Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.
Vedi dispense del corso.

3.
Vedi dispense del corso.

4.

① Soluzione

$$m D^2 y = k(u - y) + b(Du - Dy)$$

$$m D^2 y = ku - ky + bDu - bDy$$

$$m D^2 y + bDu + ky = bDu + ku$$

$$G(s) = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

$$\mathfrak{B} \triangleq \{(u,y) \in \mathfrak{B} : m D^{*2} y + b D^{*} y + K y = b D^{*} u + K u\}$$

(2) Convenzionalmente l'impatto avviene all'istante $t = 0$.

$$v \triangleq 20 \ km/h = \frac{20'000}{3'600} = \frac{100}{18} = \frac{50}{9} \ \frac{m}{s}$$

$$\simeq 5,\bar{5} \ \frac{m}{s}$$

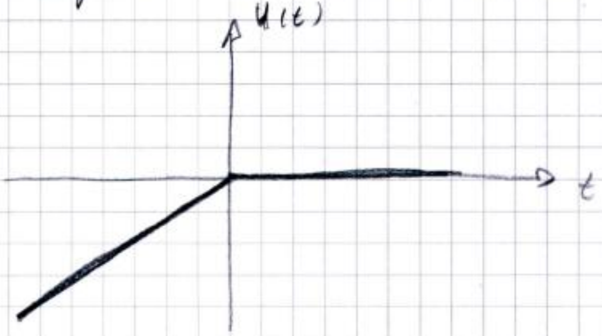
$$u = \frac{50}{9} t \qquad t < 0$$

$$y = \frac{50}{9} t \qquad t < 0$$

$$Du = \frac{50}{9} \qquad Dy = \frac{50}{9} \qquad D^2 y = 0$$

$$b \cancel{\frac{50}{9}} + K\left(\frac{50}{9} t\right) = \cancel{b \frac{50}{9}} + K \frac{50}{9} t \qquad \text{ok!}$$

L'impatto determina che $u(t) = 0 \ \forall t > 0$



Condizioni iniziali al tempo $0-$:

$$u_-, \ y_-, \ Dy_-$$

$$u_- = 0 \qquad y_- = 0 \qquad Dy_- = \frac{50}{9}$$

Condizioni iniziali al tempo $0+$:

$$u_+, \ y_+, \ Dy_+$$

$u_+ = 0$ $\qquad\qquad \rho = 1$

$y_+ = y_-$

$a_2(Dy_+ - Dy_-) = b_1(u_+ - u_-)$

$y_+ = 0 \qquad Dy_+ = Dy_- = \frac{50}{9}$

per $t > 0$ $\quad u(t) = 0$

$$m D^2 y + b D y + k y = b D u + k u$$

$$m D^2 y + b D y + k y = 0$$

e condizioni iniziali $\quad y_+ = 0 \quad Dy_+ = \frac{50}{9}$

$$\Rightarrow \quad m D^2 y_+ = - b D y_+ - k y_+$$

$$D^2 y_+ = -\frac{b}{m} D y_+ = -\frac{b}{m} \cdot \frac{50}{9} =$$

$$= -\frac{5 \cdot \cancel{10^3}}{\cancel{10^4}} \cdot \frac{5\cancel{0}}{9} = -\frac{25}{9} \simeq -2,78 \ m s^{-2}$$

accelerazione subita dai passeggeri.

Il sistema è in evoluzione libera. Calcoliamo i modi di Σ.

$$10^4 s^2 + 5 \cdot 10^3 \cdot s + 10^4 = 0 \qquad 10 s^2 + 5 s + 10 = 0$$

$$2 s^2 + s + 2 = 0 \qquad p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{4} =$$

$$= \frac{-1 \pm j\sqrt{15}}{4} = -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Per $t > 0$ $\quad y(t) = c\, e^{-\frac{1}{4}t} \cdot \text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t + \varphi\right)$

$$c, \varphi \in \mathbb{R}$$

La ~~frequenza~~ pulsazione delle oscillazioni smorzate è pari a $\frac{\sqrt{15}}{4} \simeq 0{,}968$

$\omega = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\quad \omega = 2\pi f \quad$ $f = \frac{\omega}{2\pi} \simeq 0{,}154$ Hertz

5.

$$u(t) = 2t \cdot 1(t) \qquad U(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{2}{s^2 (s+1)^4}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 2 \qquad K_{21} = \left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+1)^4}\right]_{s=0} = -2 \cdot \left.\frac{4\,(s+1)^{\cancel{3}\,0}}{(s+1)^{\cancel{8}\,5}}\right|_{s=0} = -8$$

$$K_{12} + K_{24} = 0 \implies K_{24} = -K_{12} = 8$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = -2 \cdot \left.\frac{2\cancel{s}}{s^{\cancel{4}\,3}}\right|_{s=-1} = 4$$

$$K_{23} = \frac{1}{2} D^2\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = \frac{1}{2}(-4) \cdot D\left[\frac{1}{s^3}\right]_{s=-1} = -2 \cdot (-1) \left.\frac{3 \cdot s^2}{s^6}\right|_{s=-1} =$$

$$= 2 \cdot \left.\frac{3}{s^4}\right|_{s=-1} = 6$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{8}{s} + \frac{2}{(s+1)^4} + \frac{4}{(s+1)^3} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{8}{s+1}$$

$$y(t) = 2t - 8 + 2 \cdot \frac{1}{3!} t^3 e^{-t} + 4 \cdot \frac{1}{2!} \cdot t^2 \cdot e^{-t} + 6 \cdot t \cdot e^{-t} + 8 \cdot e^{-t}$$

$$y(t) = 2t - 8 + \frac{1}{3} t^3 e^{-t} + 2 t^2 e^{-t} + 6 t e^{-t} + 8 \cdot e^{-t}$$

Si nota che $u(t) \in \overline{C}^{0,\infty}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$.

Quindi $u(t) \in \overline{C}^{0,\infty} \iff y(t) \in \overline{C}^{4,\infty}$.

Pertanto il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

6.
Il sistema ammette la seguente funzione di risposta armonica

$$L(j\omega) = 100\frac{(1-j\omega)^2}{(1+j\omega)^2(10+j\omega)^2}$$

il cui modulo è dato da

$$|L(j\omega)| = 100\frac{(1+\omega^2)}{(1+\omega^2)(100+\omega^2)} = \frac{100}{(100+\omega^2)}$$

e la cui fase è data da

$$\arg L(j\omega) = -2\arctan\omega - 2\arctan\omega - 2\arctan\frac{\omega}{10} = -4\arctan\omega - 2\arctan\frac{\omega}{10}.$$

Valutando i valori al limite si ottiene

$$\lim_{\omega\to 0}|L(j\omega)| = 1 \qquad \lim_{\omega\to 0}\arg L(j\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}|L(j\omega)| = 0 \qquad \lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega) = -4\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2} = -3\pi.$$

Al fine di ottenere un miglior tracciamento e di valutare la stabilità del sistema è necessario valutare l'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$-4\arctan\omega_p - 2\arctan\frac{\omega_p}{10} = -\pi$$

$$2\arctan\omega_p + \arctan\frac{\omega_p}{10} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\tan\left(2\arctan\omega_p\right) + \frac{\omega_p}{10}}{1 - \tan\left(2\arctan\omega_p\right)\frac{\omega_p}{10}} = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 - \tan\left(2\arctan\omega_p\right)\frac{\omega_p}{10} = 0$$

Poiché si ha che

$$\tan\left(2\arctan\omega_p\right) = \tan\left(\arctan\omega_p + \arctan\omega_p\right) = \frac{\omega_p+\omega_p}{1-\omega_p\omega_p} = \frac{2\omega_p}{1-\omega_p^2}$$

l'equazione da risolvere sarà

$$1 - \frac{2\omega_p}{1-\omega_p^2}\frac{\omega_p}{10} = 1 - \frac{\omega_p^2}{5(1-\omega_p^2)} = 0$$

$$5 - 5\omega_p^2 - \omega_p^2 = 5 - 6\omega_p^2 = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{5}{6}} = 0{,}9129\ \text{rad/s}$$

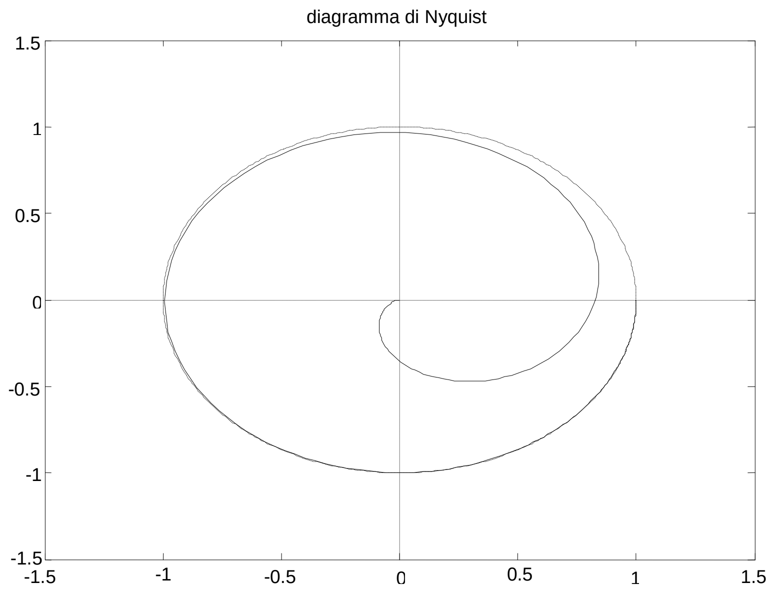
e l'intersezione sarà data da

$$|L(j\omega_p)| = \frac{100}{(100+\omega_p^2)} = \frac{100}{\left(100+\frac{5}{6}\right)} = 0.9917$$

Pertanto

$$L(j\omega_p) = -0{,}9917$$

In accordo con i risultati ottenuti, il diagramma complessivo sarà il seguente



b) Il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico -1. Considerato che L(s) non presenta poli a parte reale negativa ne consegue, per il Criterio di Nyquist, che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Si osservi che tale stabilità è, da un punto di vista realizzativo, alquanto precaria in virtù di un margine di ampiezza estremamente piccolo (M_A=1,0083).

7.

Si osservi innanzitutto che si ha la seguente configurazione di poli e zeri:

- uno zero per $s=1$ con molteplicità 1
- uno zero per $s=-1$ con molteplicità 3
- uno polo per $s=-2$ con molteplicità 2

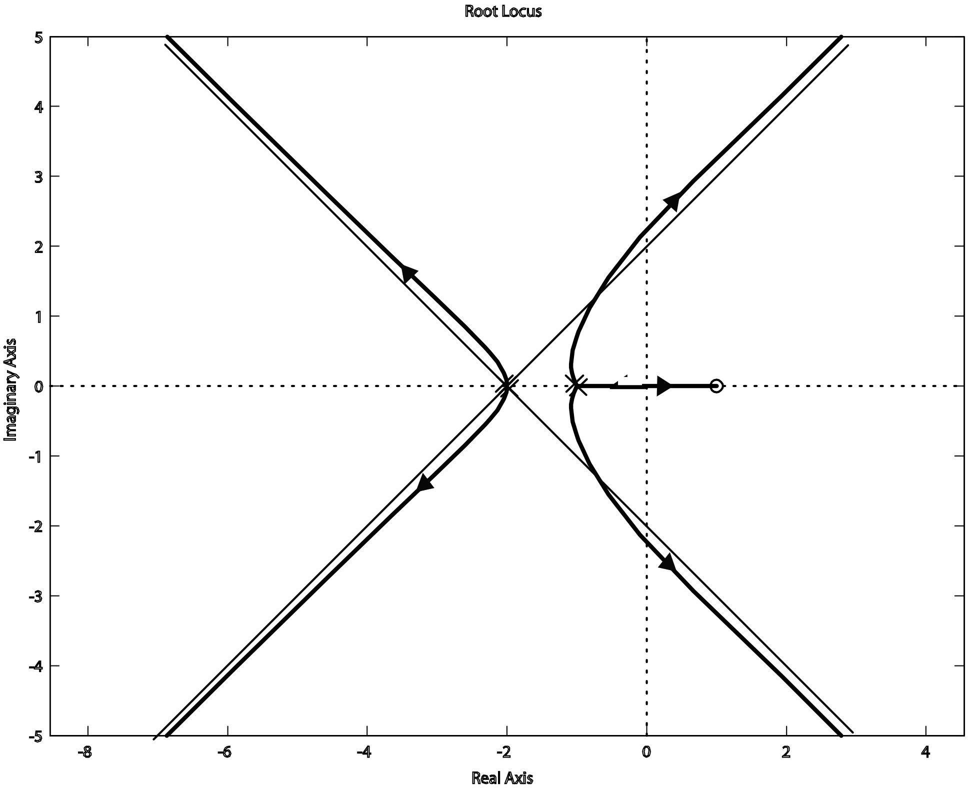
Essendo $n-m=4$ il luogo presenta quattro asintoti.
Tali asintoti formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{1}{4}((-1-1-1-2-2)-1) = -2$$

Tenendo conto delle seguenti osservazioni (luogo diretto):

- un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e di poli.
- il luogo delle radici ha 5 rami.
- gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli
  $$\theta_{a,0} = \frac{\pi}{4}\,;\ \ \theta_{a,1} = \frac{3}{4}\pi\,;\ \ \theta_{a,2} = \frac{5}{4}\pi\,;\ \ \theta_{a,3} = \frac{7}{4}\pi$$
- le radici doppie sono individuate dalle soluzioni della seguente equazione
  $$\frac{1}{s-1} - 3\frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{s+2} = 0$$
  cioè
  $$4s^2 - 10 = 0$$
  e risultano essere
  $$s_1 = -\sqrt{5/2}\,;\qquad s_2 = \sqrt{5/2}$$
  si nota subito che esse non appartengono al luogo delle radici.

si può dedurre che il luogo delle radici per $K_1 > 0$ ha l'andamento riportato in figura:



8.

L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è

$$s^3 + 6s^2 + 8s + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	8	0
2	6	k	0
1	48-k	0	
0	k		

Per la stabilità asintotica debbono valere le seguenti disequazioni:

$48 - k > 0$

$k > 0$

Il campo corrispondente alla stabilità asintotica asintotica del sistema è $k \in (0,\ 48)$.

1. Ricordando che il grado di stabilità (nel piano complesso) *Gs* di un sistema asintoticamente stabile è definito come

$G_s = -\max\{\mathrm{Re}\, p_1, \mathrm{Re}\, p_2, ..., \mathrm{Re}\, p_n\}$, i=1..n, dove i *pi* sono i poli del sistema

e rappresenta la distanza minima dei poli del sistema dall'asse immaginario, il problema può essere risolto effettuando la traslazione nel piano complesso $s = z - 0.2$.

Ponendo $s = z - 0.2$ si ottiene:

$$z^3 + 5.4z^2 + 5.72z - 1.368 + k = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è:

3	1	5.72	0
2	5.4	-1.368+k	0
1	30.888-(k-1.368)	0	
0	-1.368+k		

Per cui i valori di k per cui il sistema retroazionato ammette $G_s \geq 0.2s^{-1}$ sono quelli soddisfacenti il sistema di disequazioni:

$$-1.368 + k > 0$$

$$30.888 - (k - 1.368) > 0$$

cioè $k \in [1.368,\ 32.256]$.