Tracce delle soluzioni

1.

$$
\begin{aligned}
D^{*} f(t) = {} & D f(t) + \big(f(0+) - f(0-)\big)\,\delta(t) \\
& + \big(f(3+) - f(3-)\big)\,\delta(t-3)
\end{aligned}
$$

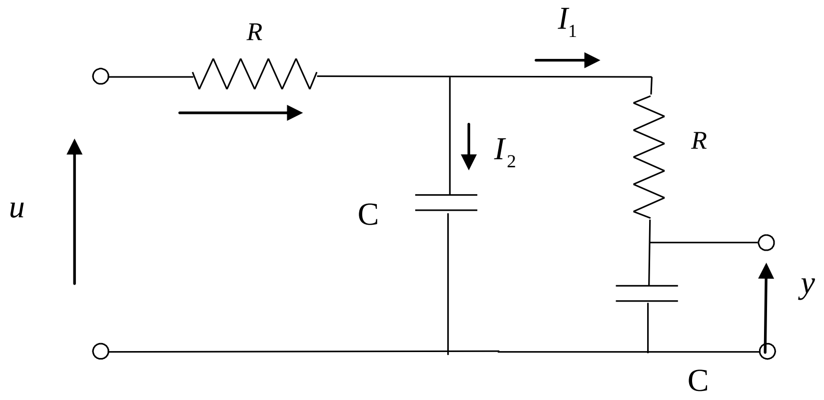
$$
\begin{aligned}
D^{2*} f(t) = {} & D^{2} f(t) + \big(f(0+) - f(0-)\big)\,\delta^{(1)}(t) \\
& + \big(f(3+) - f(3-)\big)\,\delta^{(1)}(t-3) + \\
& + \big(Df(0+) - Df(0-)\big)\,\delta(t) + \\
& + \big(Df(3+) - Df(3-)\big)\,\delta(t-3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^{3*} f(t) = {} & D^{3} f(t) + \big(f(0+) - f(0-)\big)\,\delta^{(2)}(t) + \\
& + \big(f(3+) - f(3-)\big)\,\delta^{(2)}(t-3) + \\
& + \big(Df(0+) - Df(0-)\big)\,\delta^{(1)}(t) + \\
& + \big(Df(3+) - Df(3-)\big)\,\delta^{(1)}(t-3) + \\
& + \big(D^{2}f(0+) - D^{2}f(0-)\big)\,\delta(t) + \\
& + \big(D^{2}f(3+) - D^{2}f(3-)\big)\,\delta(t-3)
\end{aligned}
$$

2.
Vedi dispense del corso.

3.
Vedi dispense del corso.

4.



I

$$U = ZI$$

$$Z = R + \frac{RCs+1}{Cs(RCs+2)}$$

$$Y = \frac{1}{Cs}\cdot I_1 = \frac{1}{Cs}\cdot I\,\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}} = \frac{1}{Cs}\cdot\frac{U}{Z}\,\frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+R+\frac{1}{Cs}}$$

$$G(s) := \frac{Y}{U} = \frac{1}{T^2s^2+3Ts+1}$$

2) L’equazione differenziale associata a G(s) è

$$T^2D^2y+3TDy+y=u$$

5.

1. La funzione di trasferimento fra r ed y è

$$T_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{7}{s^2+10s+16} = \frac{7}{(s+2)(s+8)}$$

Quindi

$$Y(s) = T_{ry}(s)R(s) = \frac{7}{(s+2)(s+8)}\cdot\frac{5}{s}$$

da cui sviluppando in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{K_3}{s+8}$$

Determinando i residui ed antitrasformando si ottiene:

$$y(t) = \left(\frac{35}{16}-\frac{35}{12}e^{-2t}+\frac{35}{48}e^{-8t}\right)1(t)$$

2. La risposta armonica fra r e y è

$$T_{ry}(j\omega) = \frac{7}{(j\omega+2)(j\omega+8)}$$

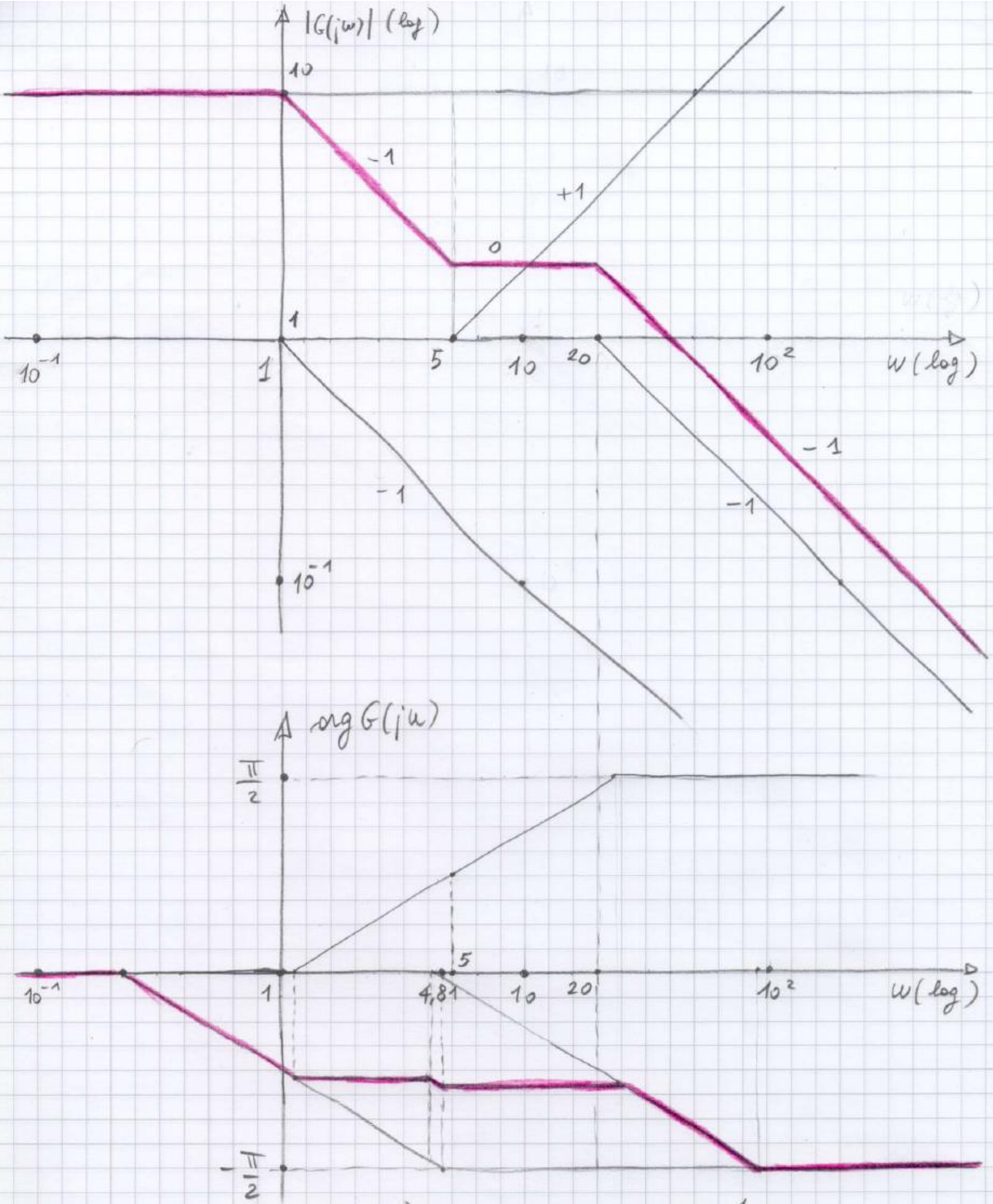
da cui

$$\begin{cases} \left|T_{ry}(j2)\right| = \dfrac{7}{\sqrt{4+4}\sqrt{64+4}} \cong 0,3001 \\ \arg T_{ry}(j2) = -\arctan 1 - \arctan \dfrac{1}{4} \cong -1,0304 \end{cases}$$

Per $t \to +\infty$ vale

$$y(t) = 3 \cdot \left|T_{ry}(j2)\right| \cdot \sin\left(2t + \arg T_{ry}(j2)\right) =$$
$$= 0,9003 \sin(2t - 1,0304)$$

6.



$$G(s) = 40\,\frac{5\left(1+\frac{1}{5}s\right)}{(1+s)\,20\left(1+\frac{1}{20}s\right)} = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)}$$

$$G(j\omega) = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{20}j\omega\right)}$$

7.
Si nota che si ha:

- uno zero s=1 con molteplicità 2
- un polo s=0 con molteplicità 3
- un polo s=-5 con molteplicità 2

Essendo la $K_1 \in [0; +\infty)$ un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zero e di poli.

Essendo $n - m = 3$ il luogo delle radici presenta 3 asintoti.
Gli asintoti del luogo delle radici formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\sigma_a = \frac{1}{3}\left[-5-5-(1+1)\right] = -4$$

Gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\theta_{a,0} = \frac{\pi}{3} \qquad \theta_{a,1} = \pi \quad \theta_{a,2} = \frac{5}{3}\pi$$

Per la determinazione delle radici doppie si ha:

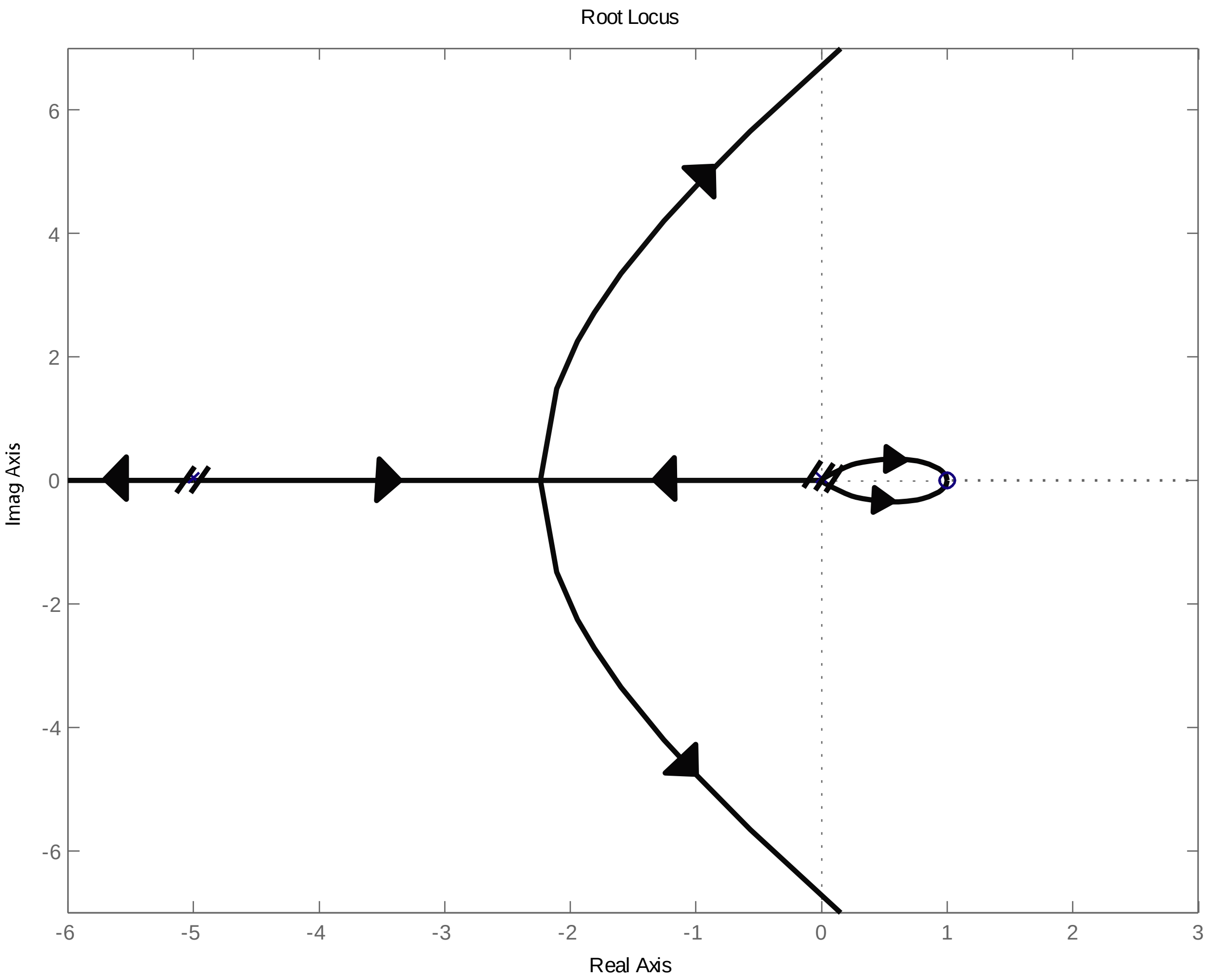
$$\frac{2}{s-1} - \frac{3}{s} - \frac{2}{s+5} = 0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$3s^2 - 15 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{5} = \pm 2.236$$

Dalle considerazioni fatte sopra si osserva che solo $s = -2.236$ appartiene al luogo delle radici.

Di seguito è riportato il luogo delle radici.



8.
Il controllore è del tipo

$$C(s)=\frac{y_2 s^2+y_1 s+y_0}{(s^2+9)}$$

in cui la coppia di poli immaginari coniugati al denominatore serve per rimuovere il disturbo. Il guadagno ad anello aperto è

$$P(s)C(s)=\frac{6\left(y_2 s^2+y_1 s+y_0\right)}{(s^2+9)(s+4)}$$

Dalla specifica 2) si ha $\frac{6y_0}{36}=6$ da cui $y_0=36$. Dalla specifica 3) si imposta la seguente identità polinomiale

$$(s^2+9)(s+4)+6\left(y_2 s^2+y_1 s+36\right)=[(s+2)^2+1](s+c)$$

da cui otteniamo

$$c=50,4 \quad y_1=32,93 \quad y_2=8,4$$

Si osservi che la soluzione è soddisfacente in quanto il parametro c = 50,4 corrisponde al polo $-50,4$ la cui dinamica è trascurabile rispetto ai poli $-2\pm j$.

Il controllore è quindi

$$C(s)=\frac{8,4s^2+32,93s+36}{s^2+9}.$$