Tracce delle soluzioni

1. Vedi le dispense del corso.

2. Vedi dispense del corso.

3. Vedi dispense del corso.

4.

a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2x_1 = f - kx_1 - b(Dx_1 - Dx_2) \\ mD^2x_2 = -kx_2 + b(Dx_1 - Dx_2) \end{cases}$$

b) Dall'espressione precedente otteniamo

$$\begin{cases} (mD^2 + bD + k)x_1 = f + bDx_2 \\ bDx_1 = mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2 \end{cases}$$

applicando l'operatore $mD^2 + bD + k$ ad entrambi i membri della seconda equazione e bD a entrambi i membri della prima otteniamo

$$\begin{cases} bD(MD^2 + bD + k)x_1 = bD(f + bDx_2) \\ (mD^2 + bD + k)bDx_1 = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2) \end{cases}$$

sottraendo membro a membro le due equazioni eliminiamo x_1 dal sistema e otteniamo

$$bD(f + bDx_2) = (mD^2 + bD + k)(mD^2x_2 + kx_2 + bDx_2)$$

da cui

$$m^2D^4x_2 + 2mbD^3x_2 + 2mkD^2x_2 + 2bkDx_2 + k^2x_2 = bDf$$

c) La funzione di trasferimento e'

$$T(s) = \frac{bs}{m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

e il polinomio caratteristico

$$p(s) = m^2s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2$$

d)

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & m^2 & 2mk & k^2 \\ 3 & m & k & 0 \\ 2 & m^2k & mk^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

l'ultima riga della tabella di Routh e' tutta nulla, si ottiene l'equazione ausiliaria

$$ms^2 + k = 0$$

da cui $s = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$, la prima parte della tabella ha due permanenze di segno, quindi il sistema e' semplicemente stabile.

E) Quando il sistema è in evoluzione libera (f=0), a causa della simmetria del sistema vibrante, è possibile il moto armonico non smorzato delle due masse per il quale $x_1(t) \equiv x_2(t)$.
Conseguentemente lo smorzatore viscoso non dissipa energia in quanto $D(x_1 - x_2) \equiv 0$ (è come se, virtualmente, le due masse fossero connesse da un braccio rigido). Questo comportamento corrisponde ad un sistema semplicemente stabile.
Si osservi che con $f(t) \equiv 0$ la soluzione particolare

$$x_1(t) = x_2(t) = \varepsilon \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

soddisfa il sistema di equazioni differenziali del punto a).

5.

$$Y(s) = G(s)L[4\sin(2t)] = \frac{8}{s+2} \cdot \frac{4 \cdot 2}{s^2+4} = \frac{64}{(s+2)(s+j2)(s-j2)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+j2} + \frac{B^*}{s-j2}$$

$$A = (s+2)\left.\frac{64}{(s+2)(s^2+4)}\right|_{s=-2} = 8$$

$$B = (s+j2)\left.\frac{64}{(s+2)(s+j2)(s-j2)}\right|_{s=-j2} = -4 + j4$$

Antitrasformando lo sviluppo in fratti semplici otteniamo:

$$y(t) = 8e^{-2t} + 2\left|-4 + j4\right|\cos(-2t + \arg(-4+j4)) =$$

$$= 8e^{-2t} + 8\sqrt{2}\sin(2t - \pi/4)$$

Nota: Il termine armonico asintotico poteva essere dedotto direttamente utilizzando il Teorema di Analisi Armonica.

6.

$$L(j\omega) = 8\frac{1 - j\omega}{(j\omega+2)^3}$$

$$|L(j\omega)| = 8\frac{\sqrt{1+\omega^2}}{(\omega^2+4)^{3/2}}$$

$$\arg G(j\omega) = -\mathrm{arctg}\,\omega - 3\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{2}$$

$$1+\alpha 8 \frac{1-s}{(s+2)^3} = 0 \quad \text{abbia radici puramente immaginarie}$$

$$1+\alpha L(\pm j\omega) = 0 \qquad L(\pm j\omega) = -\frac{1}{\alpha}$$

e quindi l'intersezione avviene in $-\frac{1}{\alpha}$

Si pone $k \triangleq 8\alpha$

$$1+k\frac{1-s}{(s+2)^3} = 0 \qquad (s+2)^3 + k(1-s) = 0$$

$$s^3+6s^2+12s+8+k-ks = 0$$

$$s^3+6s^2+(12-k)s+8+k = 0$$

3	1	$12-k$	0
2	6	$8+k$	0
1	#		

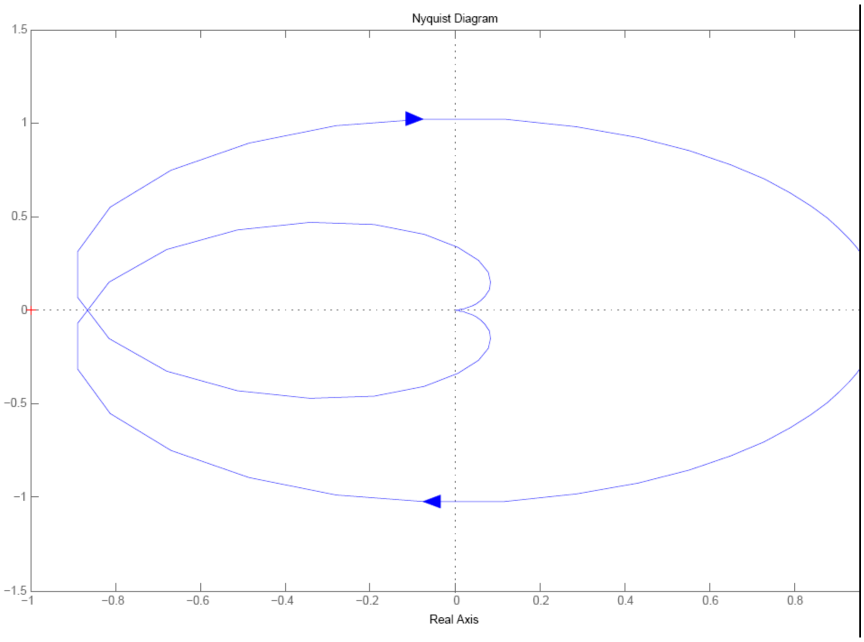
$$\# = 6(12-k)-8-k = 72-6k-8-k = -7k+64 = 0$$

$$7k = 64 \qquad k = \frac{64}{7}$$

$$8\alpha = \frac{64}{7} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{7}$$

L'intersezione avviene in $-\frac{7}{8} \cong -0{,}875$

Il diagramma polare è quindi quello di figura:



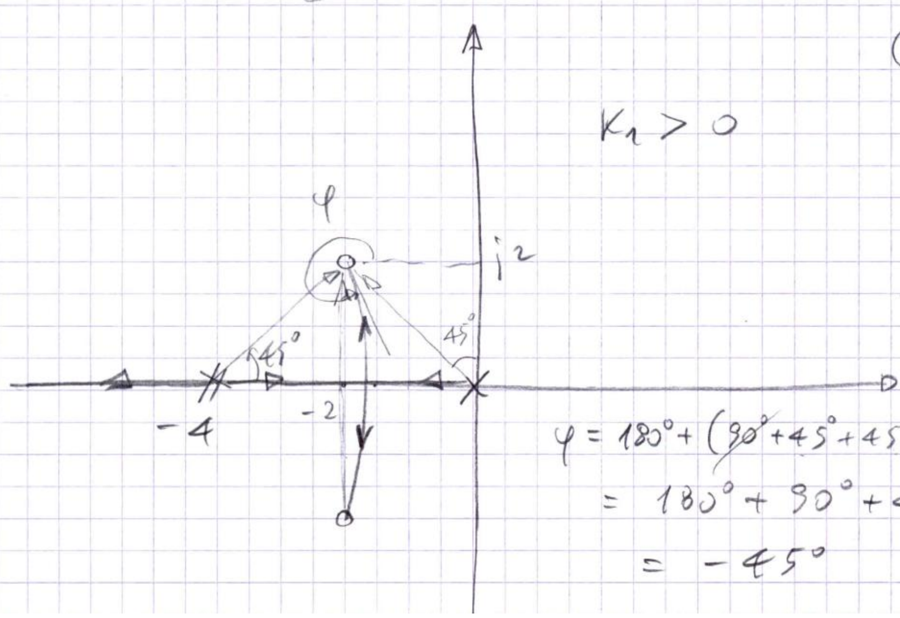
Per il C. di Ny. il sistema retr. è asint. stabile.

Il margine di ampiezza è

$$M_A = \frac{1}{\left|-\frac{7}{8}\right|} = \frac{8}{7} \simeq 1,14$$

7.

a.



$K_1 > 0$

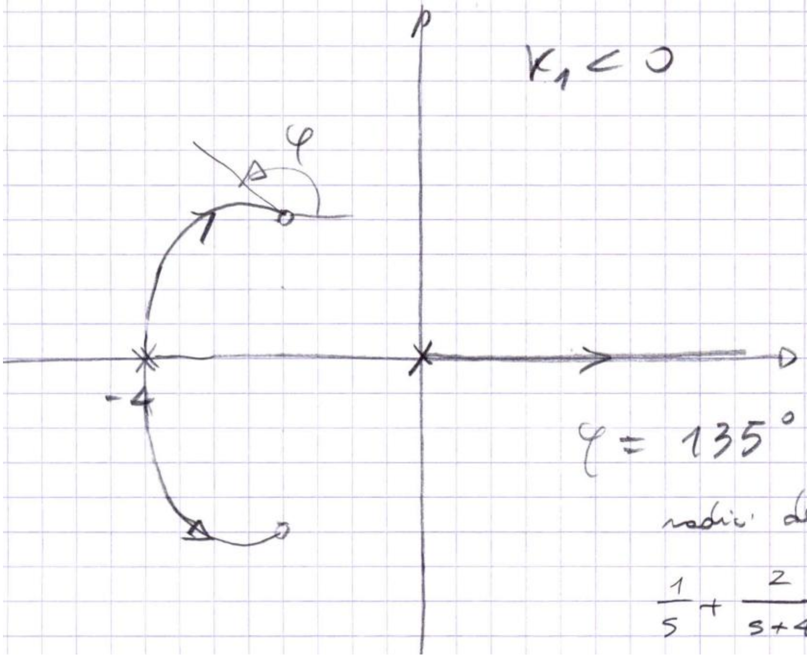
$(s+2)^2 = -4$

$s+2 = \pm j\sqrt{4} = \pm j2$

$s = -2 \pm j2$

Asintoto: $\theta_0 = +\pi$

$$\varphi = 180° + (\cancel{90°}+45°+45°+45°) - \cancel{90°}$$
$$= 180° + 90° + 45° = 270° + 45°$$
$$= -45°$$



$K_1 < 0$

Asintoto: $\theta_0 = 0°$

$\varphi = 135°$

radici doppie:

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+2-j2} - \frac{1}{s+2+j2} = 0$$

radici doppie:

$$\frac{1}{s}+\frac{2}{s+4}-\frac{1}{s+2-j2}-\frac{1}{s+2+j2}=0$$

$$\frac{1}{s}+\frac{2}{s+4}-\left(\frac{s+2\cancel{+j2}+s+2\cancel{-j2}}{(s+2)^2+4}\right)=0$$

$$\frac{1}{s}+\frac{2}{s+4}-\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+4}=0$$

$$(s+4)\left(s^2+4s+8\right)+2s\left(s^2+4s+8\right)-2\left(s^2+2s\right)(s+4)=0$$

$$(3s+4)\left(s^2+4s+8\right)-2\left(s^3+2s^2+4s^2+8s\right)=0$$

$$(3s+4)\left(s^2+4s+8\right)-2\left(s^3+6s^2+8s\right)=0$$

$$3s^3+\cancel{12s^2}+24s+4s^2+\cancel{16s}+32$$

$$-2s^3-\cancel{12s^2}-\cancel{16s}=0$$

$$s^3+4s^2+24s+32=0$$

$$f(s)=s^3+4s^2+24s+32$$

s	$f(s)$
-2	-8
$-2,2$	-12
$-1,8$	$-4,072$
$-1,6$	$-0,2560$
$-1,5$	$1,625$
$-1,58$	$0,12$
$-1,59$	-0.0673

radice doppia $\simeq -1,59$

b) Dal luogo delle radici si deduce che la stabilità asintotica del sistema ret. è data dalla condizione

$$K_1 > 0$$

Verifica con il criterio di Routh.

$$s(s^2+8s+16) + K_1(s^2+4s+8) = 0$$
$$s^3+8s^2+16s+K_1 s^2+4K_1 s+8K_1 = 0$$
$$s^3+(8+K_1)s^2+(16+4K_1)s+8K_1 = 0$$

3	1	$16+4K_1$	$8+K_1>0 \quad K_1>-8$
2	$8+K_1$	$8K_1$	$8K_1>0 \quad K_1>0$
1	$(8+K_1)(16+4K_1)-8K_1$		$128+32K_1+16K_1+4K_1^2-8K_1>0$
0	$8K_1$		$4K_1^2+40K_1+128>0$

radici

$$K_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400-512}}{4}$$

$\Delta = -112 < 0 \Rightarrow$ è sempre >0 $\forall K_1 \in \mathbb{R}$!

c. Dal luogo delle radici si evince che il valore di K_1 che massimizza il grado di stabilità è pari a + infinito, ovvero il grado di stabilità cresce monotonamente fino al raggiungimento degli zeri sul luogo. Il corrispondente valore limite del grado di stabilità è quindi 2.

[Da un punto di vista progettuale occorrerebbe quindi fissare un valore di K_1 "grande" ma non troppo al fine di non incorrere in saturazioni di segnale all'ingresso dell'impianto controllato. Conseguentemente sarebbero necessarie simulazioni per addivenire al progetto di K_1.]

8.

Il controllore è del tipo

$$C(s) = \frac{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{s \cdot (s^2+9)}$$

in cui la coppia di poli immaginari coniugati serve per rimuovere il disturbo armonico ed il polo nell'origine del piano complesso garantisce la reiezione del disturbo costante nel tempo . Il guadagno ad anello aperto è

$$P(s)C(s) = \frac{9 \;\; y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{s(s^2+9)(s+5)}$$

Dalla specifica 2) si ha $\frac{9 \cdot y_0}{9 \cdot 5} = 4$ da cui $y_0 = 20$. Affinché la specifica 3) si imposta la seguente identità polinomiale

$$s(s^2+9)(s+5) + 9 \;\; y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + 20 \;\; = [(s+2)^2+1](s+2)(s+c)$$

da cui otteniamo

$$c = 18 \quad y_1 = \frac{119}{9} \cong 13,2 \quad y_2 = \frac{112}{9} \cong 12,4 \quad y_3 = \frac{19}{9} \cong 2,11$$

Si osservi che la soluzione è soddisfacente in quanto il parametro c = 18 corrisponde al polo -18 la cui dinamica è trascurabile rispetto ai poli $-2, -2 \pm j$.

Il controllore di ordine minimo soddisfacente tutte le specifiche è quindi

$$C(s)=\frac{2{,}11s^3+12{,}4s^2+13{,}2s+20}{s(s^2+9)}\ .$$