Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.
Vedi dispense del corso.

3.

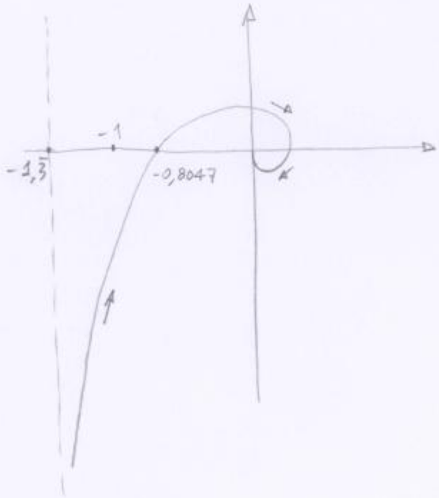
1. $L(j\omega) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+j\omega)^2}$; $|L(j\omega)| = \frac{1}{3\omega}$; $\arg L(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 4\,\mathrm{arctg}\,\omega$

asintoto per $\omega \to 0+$ $\quad \sigma_a = \frac{1}{3}\left(-1-1-(1+1)\right) = -\frac{4}{3} = -1,\overline{3}$

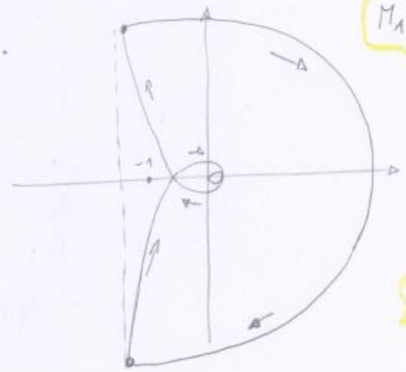
$\omega \to +\infty \quad |L(j\omega)| \to 0 \quad \arg L(j\omega) \to -5 \cdot \frac{\pi}{2}$

$\arg L(j\omega_p) = -\pi \Rightarrow \mathrm{arctg}\,\omega_p = \frac{\pi}{8}, \quad \omega_p = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8} = 0,4142$

$|L(j\omega_p)| = 0,8047 \Rightarrow L(j\omega_p) = -0,8047$



2.



$M_A = \frac{1}{0,8047} \cong 1,24$

M_F :

$|L(j\omega_c)| = 1$

$\omega_c = \frac{1}{3}$

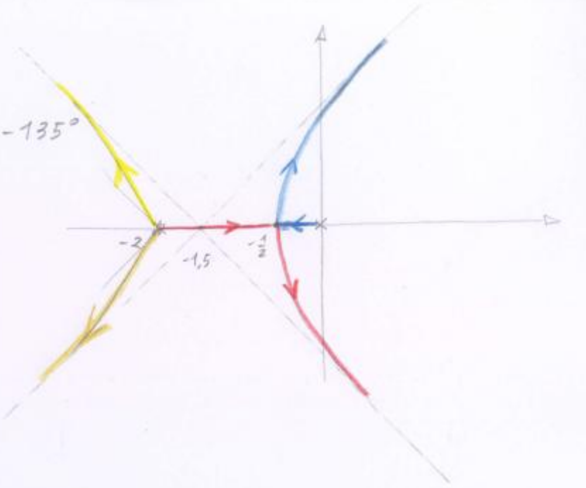
$\arg L(j\omega_c) = -163^\circ{,}74$

$M_F = 16^\circ{,}26$

L(s) non ha poli a parte reale positiva e il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto -1. Quindi per il C. di N. il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

4.

4. Eq. caratteristica $1 + K\frac{1}{s(s+2)^3} = 0$



a) Asintoti del luogo: $\sigma_a = \frac{0-2-2-2}{4} = -1{,}5$

$\theta_{1,a} = +45°$, $\theta_{2,a} = +135°$, $\theta_{3,a} = -45°$, $\theta_{4,a} = -135°$

Radici doppie: $3\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s} = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

Angoli di partenza: da $P_1 = 0$ $\theta_1 = 180°$

da $P_2 = -2$ $\theta_{2,1} = 0°$, $\theta_{2,2} = +120°$, $\theta_{2,3} = -120°$

b) $s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 8s + K = 0$

4	1	12	K
3	~~6~~ 3	~~8~~ 4	0
2	32	3K	0
1	128-9K	0	
0	3K		

$\begin{cases} 128 - 9K > 0 \\ 3K > 0 \end{cases}$

$K \in \left(0, \frac{128}{9}\right) \simeq (0, 14{,}\bar{2})$

eq. ausiliaria per $K = \frac{128}{9}$: $32s^2 + 3\frac{128}{9} = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{4}{3}} \simeq \pm j1{,}1547$

Le intersezioni del luogo con $j\mathbb{R}$ avvengono in $\pm j1{,}1547$.

c) Dalla geometria del luogo si deduce:

$1 + K^* P(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 1 + K^* \frac{1}{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+2)^3} = 0 \Rightarrow K^* = \frac{27}{16} = 1{,}6875$.

5.

5. Tentativamente si cerca con un controllore di ordine 1 di soddisfare tutte le specifiche imposte:

$C(s) = \dfrac{b_1 s + b_0}{s}$, $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ parametri di progetto

$1 + C(s)P(s) = 0 \Leftrightarrow s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0 = 0$

$$\boxed{p_c(s) \triangleq s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0}$$

$T_a = \dfrac{3}{G_s}$, da $T_a = 9$ sec. $\Rightarrow G_s = \dfrac{1}{3}$

Si sceglie un polinomio caratteristico desiderato che soddisfi le specifiche 2) e 3):

$p_d(s) = (s + \frac{1}{3})(s+\alpha)(s+\beta)$ con $\alpha, \beta > \frac{1}{3}$

$$\boxed{p_d(s) = s^3 + \left(\tfrac{1}{3} + \alpha + \beta\right)s^2 + \left(\alpha\beta + \tfrac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)s + \tfrac{1}{3}\alpha\beta}$$

Si impone $p_c(s) \equiv p_d(s)$

$$\begin{cases} b_1 + 2 = \frac{1}{3} + \alpha + \beta \\ b_0 - b_1 + 2 = \alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta) \\ -b_0 = \frac{1}{3}\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{11 - 4\beta}{4\beta + 4}$$

Scegliamo $\beta = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} > \frac{1}{3}$. Quindi $\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{4} \\ b_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$C(s) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{s - \frac{3}{4}}{s}$ È un controllore di ordine minimo che soddisfa le specifiche richieste.