Traccia delle soluzioni

A1.

$$Z_f = R + \frac{1}{sC} \qquad Z_{t,i} = 2R + \frac{R^2}{sL}$$

$$T(s) = -\frac{Z_f}{Z_{t,i}} = -\frac{R + \frac{1}{sC}}{2R + \frac{R^2}{sL}} = -\frac{1 + \frac{1}{sRC}}{2 + \frac{R}{sL}} =$$

$$= -\frac{s + \frac{1}{RC}}{2s + \frac{R}{L}} = -\frac{s + \frac{1}{RC}}{2\left(s + \frac{R}{2L}\right)}$$

Eq. differenziale:

$$2Dy + \frac{R}{L}y = -Du - \frac{1}{RC}u$$

Guadagno statico: $T(0) = -\frac{1}{RC} \cdot \frac{L}{R} = -\frac{L}{R^2C}$

zeri: $-\frac{1}{RC}$ poli: $-\frac{R}{2L}$

modi: $e^{-\frac{R}{2L}t}$

A2.

$$\begin{cases} m\,D^2 x_1 = -k x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\,D^2 x_2 = f - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (mD^2+k)\cdot \\ k\cdot \end{matrix} \begin{cases} k x_2 = m\,D^2 x_1 + 2k x_1 \\ (mD^2 + k)\,x_2 = f + k x_1 \end{cases}$$

$$(mD^2+k)(mD^2x_1 + 2kx_1) = kf + k^2 x_1$$

$$m^2 D^4 x_1 + 2km\,D^2 x_1 + km\,D^2 x_1 + 2k^2 x_1 = kf + k^2 x_1$$

$$\boxed{m^2 D^4 x_1 + 3km\,D^2 x_1 + k^2 x_1 = kf} \quad \text{Eq. diff.}$$

$$T(s) = \frac{k}{m^2 s^4 + 3km\,s^2 + k^2} \qquad \text{f.d.t.}$$

$$m^2 s^4 + 3km\,s^2 + k^2 = 0 \qquad s^2 = \frac{-3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4k^2m^2}}{2m^2} =$$

$$= \frac{-3k \pm \sqrt{5}\cdot k}{2m} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}$$

poli di Σ:

$$p_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}} \qquad p_{3,4} = \pm j\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}$$

modi di Σ:

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

più semplicemente

$$\operatorname{sen}\left(1{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_1\right),\ \operatorname{sen}\left(0{,}618\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + \varphi_2\right)$$

B1.

$Y(s)=\dfrac{s-2}{s(s+2)^3(s+1)}$.

Dallo sviluppo in fratti semplici:

$$Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+2)^3}+\frac{C}{(s+2)^2}+\frac{D}{s+2}+\frac{E}{s+1}$$

$$A=\left.\frac{s-2}{(s+2)^3(s+1)}\right|_{s=0}=-\frac{1}{4}$$

$$B=\left.\frac{s-2}{s(s+1)}\right|_{s=-2}=-2$$

$$E=\left.\frac{s-2}{s(s+2)^3}\right|_{s=-1}=3$$

L'ordine relativo di Y(s) è maggiore di uno:

$$\Rightarrow A+D+E=0\Rightarrow D=-\frac{11}{4}$$

$$C=\left.\frac{d}{ds}\left[\frac{s-2}{s(s+1)}\right]\right|_{s=-2}=-\frac{5}{2}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(t)=A+B\frac{1}{2}t^2e^{-2t}+Cte^{-2t}+De^{-2t}+Ee^{-t}\quad \text{per}\ \ t\geq 0$$

$$y(t)=-\frac{1}{4}-t^2e^{-2t}-\frac{5}{2}te^{-2t}-\frac{11}{4}e^{-2t}+3e^{-t}\quad \text{per}\ \ t\geq 0$$

Il grado relativo del sistema è $\rho=3$. Il segnale in ingresso $u(t)=1(t)\in PC^{\infty}$ e quindi $y(t)\in C^{\rho-1,\infty}=C^{2,\infty}$ (vedi le proprietà a pag. 29 della lezione n. 5 - 2008). D'altronde $y(t)\notin C^{3,\infty}$ in quanto $u(t)\notin C^{0,\infty}$, ne consegue $y(t)\in\overline{C^{2,\infty}}$, ovvero il grado massimo di continuità di $y(t)$ su $\mathbb{R}$ è uguale a 2.

B2.

$$Y(s) = G(s)L[4\sin(2t)] = \frac{8}{s+2}\cdot\frac{4\cdot 2}{s^2+4} = \frac{64}{(s+2)(s+j2)(s-j2)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+j2} + \frac{B^*}{s-j2}$$

$$A = (s+2)\left.\frac{64}{(s+2)(s^2+4)}\right|_{s=-2} = 8$$

$$B = (s+j2)\left.\frac{64}{(s+2)(s+j2)(s-j2)}\right|_{s=-j2} = -4+j4$$

Antitrasformando lo sviluppo in fratti semplici otteniamo:

$$y(t) = 8e^{-2t} + 2\left|-4+j4\right|\cos(-2t+\arg(-4+j4)) =$$

$$= 8e^{-2t} + 8\sqrt{2}\sin(2t-\pi/4)$$

C1.

Vedi le dispense delle lezioni.

C2.

$$f(t) = 2\cdot 1(t) + 4t^2\cdot 1(t-10)$$

$$D^* f(t) = D^*\{2\cdot 1(t)\} + D^*(4t^2)\cdot 1(t-10) +$$

$$+ 4t^2\cdot D^*\{1(t-10)\} =$$

$$= 2\delta(t) + 8t\cdot 1(t-10) + 4t^2\cdot\delta(t-10)$$

$$= 2\delta(t) + 8t\cdot 1(t-10) + 400\cdot\delta(t-10)$$

$$D f(t) = D^* f(t) \qquad \forall\, t \neq 0 \text{ e } t \neq 10.$$

La derivata (usuale) di f non esiste in $t=0$ e $t=10$.