traccia delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.
Vedi dispense del corso

3.

Eq. differenziale: $D^3 y + 4 D^2 y + 8 D y + 9 y = 3 D^2 u + D u + 7 u$

$$u \longrightarrow \boxed{\ \Sigma\ } \longrightarrow y$$

$$\mathfrak{B} := \left\{ (u,y) \in PC^2 \times PC^3 : \; D^{*3} y + 4 D^{*2} y + 8 D^{*} y + 9 y = 3 D^{*2} u + D^{*} u + 7 u \right\}$$

$D^{*} \equiv$ operatore della derivata generalizzata.

Le relazioni fra i valori al tempo $0-$

$y_-,\ Dy_-,\ D^2 y_-\ ;\ u_-,\ Du_-$

ed i valori al tempo $0+$

$y_+,\ Dy_+,\ D^2 y_+\ ;\ u_+,\ Du_+$

sono deducibili uguagliando le espressioni impulsive dell'eq. differenziale generalizzata al tempo $t = 0$.

∘ ∘ ∘ ∘

$$\begin{cases} y_+ = y_- \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dy_+ - Dy_- \\ D^2 y_+ - D^2 y_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_- \end{bmatrix} \end{cases}$$

4.

a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 - b(Dx_1 - Dx_2) \\ mD^2x_2 = -kx_2 + b(Dx_1 - Dx_2) \end{cases}$$

b) Dall'espressione precedente otteniamo

$$\begin{cases} (mD^2 + bD + k)x_1 = f + bDx_2 \\ bDx_1 = mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2 \end{cases}$$

applicando l'operatore $MD^2 + BD + k$ ad entrambi i membri della seconda equazione e BD a entrambi i membri della prima otteniamo

$$\begin{cases} bD(MD^2 + bD + k)x_1 = bD(f + bDx_2) \\ (mD^2 + bD + k)bDx_1 = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2) \end{cases}$$

sottraendo membro a membro le due equazioni eliminiamo x_1 dal sistema e otteniamo

$$bD(f + bDx_2) = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2)$$

da cui

$$m^2D^4x_2 + 2mbD^3x_2 + 2mkD^2x_2 + 2bkDx_2 + k^2x_2 = bDf$$

c) La funzione di trasferimento e'

$$T(s) = \frac{bs}{m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

e il polinomio caratteristico

$$p(s) = m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2$$

d)

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & m^2 & mk & k^2 \\ 3 & 2mb & 2bk & 0 \\ 2 & mk & k^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

l'ultima riga della tabella di Routh e' tutta nulla, si ottiene l'equazione ausiliaria

$$ms^2 + k = 0$$

da cui $s = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$, la prima parte della tabella ha due permanenze di segno, quindi il sistema e' semplicemente stabile.

E) Quando il sistema è in evoluzione libera (f=0), a causa della simmetria del sistema vibrante, è possibile il moto armonico non smorzato delle due masse per il quale $x_1(t) \equiv x_2(t)$.
Conseguentemente lo smorzatore viscoso non dissipa energia in quanto $D(x_1 - x_2) \equiv 0$ (è come se, virtualmente, le due masse fossero connesse da un braccio rigido). Questo comportamento corrisponde ad un sistema semplicemente stabile.
Si osservi che con $f(t) \equiv 0$ la soluzione particolare

$$x_1(t) = x_2(t) = \varepsilon \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

soddisfa il sistema di equazioni differenziali del punto a).

5.

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^3} + \frac{K_{22}}{(s+1)^2} + \frac{K_{23}}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = \frac{1}{(s+1)^3(s+2)}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{21} = \frac{1}{s(s+2)}\bigg|_{s=-1} = \frac{1}{(-1)(1)} = -1$$

$$K_3 = \frac{1}{s(s+1)}\bigg|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2}$$

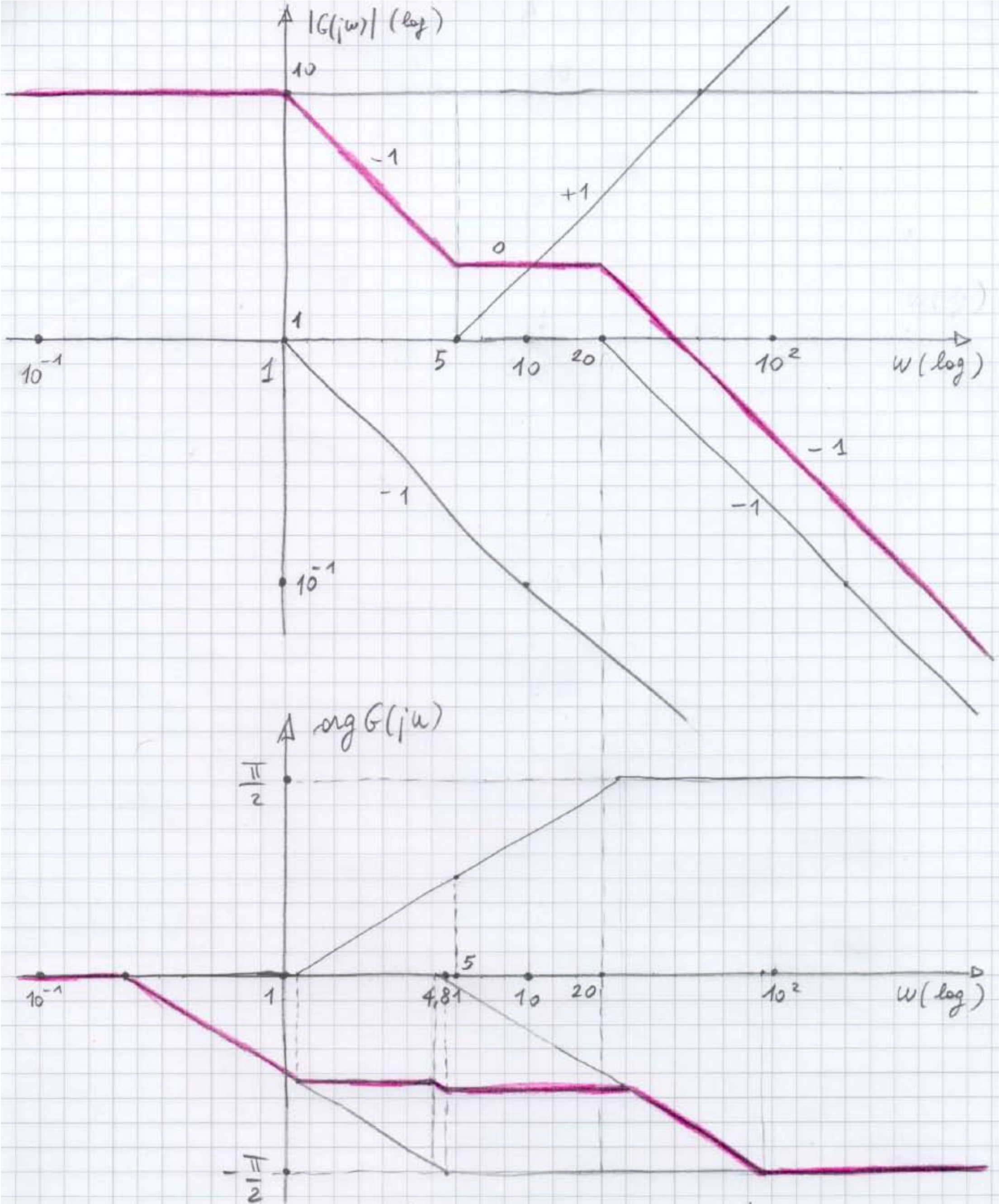
$$K_1 + K_{23} + K_3 = 0 \qquad K_{23} = -K_1 - K_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$K_{22} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right)\bigg|_{s=-1} = -\frac{s+2+s}{s^2(s+2)^2}\bigg|_{s=-1} = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad t \geq 0}$$

6.



$$G(s) = 40\,\frac{5\left(1+\frac{1}{5}s\right)}{(1+s)\,20\left(1+\frac{1}{20}s\right)} = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)}$$

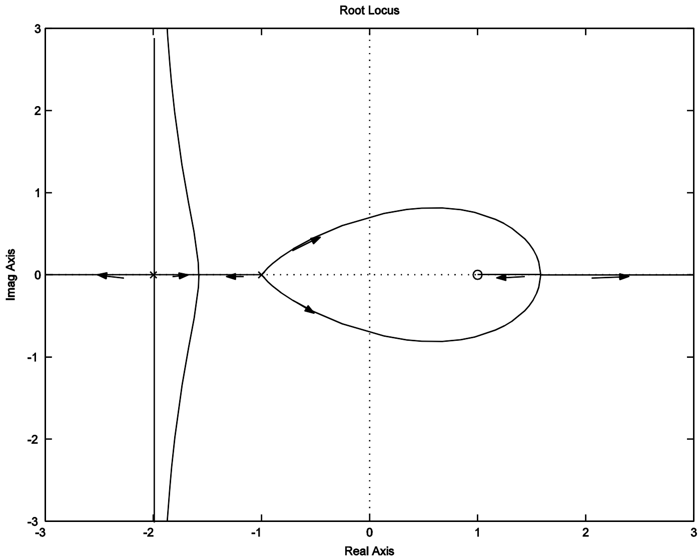
$$G(j\omega) = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{20}j\omega\right)}$$

7.
L'equazione caratteristica è riscrivibile come

$$1+K_1\frac{s-1}{(s+1)^3(s+2)^2}=0 \quad \text{con } K_1=-K\in(-\infty,0]$$

e quindi si tratta di un luogo inverso. Presenta 4 asintoti il cui centro ha ascissa

$$\sigma_a=\frac{-1-1-1-2-2-(+1)}{5-1}=-2$$



Le radici doppie sono determinabili risolvendo l'equazione:

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$\frac{3}{s+1}+\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$4s^2-10=0$$

$$s_{1,2}=\pm\sqrt{5/2}=\pm 1{,}5811$$

8.

5. Tentativamente si cerca con un controllore di ordine 1 di soddisfare tutte le specifiche imposte:

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s} \quad , \quad b_0, b_1 \in \mathbb{R} \text{ parametri di progetto}$$

$$1 + C(s)P(s) = 0 \iff s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0 = 0$$

$$\boxed{P_c(s) \triangleq s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0}$$

$$T_a = \frac{3}{\sigma_s} \quad , \text{ da } T_a = 9 \text{ sec.} \Rightarrow \sigma_s = \frac{1}{3}$$

Si sceglie un polinomio caratteristico desiderato che soddisfi le specifiche 2) e 3):

$$P_d(s) = \left(s + \frac{1}{3}\right)(s+\alpha)(s+\beta) \quad \text{con } \alpha, \beta > \frac{1}{3}$$

$$\boxed{P_d(s) = s^3 + \left(\frac{1}{3} + \alpha + \beta\right)s^2 + \left(\alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)s + \frac{1}{3}\alpha\beta}$$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} b_1 + 2 = \frac{1}{3} + \alpha + \beta \\ b_0 - b_1 + 2 = \alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta) \\ -b_0 = \frac{1}{3}\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{11 - 4\beta}{4\beta + 4}$$

Scegliamo $\beta = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} > \frac{1}{3}$. Quindi $\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{4} \\ b_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$$C(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{s - \frac{3}{4}}{s}$$

È un controllore di ordine minimo che soddisfa le specifiche richieste.