## Traccia delle soluzioni

**1.**
Vedi dispense del corso.

**2.**
Vedi le dispense del corso.

**3.**
Vedi le dispense del corso.

**4**.
a) Dall'equazione della dinamica otteniamo

$$\begin{cases} mD^2 x_1 = f - kx_1 + b(Dx_2 - Dx_1) \\ mD^2 x_2 = -b(Dx_2 - Dx_1) - kx_2 \end{cases}$$

b) Dalle equazioni precedenti trasformando secondo Laplace con condizioni iniziali tutte nulle otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ ms^2 X_2 = -b(sX_2 - sX_1) - kX_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = F - kX_1 + b(sX_2 - sX_1) \\ (ms^2 + bs + k)X_2 = bsX_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = \dfrac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)} \\ (ms^2 + bs + k)X_1 = F + bsX_2 \end{cases}$$

$$(ms^2 + bs + k)X_1 = F + bs\frac{bsX_1}{(ms^2 + bs + k)}$$

$$G(s) := \frac{X_1}{F} = \frac{ms^2 + bs + k}{(ms^2 + bs + k)^2 - b^2 s^2} =$$

$$= \frac{ms^2 + bs + k}{m^2 s^4 + 2mbs^3 + 2mks^2 + 2bks + k^2}$$

**5**.

determiniamo la risposta forzata per $t \in (0,2)$

$u(t) = t \qquad U(s) = \frac{1}{s^2}$

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{10}{s+3} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+3}$$

$$K_{11} = \left.\frac{10}{s+3}\right|_{s=0} = \frac{10}{3}$$

$$K_2 = \left.\frac{10}{s^2}\right|_{s=-3} = \frac{10}{9}$$

$$K_{12} + K_2 = 0 \qquad K_{12} = -K_2 = -\frac{10}{9}$$

$$Y(s) = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{10}{9}\,\frac{1}{s} + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$y(t) = \frac{10}{3}\,t - \frac{10}{9} + \frac{10}{9}\,e^{-3t}$$ ok!

per $t > 2$ il sistema è in evoluzione libera.

$\Rightarrow \quad y(t) = c\,e^{-3t}$

Studio delle relazioni fra le condizioni iniziali al tempo $t = 2$.

$$y(2-) = \frac{10}{3}\cdot 2 - \frac{10}{9} + \frac{10}{9}e^{-6} = \frac{6\cdot 10 - 10}{9} + \frac{10}{9}e^{-6} = \frac{50}{9} + \frac{10}{9}e^{-6}$$

$y(2+) = ?$

$\rho = 1 \qquad u(t) \in C^{-1} \Rightarrow y(t) \in C^{-1+1} = C^{0}$

$\Rightarrow y(2+) = y(2-)$

$$y(2+) = c\, e^{-6}$$

$$\frac{50}{9} + \frac{10}{9}e^{-6} = c\, e^{-6}$$

$$c = \frac{50}{9}e^{6} + \frac{10}{9}$$

Quindi per $t>2$

$$\boxed{y(t) = \left(\frac{50}{9}e^{6} + \frac{10}{9}\right)e^{-3t}}$$

**6.**

1)

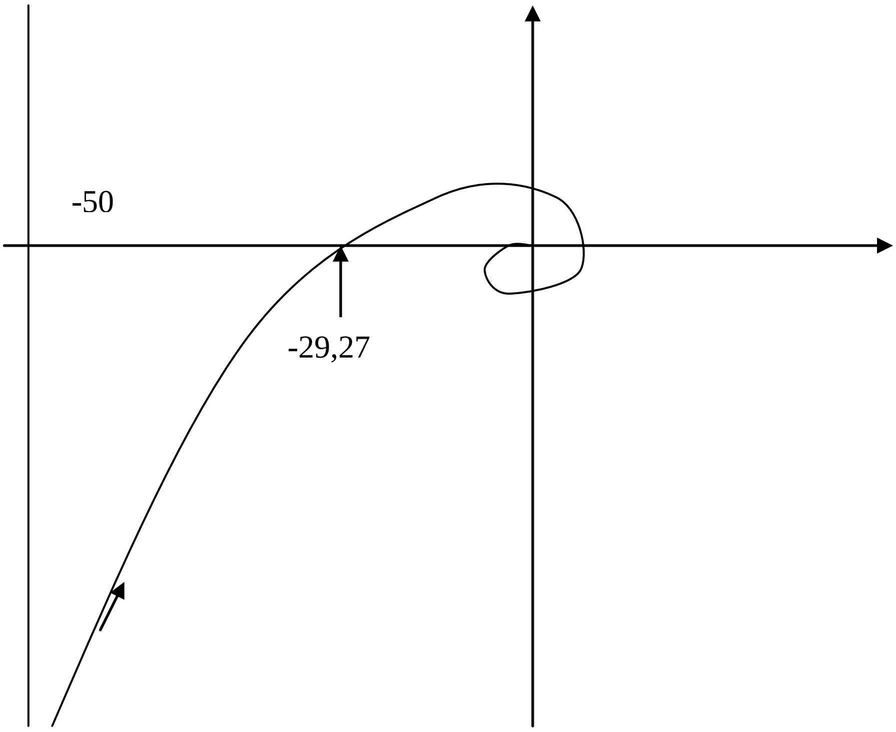
$$P(j\omega) = \frac{10(1-j\omega)^2}{(j\omega)(1+j\omega)^3}$$

$$\arg P(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 5\ \text{arctg}\ \omega$$

$$|P(j\omega)| = \frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

L’asintoto è verticale (il sistema è di tipo 2) e la sua ascissa è $\sigma_a = 10[(-1-1)-(1+1+1)] = -50$.

$$\omega \to \infty \qquad \arg P(j\omega) \to -2\pi - \pi$$




Calcolo intersezione con l’asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p) = -\pi$$

$$5 \text{ arctg } \omega_p = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \text{ tg } \frac{\pi}{10} = 0,3249 \text{ rad}$$

$$\left|P(j\omega_p)\right| = 29,27 \quad \Rightarrow \quad P(j\omega_p) = -29,27$$

2) Considerato che P(s) non ha poli a parte reale positiva, il caso particolare del Criterio di Nyquist afferma che l’eq. 1 + P(s) = 0 ha tutte le radici a parte reale negativa se e solo se il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico - 1. Dal diagramma sopra riportato risulta invece che il d.p.c. circonda 2 volte (in senso orario) il punto – 1. Si conclude quindi:

$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_+ = 2$$

$$\text{numero radici } \in j\mathbb{R} = 0$$

$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_- = 4 - 2 = 2$$

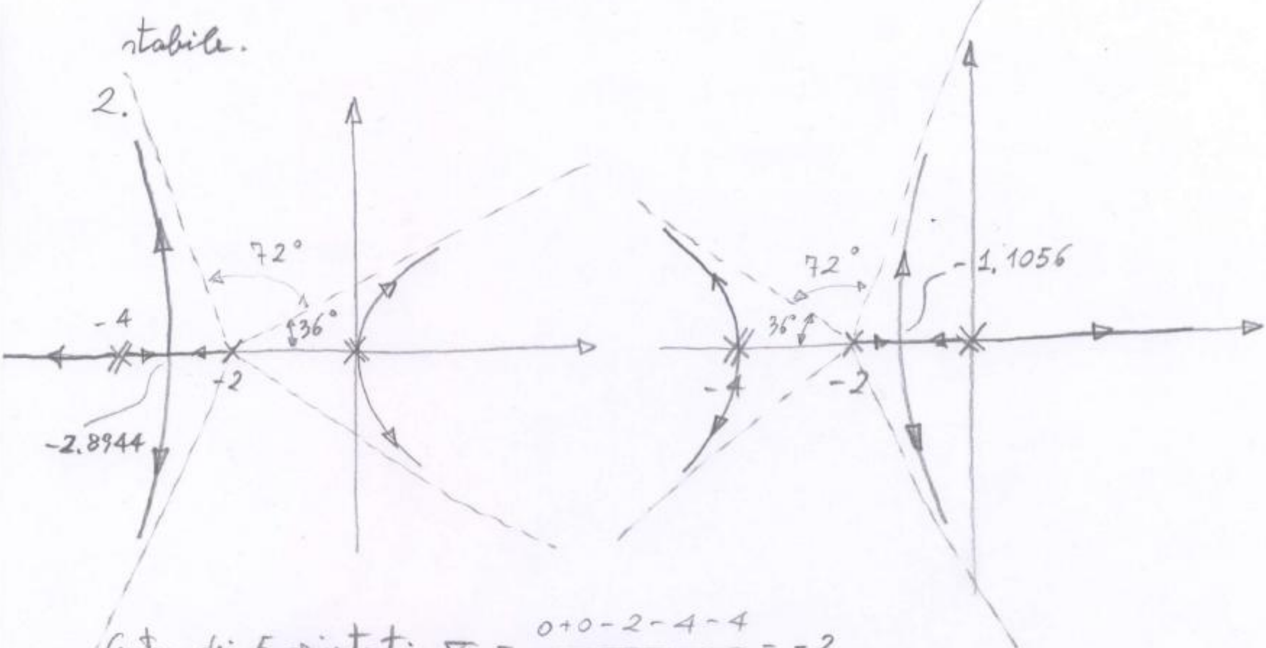
**7.**

1. $1 + K \dfrac{1}{s^2(s+2)(s+4)^2} = 0$

Il polinomio caratteristico è quindi $s^5+10s^4+32s^3+32s^2+K$.

Dalla nota proprietà che un polinomio è hurwitziano solo se tutti i suoi coefficienti sono (strettamente) positivi segue che $\forall K \in \mathbb{R}$ il sistema retroazionato non è asintoticamente stabile.

2.




Centro dei 5 asintoti $\sigma_a = \dfrac{0+0-2-4-4}{5} = -2$

Calcolo delle radici doppie : $\dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{2}{s+4} = 0$

$5s^2+20s+16=0$ da cui $s_{1,2} = -2.8944$ e $-1.1056$

**8**.

$$P(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$C(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$1 + CP = 0 \qquad 1 + \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 (s^2 + a_1 s + a_0)} = 0$$

$$s^3 (s^2 + a_1 s + a_0) + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

$$s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

$$P_c(s) \triangleq s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

poli ut. desiderati : $-1, -2, -4, -5 - 6$

$$P_d(s) = (s+1)(s+2)(s+4)(s+5)(s+6)$$
$$= (s^2 + 3s + 2)(s^2 + 9s + 20)(s+6)$$
$$= (s^4 + 9s^3 + 20s^2 + 3s^3 + 27s^2 + 60s$$
$$+ 2s^2 + 18s + 40)(s+6) =$$
$$= (s^4 + 12s^3 + 49s^2 + 78s + 40)(s+6) =$$
$$= s^5 + 12s^4 + 49s^3 + 78s^2 + 40s +$$
$$+ 6s^4 + 72s^3 + 294s^2 + 468s + 240 =$$
$$= s^5 + 18s^4 + 121s^3 + 372s^2 + 508s + 240$$

da $P_d(s) \equiv P_c(s) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 18, \quad a_0 = 121 \\ b_2 = 372, \; b_1 = 508, \; b_0 = 240 \end{cases}$ ok!

1. Si applichi un gradino $r(t) = 3 \cdot 1(t)$ al sistema retroazionato e si determini l'errore a regime $e_r$ $\left[ e_r := \lim_{t \to \infty} \left( r(t) - y(t) \right) \right]$ ed ~~il tem~~ una stima del tempo di assestamento

$e_r = 0$ perché è un sistema di tipo 3

$$T_a \simeq \frac{3}{G_0} = \frac{3}{1} \simeq 3 \text{ sec.}$$