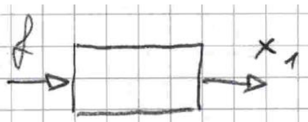
Traccia delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.
Vedi le dispense del corso.

3.
Vedi le dispense del corso.

4.



$$\begin{cases} m D^2 x_1 = f - k(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad k x_2 = m D^2 x_1 + k x_1 - f \\ m D^2 x_2 = k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3) \\ m D^2 x_3 = k(x_2 - x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k x_3 = m D^2 x_2 + 2k x_2 - k x_1 \\ m D^2 x_3 + k x_3 = k x_2 \end{cases} \qquad (m D^2 + k) x_3 = k x_2$$

$$(m D^2 + k)(m D^2 x_2 + 2k x_2 - k x_1) = k^2 x_2$$

$$(m D^2 + k)(m D^2 + 2k) x_2 - k(m D^2 + k) x_1 = k^2 x_2$$

$$(m^2 D^4 + 2km D^2 + km D^2 + 2k^2 - k^2) x_2 = k(m D^2 + k) x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3km D^2 + k^2) x_2 = k(m D^2 + k) x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3km D^2 + k^2)(m D^2 x_1 + k x_1 - f) = k^2 (m D^2 + k) x_1$$

$$(m^2 D^4 + 3km D^2 + k^2)(m D^2 + k) x_1 - k^2 (m D^2 + k) x_1 = (m^2 D^4 + 3km D^2 + k^2) f$$

$$(m^2 D^4 + 3km D^2)(m D^2 + k) x_1 = (m^2 D^4 + 3km D^2 + k^2) f$$

$$\text{f.d.t. } G(s) = \frac{m^2 s^4 + 3km s^2 + k^2}{(m^2 s^4 + 3km s^2)(m s^2 + k)} = \frac{m^2 s^4 + 3km s^2 + k^2}{m \cdot s^2 (m s^2 + 3k)(m s^2 + k)}$$

5.

$$u(t) = 2t\cdot 1(t) \qquad U(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s^2(s+1)^4}$$

$$Y(s) = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_{21}}{(s+1)^4} + \frac{K_{22}}{(s+1)^3} + \frac{K_{23}}{(s+1)^2} + \frac{K_{24}}{s+1}$$

$$K_{11} = \left.\frac{2}{(s+1)^4}\right|_{s=0} = 2 \qquad K_{21} = \left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{12} = D\left[\frac{2}{(s+1)^4}\right]_{s=0} = -2\cdot\left.\frac{4(s+1)^{\cancel{3}0}}{(s+1)^{\cancel{8}5}}\right|_{s=0} = -8$$

$$K_{12} + K_{24} = 0 \implies K_{24} = -K_{12} = 8$$

$$K_{22} = D\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = -2\cdot\left.\frac{2\cancel{s}}{s^{\cancel{4}3}}\right|_{s=-1} = 4$$

$$K_{23} = \frac{1}{2}D^2\left[\frac{2}{s^2}\right]_{s=-1} = \frac{1}{2}(-4)\cdot D\left[\frac{1}{s^3}\right]_{s=-1} = -2\cdot(-1)\left.\frac{3\cdot s^2}{s^6}\right|_{s=-1} =$$

$$= 2\cdot\left.\frac{3}{s^4}\right|_{s=-1} = 6$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{8}{s} + \frac{2}{(s+1)^4} + \frac{4}{(s+1)^3} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{8}{s+1}$$

$$y(t) = 2t - 8 + 2\cdot\frac{1}{3!}t^3e^{-t} + 4\cdot\frac{1}{2!}\cdot t^2\cdot e^{-t} + 6\cdot t\cdot e^{-t} + 8\cdot e^{-t}$$

$$y(t) = 2t - 8 + \frac{1}{3}t^3e^{-t} + 2t^2e^{-t} + 6te^{-t} + 8\cdot e^{-t}$$

Si noti che $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}}$ ed il grado relativo di $G(s)$ è $\rho = 4$.

Quindi $u(t) \in \overline{C^{0,\infty}} \iff y(t) \in \overline{C^{4,\infty}}$.

Pertanto il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è 4.

6.

a)

$$L(s)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-s)^2}{s(1+s)^2\left(1+\frac{1}{4}s\right)}$$

$$L(j\omega)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-j\omega)^2}{j\omega(1+j\omega)^2\left(1+\frac{1}{4}j\omega\right)}$$

$$\arg L(j\omega)=-\frac{\pi}{2}-4\arctan\omega-\arctan\frac{\omega}{4}$$

ascissa dell'asintoto verticale: $\sigma_a=\frac{1}{4}\left(-1-1-1-1-\frac{1}{4}\right)=-\frac{17}{16}\cong-1,06$

Calcolo dell'intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega)=-\pi \Leftrightarrow 4\arctan\omega+\arctan\frac{\omega}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$1-\frac{\omega}{4}\tan\left(4\arctan\omega\right)=0$$

sviluppando questa equazione e definendo $x:=\omega^2$ si ottiene

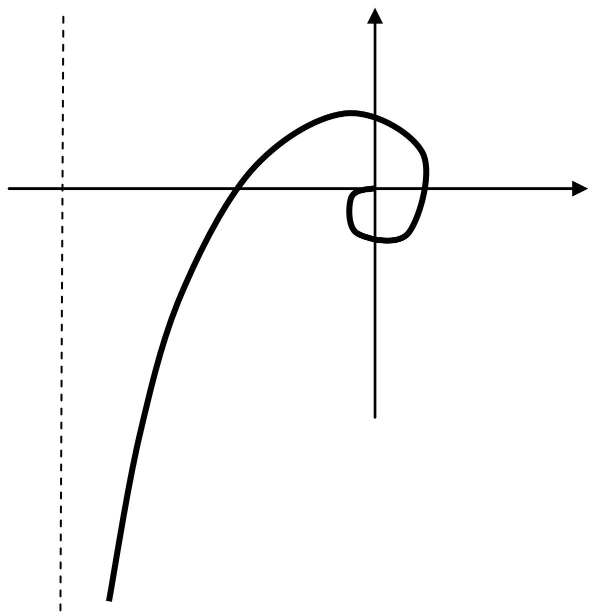
$2x^2-7x+1=0$

$x_{1,2}=0{,}1492 \quad 3{,}3508 \qquad \Rightarrow \quad \omega_1=0{,}3863 \quad \omega_2=1{,}8305$

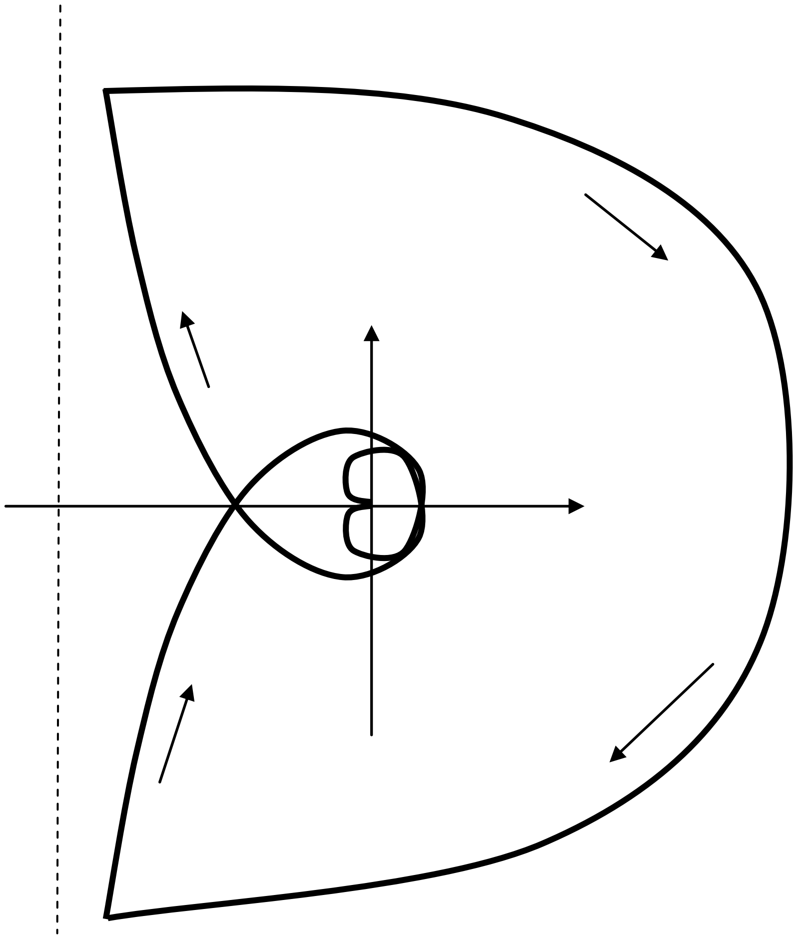
$\arg L(j\omega_1)=-3{,}1416 \qquad \arg L(j\omega_2)=-6{,}2832$

si scarta la seconda soluzione (che corrisponde all'intersezione del diagramma con l'asse reale positivo) e si ottiene:

$L(j\omega_1)=-0{,}6442$



b) Si traccia il diagramma polare completo:



Il guadagno di anello non ha poli a parte reale negativa ed il d.p.c. non tocca né circonda il punto critico – 1. Ne consegue, per il criterio di Nyquist, che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

c)

$$M_A = \frac{1}{|L(j\omega_1)|} = \frac{1}{0,6442} = 1,55$$

7.

$$(s^2+3s+2)(s+2a)+s+a=0$$

$$s^3+3s^2+2s+2a(s^2+3s+2)+s+a=0$$

$$s^3+3s^2+3s+2a\left(s^2+3s+2+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$1+2a\,\frac{s^2+3s+5/2}{s(s^2+3s+3)}=0$$

$$1+2a\,\frac{\left(s+\frac{3}{2}+j\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}-j\frac{1}{2}\right)}{s\left(s+\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=0$$

Calcolo delle radici doppie:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{s+\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{s+\frac{3}{2}+j\frac{1}{2}}-\frac{1}{s+\frac{3}{2}-j\frac{1}{2}}=0$$

$$\frac{1}{s}+\frac{2(s+1{,}5)}{(s+1{,}5)^2+0{,}75}-\frac{2(s+1{,}5)}{(s+1{,}5)^2+0{,}25}=0$$

$$f(s)\triangleq\frac{1}{s}+2(s+1{,}5)\left[\frac{1}{(s+1{,}5)^2+0{,}75}-\frac{1}{(s+1{,}5)^2+0{,}25}\right]$$

L'asse reale negativo appartiene al luogo ($a>0$) e quindi, tentativamente, si cercano le radici nell'intervallo $[-5,-1]$

$f(-5) = -0{,}178$

$f(-4) = -0{,}195$

$f(-3) = -0{,}133$

$f(-2) = 0{,}5$

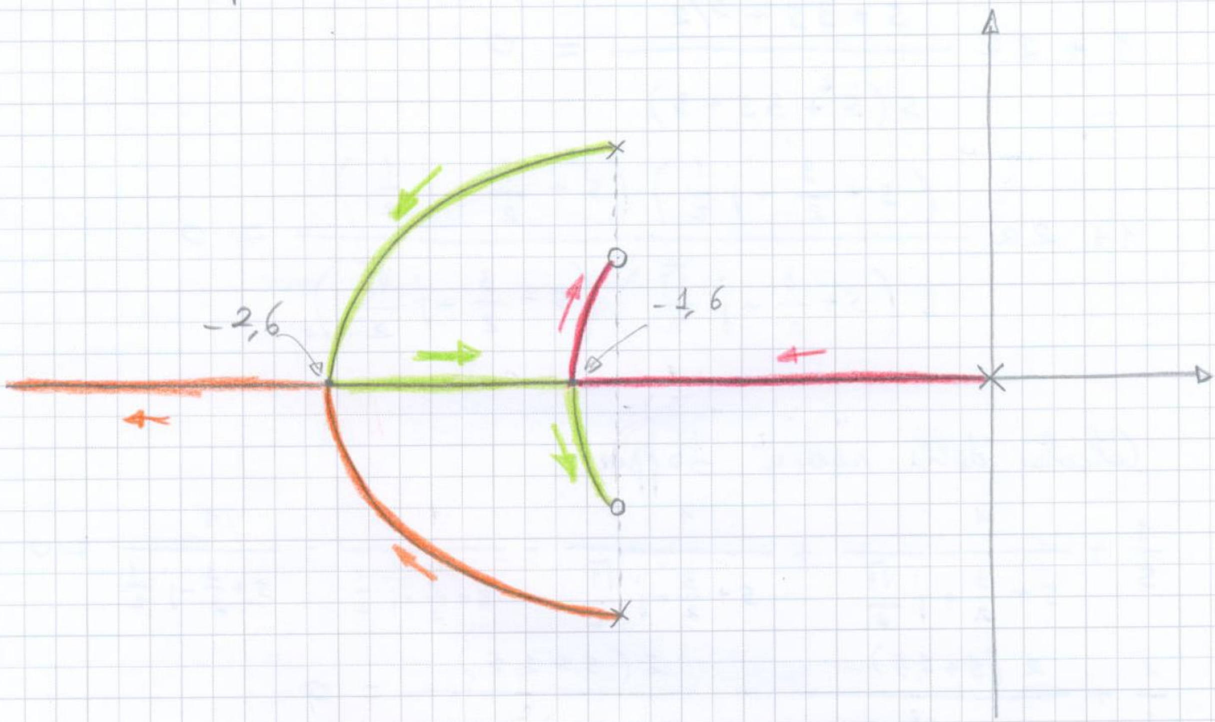
$f(-1) = -2$

$\left.\begin{matrix} f(-3) = -0{,}133 \\ f(-2) = 0{,}5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(-2{,}5) = 0{,}057 \; ; f(-2{,}6) = -0{,}0002$

$\left.\begin{matrix} f(-2) = 0{,}5 \\ f(-1) = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(-1{,}5) = -0{,}666$

$f(-1{,}6) = -0{,}118$

radici doppie in $s_1 \simeq -2{,}6$ e $s_2 \simeq -1{,}6$



8.

L'ordine minimo per il controllore $C(s)$ è 2.

1. Disturbo sinusoidale $d(t) = A\ \sin(\omega\, t + 4) = 3\ \sin(2\, t + 4)$; per la reiezione asintotica al disturbo pongo un polo complesso coniugato alla pulsazione $\omega = 2$. Il controllore di ordine minimo sarà della forma:

$$C(s) = \frac{b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}{(s^2 + 4)}$$

3. Costante di posizione $K_p = 4$:

$$L(s) = C(s)\ P(s)$$

$$K_p = L(0) = \frac{b_0}{2} \ \Rightarrow\ K_p = \frac{b_0}{2} = 4 \ \Rightarrow\ b_0 = 8$$

2. Sistema retroazionato con poli dominanti in $-2 \pm j$.
Polinomio caratteristico:

$$p_c(s) = (s^2+4)(s+2)+4\,b_2\,s^2+4\,b_1\,s+32 = 0 \ \Rightarrow\ p_c(s) = s^3+(4\,b_2+2)s^2+(4\,b_1+4)s+40 = 0$$

Polinomio desiderato:

$$p_d(s) = [(s+2)^2 + 1]\ (s+\alpha) = s^3 + (\alpha+4)\ s^2 + (4\,\alpha + 5)\ s + 5\,\alpha$$

Si impone $p_c(s) = p_d(s)$ e si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha + 4 = 4\,b_2 + 2 \\ 4\,\alpha + 5 = 4\,b_1 + 4 \\ 5\,\alpha = 40 \end{cases} \ \Rightarrow\ \begin{cases} b_1 = 8.25 \\ b_2 = 2.5 \\ \alpha = 8 \end{cases}$$

Verifico: $-\alpha = -8 << -2 \ \Rightarrow$ i poli $-2 \pm j$ sono dominanti

4. Errore a regime nullo: $\{$guadagno statico fra r ed $y\} = 1$
Calcolo F:

$$F\,\frac{L(0)}{1+L(0)} = 1 \ \Rightarrow\ F\,\frac{4}{5} = 1 \ \Rightarrow\ F = \frac{5}{4} = 1.25$$