Tracce delle soluzioni

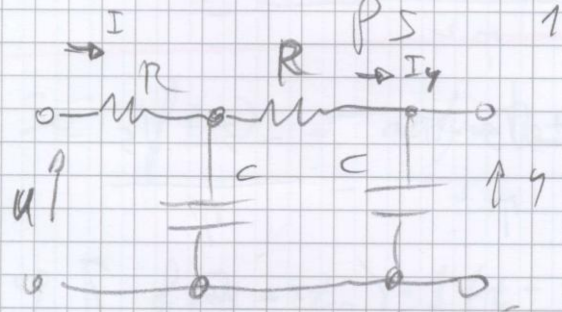
1. Vedi le dispense del corso.

2. Vedi dispense del corso.

3. Vedi dispense del corso.

4.

P5 13/7/10



$$Z_{t1} = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{\frac{1}{sC}+R+\frac{1}{sC}} = R + \frac{\frac{1}{sC}\cdot\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$I = \frac{U}{Z_t} \qquad I_y = I\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot I_y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot I =$$

$$Y = \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{2}{sC}}\cdot\frac{U}{R+\frac{\frac{1}{sC}\left(R+\frac{1}{sC}\right)}{R+\frac{2}{sC}}} =$$

$$= \frac{1}{sC}\cdot\frac{\frac{1}{sC}\,U}{R^2+\frac{2R}{sC}+\frac{R}{sC}+\frac{1}{(sC)^2}} =$$

$$= \frac{U}{1+3R(sC)+R^2(sC)^2} = \frac{U}{(RC)^2s^2+3RCs+1}$$

funzione di trasferimento $(T := RC)$

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 3 T s + 1}$$

eq. diff. $(RC)^2 D^2 y + 3RC\, D y + y = u$

zeri: assenti

poli $T := RC$ $\quad T^2 s^2 + 3 T s + 1 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{-3T \pm \sqrt{9T^2 - 4T^2}}{T^2} =$$

$$= \frac{-3T \pm \sqrt{5} \cdot T}{T^2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{T}$$

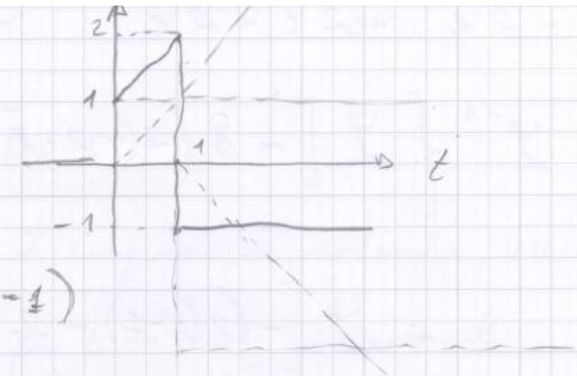
modi: $\left\{ e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{T} \cdot t},\ e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{T} t} \right\}$

Guadagno statico: $G(0) = 1$

5.

5

$$G(s) = \frac{2}{s+1}$$



$$u(t) = (1+t)\cdot 1(t) + \Big(-3-(t-1)\Big)\, 1(t-1)$$

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + e^{-s}\,\mathcal{L}\left[-3-t\right] = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + e^{-s}\left\{-\frac{3}{s} - \frac{1}{s^2}\right\}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = G(s)\frac{1}{s} + G(s)\frac{1}{s^2} + e^{-s}\left\{G(s)\left(-\frac{3}{s}\right) + G(s)\left(-\frac{1}{s^2}\right)\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s+1)}\right] = 2 - 2e^{-t}$$

$$\frac{2}{s(s+1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}$$

$$K_1 = \left.\frac{2}{s+1}\right|_{s=0} = 2\ ; \quad K_2 = \left.\frac{2}{s}\right|_{s=-1} = -2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2(s+1)}\right] = 2t - 2 + 2e^{-t}$$

$$\frac{2}{s^2(s+1)} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+1} = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{2}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{s+1}\right|_{s=0} = 2; \quad K_2 = \left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} = 2; \quad K_{12} + K_2 = 0 \quad K_{12} = -2$$

$$y(t) = \cancel{2} - 2\cancel{e^{-t}} + 2t - \cancel{2} + 2\cancel{e^{-t}}$$

$$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{ e^{-s}\, \mathcal{L}\left[-3\left(2-2e^{-t}\right)\right] + e^{-s}\, \mathcal{L}\left[-\left(2t-2+2e^{-t}\right)\right] \right\} =$$

$$= -2\cancel{e^{-t}} + 2t + 2\cancel{e^{-t}}$$

$$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \mathcal{L}\left[-3\left(2-2e^{-(t-1)}\right)\cdot 1(t-1)\right] \right.$$

$$\left. + \mathcal{L}\left[-\left(2(t-1)-2+2e^{-(t-1)}\right)\cdot 1(t-1)\right] \right\}$$

$$y(t) = -2\cancel{e^{-t}} + 2t + 2\cancel{e^{-t}}$$
$$- 3\left(2-2e^{-(t-1)}\right)\cdot 1(t-1)$$
$$- \left(2(t-1) - 2 + 2e^{-(t-1)}\right)\cdot 1(t-1)$$

Quindi

$$\begin{cases} y(t) = 2t & \text{se } t \in [0, 1) \\ y(t) = \cancel{2t} - 6 + 6e^{-(t-1)} - \cancel{2t} + 4 - 2e^{-(t-1)} & \\ \quad = -2 + 4e^{-(t-1)} & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

metodo alternativo

per $t \in [0,1)$ $u(t) = 1+t \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$

$$U(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{2}{\cancel{s+1}} \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s^2} = \frac{2}{s^2}$$

$y(t) = 2t$ se $t \in [0,1)$

Consideriamo ora $t > 1$: l'ingresso è costante, $u(t) = -1$, e quindi l'uscita $y(t)$, per $t \to +\infty$, avrà il valore $\{$guadagno statico$\} \cdot (-1) = G(0) \cdot (-1) =$

$$y_\infty = 2 \cdot (-1) = -2$$

Quindi $y(t)$ per $t > 1$ sarà così strutturato

$$y(t) = y_\infty + \text{evoluzione libera}$$

$y(t) = -2 + c\,e^{-t}$, dove c è una costante da determinarsi

Utilizziamo la proprietà: Se $u(t)$ è funzione discontinua allora la corrispondente $y(t) \in C^{\rho-1}(\mathbb{R})$ dove ρ è il grado relativo di $G(s)$. Quindi, essendo $\rho = 1$, segue $y(t) \in C^0(\mathbb{R})$:

$$y(1-) = y(1+) \iff 2 = -2 + c\,e^{-1}$$

$$c\,e^{-1} = 4 \qquad c = 4 \cdot e$$

$y(t) = -2 + 4 \cdot e \cdot e^{-t} = -2 + 4\,e^{-(t-1)}$ per $t > 1$

6. Soluzione:

Sia $L(s) := K \cdot P(s) = \dfrac{10s^2}{(s^3-8)(s-1)}$

$$L(j\omega) = \frac{10(j\omega)^2}{\left[(j\omega)^3-8\right](j\omega-1)} = \frac{10\omega^2}{(j\omega^3+8)(j\omega-1)}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{10\omega^2}{(\omega^6+64)^{1/2}\cdot(\omega^2+1)^{1/2}}$$

$$\arg L(j\omega) = \pi - arctg\frac{\omega^3}{8} + arctg\,\omega$$

Studio del diagramma polare di $L(j\omega)$:

Comportamento per $\omega \to 0^+$:
Il diagramma polare parte da un punto dell'asse reale e precisamente da:

$$\lim_{\omega\to 0^+}|L(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega\to 0^+}\arg L(j\omega) = \pi$$

Comportamento per $\omega \to \infty$:
Il diagramma termina nell'origine tangente a uno degli assi coordinati, essendo

$$\lim_{\omega\to\infty}|L(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\arg L(j\omega) = \pi$$

Calcolo dell'intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$\pi - arctg\frac{{\omega_p}^3}{8} + arctg\,\omega_p = -\pi$$

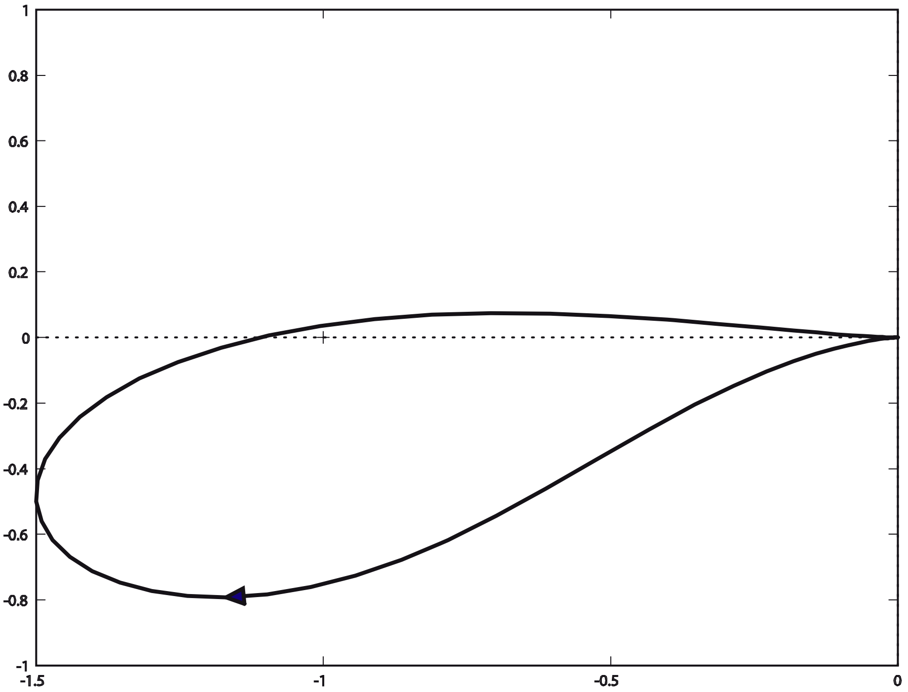
$$arctg\,\omega_p - arctg\frac{{\omega_p}^3}{8} = -2\pi$$

$$\omega_p = 2\sqrt{2}rad/\sec$$

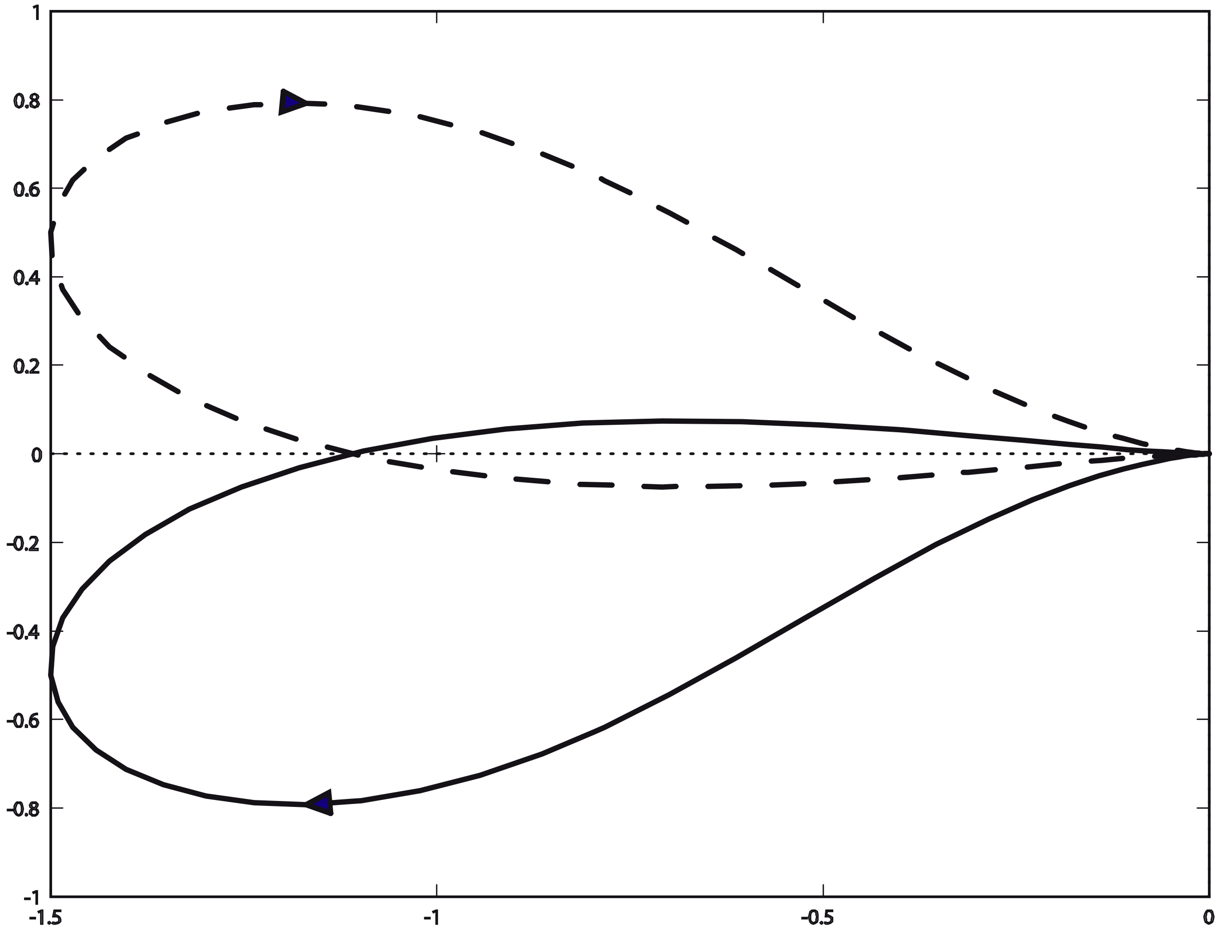
$$|L(j\omega_p)| = \frac{10\cdot(2\sqrt{2})^2}{\left((2\sqrt{2})^6+64\right)^{1/2}\cdot\left((2\sqrt{2})^2+1\right)^{1/2}} = 1.1111$$

$$L(j\omega_p) = -1.1111$$

Il diagramma polare del guadagno di anello risulta pertanto:


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.5
-1
-0.5
0

2) Il diagramma polare completo è:

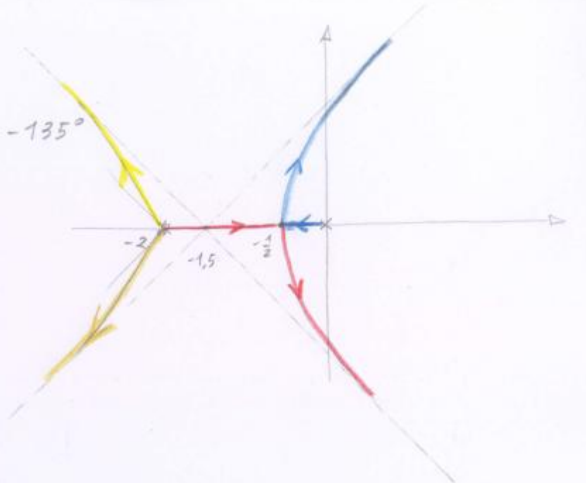


Il sistema ad anello aperto presenta due poli a parte reale positiva (+1, +2) quindi per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se il d.p.c. circonda due volte in senso antiorario il punto critico -1.

Considerato che in effetti il d.p.c. circonda due volte il punto critico <u>in senso orario</u> si conclude che il sistema retroazionato è **instabile** (a causa di quattro poli a parte reale positiva)

7.

4. Eq. caratteristica $1+K\frac{1}{s(s+2)^3}=0$



a) Asintoti del luogo: $\sigma_a=\frac{0-2-2-2}{4}=-1,5$

$\theta_{1,a}=+45°,\ \theta_{2,a}=+135°,\ \theta_{3,a}=-45°,\ \theta_{4,a}=-135°$

Radici doppie: $3\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s}=0 \Rightarrow s=-\frac{1}{2}=-0,5$

Angoli di partenza: da $P_1=0$ $\theta_1=180°$

da $P_2=-2$ $\theta_{2,1}=0°,\ \theta_{2,2}=+120°,\ \theta_{2,3}=-120°$

b) $s^4+6s^3+12s^2+8s+K=0$

4	1	12	K
3	$\cancel{6}$ 3	$\cancel{8}$ 4	0
2	32	3K	0
1	128-9K	0	
0	3K		

$\begin{cases}128-9K>0\\3K>0\end{cases}$

$K\in\left(0,\frac{128}{9}\right)=(0,14,\bar{2})$

eq. ausiliaria per $K=\frac{128}{9}$: $32s^2+3\frac{128}{9}=0 \Rightarrow s_{1,2}=\pm j\sqrt{\frac{4}{3}}\simeq\pm j1,1547$

Le intersezioni del luogo con $j\mathbb{R}$ avvengono in $\pm j1,1547$.

c) Dalla geometria del luogo si deduce:

$1+K^*P(-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow 1+K^*\frac{1}{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+2)^3}=0 \Rightarrow K^*=\frac{27}{16}=1,6875.$

8.

5. Tentativamente si cerca con un controllore di ordine 1 di soddisfare tutte le specifiche imposte:

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s}, \quad b_0, b_1 \in \mathbb{R} \text{ parametri di progetto}$$

$$1 + C(s)P(s) = 0 \iff s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0 = 0$$

$$\boxed{P_c(s) \triangleq s^3 + (b_1+2)s^2 + (b_0 - b_1 + 2)s - b_0}$$

$$T_a = \frac{3}{G_s}, \text{ da } T_a = 9 \text{ sec.} \Rightarrow G_s = \frac{1}{3}$$

Si sceglie un polinomio caratteristico desiderato che soddisfi le specifiche 2) e 3):

$$P_d(s) = \left(s + \frac{1}{3}\right)(s+\alpha)(s+\beta) \quad \text{con } \alpha, \beta > \frac{1}{3}$$

$$\boxed{P_d(s) = s^3 + \left(\frac{1}{3} + \alpha + \beta\right)s^2 + \left(\alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta)\right)s + \frac{1}{3}\alpha\beta}$$

Si impone $P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} b_1 + 2 = \frac{1}{3} + \alpha + \beta \\ b_0 - b_1 + 2 = \alpha\beta + \frac{1}{3}(\alpha+\beta) \\ -b_0 = \frac{1}{3}\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{11 - 4\beta}{4\beta + 4}$$

Scegliamo $\beta = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} > \frac{1}{3}$. Quindi $\begin{cases} b_0 = -\frac{1}{4} \\ b_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$$C(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{s - \frac{3}{4}}{s}$$

È un controllore di ordine minimo che soddisfa le specifiche richieste.