac{1}{T}}{s\left(s + \frac{2}{T}\right)} \qquad \text{zeri: } z_1 = -\frac{1}{T}\ ; \quad \text{poli: } p_1 = 0\ ,\ p_2 = -\frac{2}{T}$$



3. $G(s) = \dfrac{-s - \frac{1}{T}}{Ts^2 + 2s} \qquad \Rightarrow \qquad TD^2y + 2Dy = -Du - \dfrac{1}{T}u$

5.

$$Y(s) = G(s)L[4\sin(2t)] = \frac{8}{s+2}\cdot\frac{4\cdot 2}{s^2+4} = \frac{64}{(s+2)(s+j2)(s-j2)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+j2} + \frac{B^*}{s-j2}$$

$$A = (s+2)\left.\frac{64}{(s+2)(s^2+4)}\right|_{s=-2} = 8$$

$$B = (s+j2)\left.\frac{64}{(s+2)(s+j2)(s-j2)}\right|_{s=-j2} = -4 + j4$$

Antitrasformando lo sviluppo in fratti semplici otteniamo:

$$y(t) = 8e^{-2t} + 2\left|-4+j4\right|\cos(-2t + \arg(-4+j4)) =$$
$$= 8e^{-2t} + 8\sqrt{2}\sin(2t - \pi/4)$$

Nota: Il termine armonico asintotico poteva essere dedotto direttamente utilizzando il Teorema di Analisi Armonica.

6.

1) <u>Valutazione della stabilità con un metodo esatto</u>.

Dal testo si ricava immediatamente che

$$F(j\omega) = \frac{Ke^{-j2\omega}}{(1+j\omega)(1+j5\omega)}.$$

L'argomento di tale funzione di risposta armonica sarà espresso dalla relazione

$$\arg(F(j\omega)) = -2\omega - \arctan(\omega) - \arctan(5\omega).$$

Al fine di verificare la stabilità del sistema in modo esatto bisogna cercare le intersezioni di questa funzione con l'asse reale negativo. Visto che la funzione di risposta armonica presenta solo poli a fase minima il suo modulo sarà monotonicamente decrescente in funzione di ω e questo consentirà di valutare la stabilità del sistema considerando solo la <u>prima</u> intersezione della funzione con l'asse reale negativo. Si cerchi pertanto il valore di ω per il quale è soddisfatta la relazione

$$-2\omega - \arctan(\omega) - \arctan(5\omega) = -\pi.$$

Non esistendo soluzioni in forma chiusa si proceda tramite un metodo di tipo iterativo.

Si ponga la relazione appena trovata nella forma

$\omega = \dfrac{\pi - \arctan(\omega) - \arctan(5\omega)}{2}$ e si usi, dunque, la seguente espressione per cercare la soluzione del problema

$\omega_{i+1} = \dfrac{\pi - \arctan(\omega_i) - \arctan(5\omega_i)}{2}$ ponendo inizialmente $\omega_i = 1$ (altri valori iniziali vanno ugualmente bene). Dopo poche iterazioni l'algoritmo converge verso la soluzione

$$\omega_p = 0.6477 \quad \mathrm{rad/s}.$$

Il modulo della $F(j\omega)$ calcolato per $\omega = \omega_p$ è espresso dalla relazione

$$\left|F(j\omega_p)\right| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega_p^2}\sqrt{1+25\omega_p^2}} = \frac{K}{4.0382}.$$

Poiché deve essere verificata la relazione $\left|F(j\omega_p)\right| < 1$ concluderemo che il sistema sarà stabile solo se $\boxed{0 < K < 4.0382}$ (si ricordi che la condizione $K > 0$ era imposta dal testo del problema).

2) <u>Valutazione della stabilità con un metodo approssimato</u>.

Rappresentiamo il ritardo finito tramite uno sviluppo di Padé del primo ordine

$$e^{-t_0 s} = \frac{1 - \frac{t_0}{2}s}{1 + \frac{t_0}{2}s} \quad \Rightarrow \quad e^{-2s} = \frac{1-s}{1+s}$$

e sostituiamo questa relazione nella relazione della $F(s)$

$$F(s) = \frac{Ke^{-2s}}{(1+s)(1+5s)} \cong \frac{(1-s)K}{(1+s)^2(1+5s)}.$$

Verifichiamo la stabilità mediante il criterio di Routh

$$1+\frac{(1-s)K}{(1+s)^2(1+5s)}=0$$

$$(1+s)^2(1+5s)+(1-s)K=0$$

$$(1+2s+s^2)(1+5s)-sK-K=0$$

$$5s^3+11s^2+(7-K)s+K+1=0$$

Da quest'ultima relazione è possibile scrivere la tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 5 & 7-K \\ 2 & 11 & K+1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & K+1 & \end{array}$$

con $\alpha=11(7-K)-6(K+1)=72-16K$. Il sistema sarà stabile se $\alpha>0$ ovvero se

$$72-16K>0 \Rightarrow \boxed{K<\frac{72}{16}=4.50}\,.$$

La condizione $K+1>0$ non è influente in quanto si è imposto che $K>0$.
In conclusione, la verifica con Routh fornisce un intervallo di stabilità più ampio sul quale non possiamo fare affidamento considerato che il metodo applicato risulta approssimato.

7.

La configurazione dei poli e zeri è la seguente:

- uno zero per $s=1$ con molteplicità 1
- uno zero per $s=-1$ con molteplicità 3
- uno polo per $s=-2$ con molteplicità 2

Essendo $n-m=4$ il luogo presenta quattro asintoti.
Tali asintoti formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

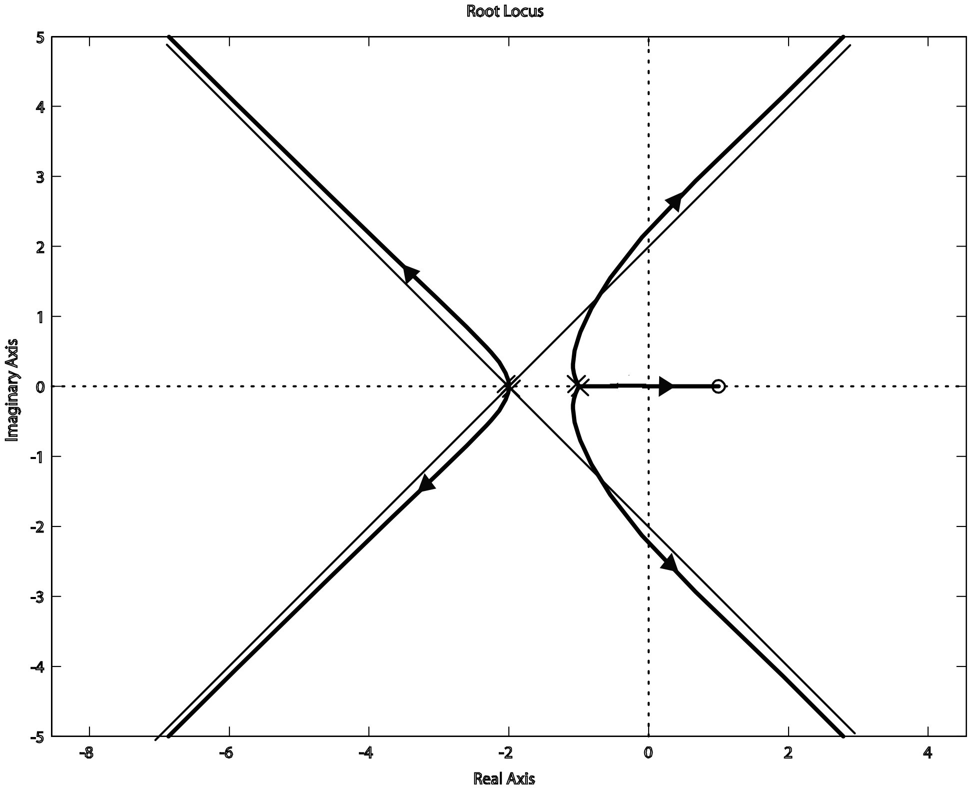
$$\sigma_a=\frac{1}{4}((-1-1-1-2-2)-1)=-2$$

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 5 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli
  $$\theta_{a,0}=\frac{\pi}{4};\ \ \theta_{a,1}=\frac{3}{4}\pi;\ \ \theta_{a,2}=\frac{5}{4}\pi;\ \ \theta_{a,3}=\frac{7}{4}\pi$$
- le radici doppie, se esistono, sono individuate dalle soluzioni della seguente equazione
  $$\frac{1}{s-1}-3\frac{1}{s+1}-2\frac{1}{s+2}=0$$
  cioè
  $$4s^2-10=0$$
  e risultano essere
  $$s_1=-\sqrt{5/2}\cong-1{,}58;\qquad s_2=\sqrt{5/2}\cong 1{,}58.$$

Queste soluzioni non appartengono al luogo delle radici e quindi non esistono radici doppie sul luogo.

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:



8.

1) Il sistema presenta una cancellazione polo-zero (stabile) e quindi il guadagno di anello è

$$L(s) = \frac{(1-s)(s+2)}{(s+4)^2}$$

L'equazione caratteristica corrispondente data da $1 + L(s) = 0$ è equivalente all'equazione polinomiale $7s + 18 = 0$ la cui unica radice è evidentemente asintoticamente stabile. Quindi il sistema è asintoticamente internamente stabile.

2) La funzione di trasferimento richiesta è

$$T_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{(1-s)(s+2)}{7s+18}$$

3) Il sistema retroazionato non è praticamente realizzabile in quanto **la condizione di buona connessione non è soddisfatta**. Infatti si noti che

$$\lim_{|s| \to +\infty} 1 + L(s) = 0 .$$

Questa manchevolezza è indirettamente rilevabile dal fatto che la funzione di trasferimento T_{ry} è impropria: l'applicazione di un gradino di comando (segnale discontinuo) determinerebbe idealmente un segnale infinito sull'uscita controllata e questo è inaccettabile …