Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.
Vedi dispense del corso.

3.
Vedi dispense del corso.

4.
1.

$$G(s) = -\frac{Z_{tf}}{Z_{ti}}$$

$$Z_{tf} = \frac{1}{sC} + \frac{1}{sC} + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\frac{1}{sC}}{R} = \frac{1+2RCs}{RC^2s^2}$$

$$Z_{ti} = R + R + \frac{R^2}{\frac{1}{sC}} = R\left(2+RCs\right)$$

$$G(s) = -\frac{1+2RCs}{R^2C^2s^2\left(2+RCs\right)}$$

2. Σ ha uno zero in $-\frac{1}{2RC}$ e tre poli in $0, 0,$ e $-\frac{2}{RC}$. I modi sono $1, t, e^{-\frac{2}{RC}t}$.

3.

$$G(s) = -\frac{1+2RCs}{R^2C^2s^2\left(2+RCs\right)} = \frac{-2RCs-1}{R^3C^3s^3+2R^2C^2s^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad R^3C^3D^3y(t) + 2R^2C^2D^2y(t) = -2RCDu(t) - u(t)$$

5.

$$u(t) = 2t \cdot 1(t) \qquad U(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{2}{s^2 (s+1)^4}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 2 \qquad K_{21} = \left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+1)^4}\right]_{s=0} = -2 \cdot \left.\frac{4\,(s+1)^{\cancel{3}\,0}}{(s+1)^{\cancel{8}\,5}}\right|_{s=0} = -8$$

$$K_{12} + K_{24} = 0 \implies K_{24} = -K_{12} = 8$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = -2 \cdot \left.\frac{2\cancel{s}}{s^{\cancel{4}\,3}}\right|_{s=-1} = 4$$

$$K_{23} = \frac{1}{2} D^2\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = \frac{1}{2}(-4) \cdot D\left[\frac{1}{s^3}\right]_{s=-1} = -2 \cdot (-1) \left.\frac{3 \cdot s^2}{s^6}\right|_{s=-1} =$$

$$= 2 \cdot \left.\frac{3}{s^4}\right|_{s=-1} = 6$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{8}{s} + \frac{2}{(s+1)^4} + \frac{4}{(s+1)^3} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{8}{s+1}$$

$$y(t) = 2t - 8 + 2 \cdot \frac{1}{3!} t^3 e^{-t} + 4 \cdot \frac{1}{2!} \cdot t^2 \cdot e^{-t} + 6 \cdot t \cdot e^{-t} + 8 \cdot e^{-t}$$

$$y(t) = 2t - 8 + \frac{1}{3} t^3 e^{-t} + 2 t^2 e^{-t} + 6 t e^{-t} + 8 \cdot e^{-t}$$

Si nota che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$.

Quindi $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \iff y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$.

Pertanto il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

6.

1)

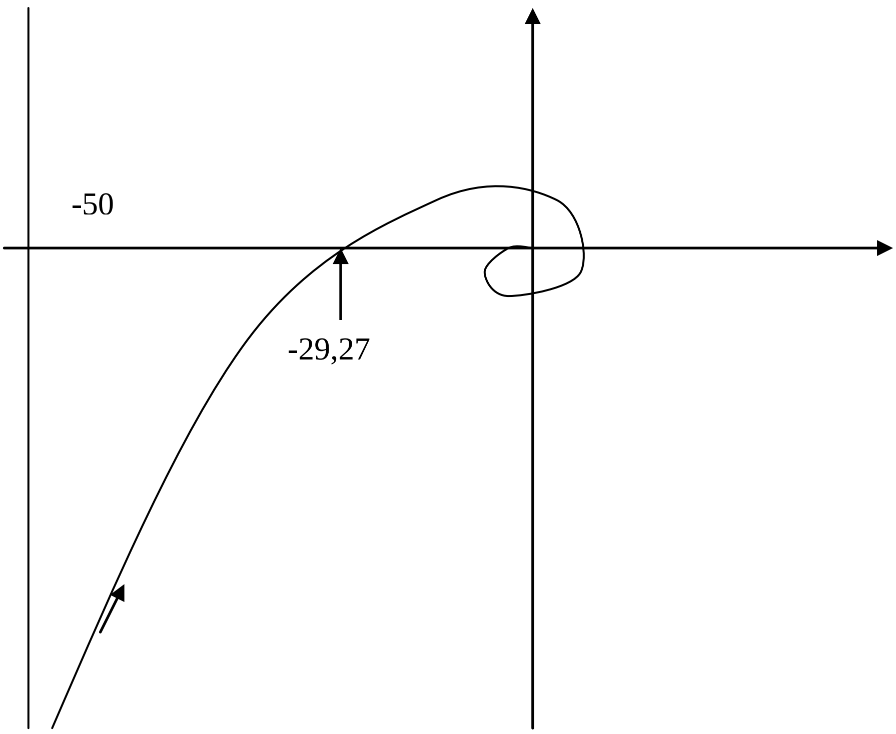
$$P(j\omega)=\frac{10(1-j\omega)^2}{(j\omega)(1+j\omega)^3}$$

$$\arg P(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-5\ \text{arctg}\ \omega$$

$$\left|P(j\omega)\right|=\frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

L'asintoto è verticale (il sistema è di tipo 2) e la sua ascissa è $\sigma_a=10[(-1-1)-(1+1+1)]=-50$.

$$\omega\to\infty\qquad \arg P(j\omega)\to-2\pi-\pi$$



Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p)=-\pi$$

$$5\ \text{arctg}\ \omega_p=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad\omega_p=\ \text{tg}\ \frac{\pi}{10}=0,3249\ \text{ rad}$$

$$\left|P(j\omega_p)\right|=29,27\quad\Rightarrow\quad P(j\omega_p)=-29,27$$

2) Considerato che P(s) non ha poli a parte reale positiva, il caso particolare del Criterio di Nyquist afferma che l'eq. 1 + P(s) = 0 ha tutte le radici a parte reale negativa se e solo se il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico - 1. Dal diagramma sopra riportato risulta invece che il d.p.c. circonda 2 volte (in senso orario) il punto – 1. Si conclude quindi:

$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_+ = 2$$
$$\text{numero radici } \in j\mathbb{R} = 0$$
$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_- = 4 - 2 = 2$$

7.

a) L'equazione caratteristica del sistema è data da $1 + L(s) = 0$ dove il guadagno di anello vale

$$L(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+2)^3}$$

Il grado relativo è $\rho = 3$ e quindi avrò tre asintoti separati tra loro da angoli di $120°$ che si intersecano nel punto ∇_a che viene determinato nel modo seguente

$$\nabla_a = \frac{\sum_i p_i - \sum_i z_i}{\rho} = \frac{-2-2-2-0-(-3)}{3} = -1$$

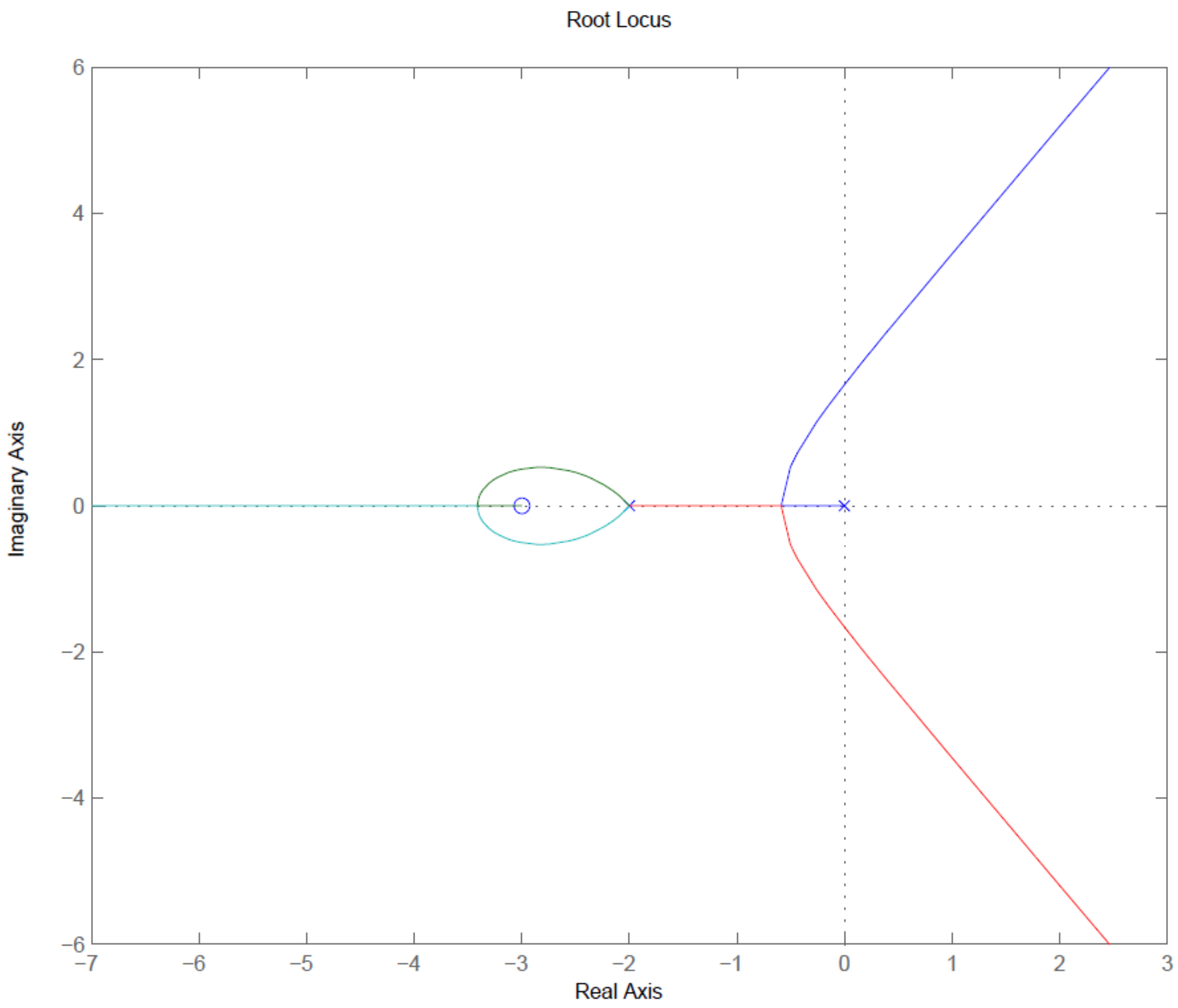
Si determinano le eventuali radici doppie come segue

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_i} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3} = 0$$

ottenendo l'equazione di secondo grado $s^2 + 4s + 2 = 0$ risolvendo la quale si ricava che le radici doppie sono in

$$s_1 = -0.5858 \qquad \text{e} \qquad s_2 = -3.4142$$

Per quanto riguarda gli angoli di partenza, è facile determinare che il polo nell'origine avrà angolo iniziale $\theta_1 = \pi$ mentre i tre poli in -2 avranno angoli di partenza $\theta_{1a} = 0$, $\theta_{1b} = \frac{2}{3}\,\pi$ e $\theta_{1b} = -\frac{2}{3}\,\pi$. Il luogo delle radici per $K > 0$ è quindi il seguente


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
6
4
2
0
−2
−4
−6
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3

b) L'equazione caratteristica è la seguente

$$1 + K \, \frac{s+3}{s\,(s+2)^3} = 0$$

dalla quale viene determinato il polinomio caratteristico

$$p_c(s;K) = s^4 + 6\,s^3 + 12\,s^2 + (8+K)\,s + 3\,K$$

Applichiamo il Criterio di Routh e costruiamo la seguente tabella

$$\begin{array}{c|cccc}
\mathbf{4} & 1 & 12 & 3\,K & 0 \\
\mathbf{3} & 6 & 8+K & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & \text{64-K} & \text{18K} & 0 & \\
\mathbf{1} & f(K) & 0 & & \\
\mathbf{0} & 18\,K & 0 & &
\end{array}$$

dove $f(K) = -K^2 - 52\,K + 512$. Perchè il sistema sia asintoticamente stabile devono quindi valere le condizioni

$$\begin{cases} -K^2 - 52\,K + 512 > 0 \\ 18\,K > 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene che $f(K) > 0$ per $-60.4674 < K < 8.4674$, per cui, tenendo conto della seconda condizione ricavata dalla tabella di Routh, possiamo dire che il sistema è asintoticamaente stabile se

$$K \in (0, 8.4674)$$

Per determinare le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario, annulliamo la riga **1** della tabella di Routh, ponendo $f(K) = 0$ ed abbiamo che la tabella di Routh presenta una singolarità completa per $K = 8.4674$. Ora determino le radici del polinomio ausiliario

$$a_2(s;K) = (64-K)\,s^2 + 18\,K$$

per $K = 8.4674$ ed ottengo che le intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono in

$$s_{1,2} = \pm 1.6567$$

c) Dal luogo delle radici si nota facilmente che il grado di stabilità G_s è massimo nella radice doppia in -0.5858. Risolvendo l'equazione caratteristica $1 + K^* G(s) = 0$ in $s = -0.5858$ si ha che

$$K^* = -\frac{1}{G(-0.5858)}$$

e si ottiene che il guadagno K^* che massimizza G_s vale

$$K^* = 0.6863$$

8.

3) Il controllore di ordine minimo può avere la struttura.

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + 9}$$

$$L(s) = C(s)\,P(s) = \frac{4\,(b_2 s^2 + b_1 s + b_0)}{(s^2+9)(s+2)}$$

$$K_p = \frac{4\,b_0}{9 \cdot 2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b_0 = 18}$$

$$1 + L(s) = 0 \qquad 1 + \frac{4\,(b_2 s^2 + b_1 s + 18)}{s^3 + 2s^2 + 9s + 18} = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 9s + 18 + 4b_2 s^2 + 4b_1 s + 72 = 0$$

$$s^3 + (2 + 4b_2)\,s^2 + (9 + 4b_1)\,s + 90 = 0$$

$$\boxed{P_c(s) = s^3 + (2 + 4b_2)\,s^2 + (9 + 4b_1)\,s + 90}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) = (s + 2 - j)(s + 2 + j)(s + c)$$

dove $c \gg 2$

$$P_d(s) = \left[(s+2)^2 + 1 \right] (s+c) =$$

$$= (s^2 + 4s + 5)(s+c) =$$

$$= s^3 + 4s^2 + 5s +$$

$$+ cs^2 + 4cs + 5c =$$

$$\boxed{P_d(s) = s^3 + (4+c)s^2 + (5+4c)s + 5c}$$

Imponiamo

$$P_d(s) \equiv P_\epsilon(s)$$

$$\begin{cases} 2 + 4b_2 = 4 + c \\ 9 + 4b_1 = 5 + 4c \\ 90 = 5c \end{cases}$$

È un sistema di tre eq. lineari in tre incognite.

$$\boxed{c = 18}$$

$$4b_2 = 20 \Rightarrow \boxed{b_2 = 5}$$

$$4b_1 = -4 + 72 = 68 \Rightarrow \boxed{b_1 = 17}$$

$$c >> 2$$

$$\boxed{C(s) = \frac{5s^2 + 17s + 18}{s^2 + 9}}$$

$$C(s) = 5\,\frac{(s+1{,}7+j0{,}8426)(s+1{,}7-j0{,}8426)}{(s+3j)(s-3j)}$$

Calcolo di F :

$\cancel{r(t) = r_0 1(t)}$ $$T_{ry}(s) = F \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$\cancel{K_p F}$

Imponiamo $T_{ry}(0) = 1$

$$F\,\frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \quad ; \quad k_p = L(0) = 4$$

$$F\,\frac{4}{1+4} = 1 \Rightarrow \boxed{F = \frac{5}{4} = 1{,}25}$$