Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

2.
Vedi dispense del corso:

Eq. differenziale: $D^3y + 4D^2y + 8Dy + 9y = 3D^2u + Du + 7u$

$$u \to \boxed{\Sigma} \to y$$

$$\mathcal{B} := \left\{ (u,y) \in PC^2 \times PC^3 : D^{*3}y + 4D^{*2}y + 8D^{*}y + 9y = 3D^{*2}u + D^{*}u + 7u \right\}$$

D^* ≡ operatore della derivata generalizzata.

Le relazioni fra i valori al tempo 0−

$y_-,\ Dy_-,\ D^2y_-;\ u_-,\ Du_-$

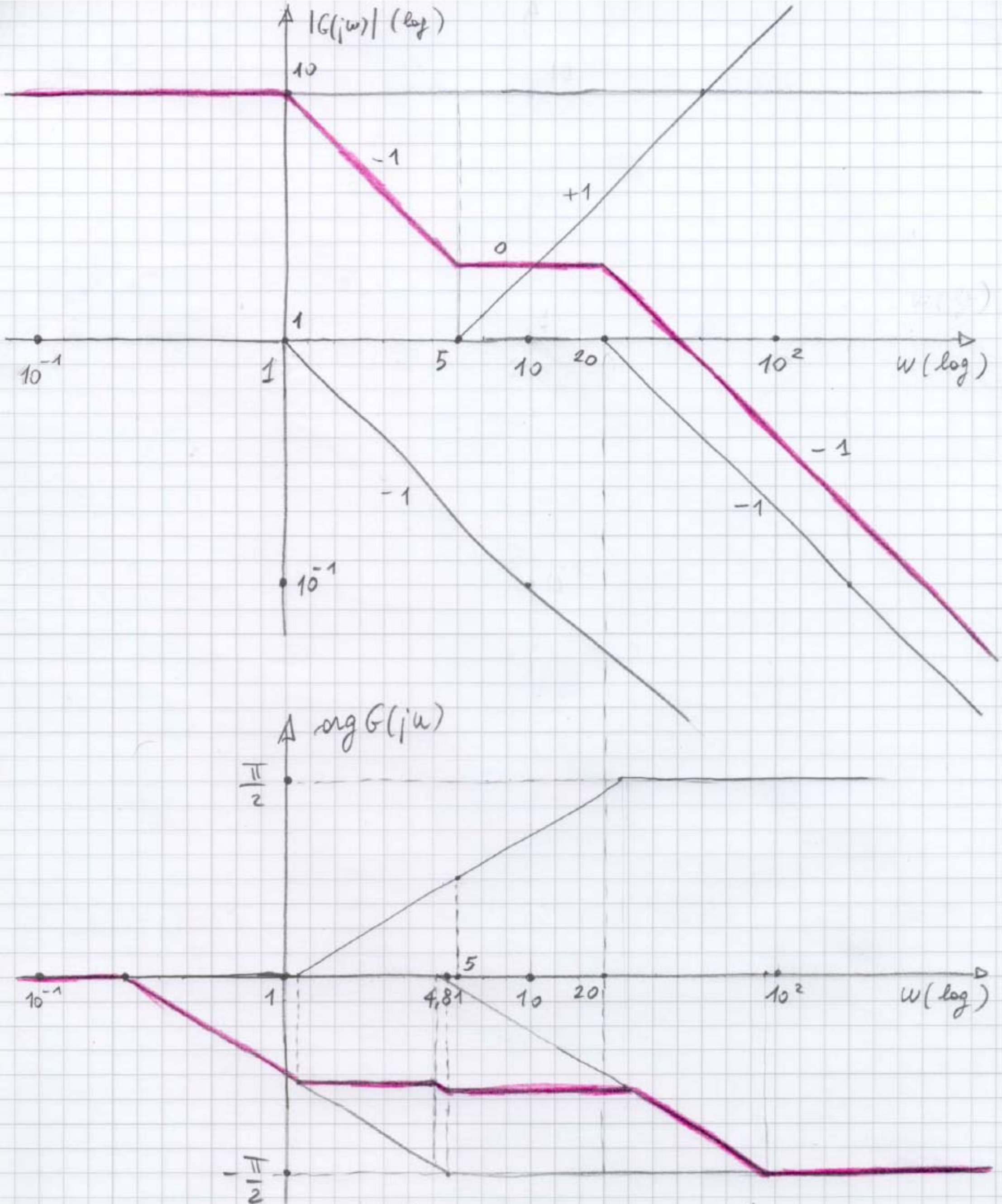
ed i valori al tempo 0+

$y_+,\ Dy_+,\ D^2y_+;\ u_+,\ Du_+$

sono deducibili uguagliando le espressioni impulsive dell'eq. differenziale generalizzata al tempo $t=0$.

$$\begin{cases} y_+ = y_- \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dy_+ - Dy_- \\ D^2y_+ - D^2y_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_+ - u_- \\ Du_+ - Du_- \end{bmatrix} \end{cases}$$

3.

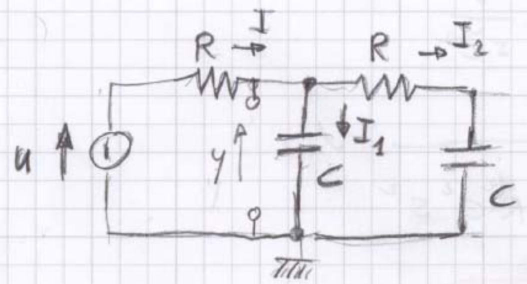


$$G(s) = 40\,\frac{5\left(1+\frac{1}{5}s\right)}{(1+s)\,20\left(1+\frac{1}{20}s\right)} = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}s}{(1+s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)}$$

$$G(j\omega) = 10\,\frac{1+\frac{1}{5}j\omega}{(1+j\omega)\left(1+\frac{1}{20}j\omega\right)}$$

4.

4



$$Y = \frac{1}{sC} I_1$$

$$I_1 = I \cdot \frac{R + \frac{1}{sC}}{R + \frac{2}{sC}}$$

$$Z_t = R + \frac{\frac{1}{sC} \cdot \left(R + \frac{1}{sC}\right)}{R + \frac{2}{sC}}$$

$$I = \frac{U}{Z_t} =$$

$$Y = \frac{1}{sC} \cdot \frac{R + \frac{1}{sC}}{R + \frac{2}{sC}} \cdot \frac{U}{R + \frac{\frac{1}{sC} \cdot \left(R + \frac{1}{sC}\right)}{R + \frac{2}{sC}}} =$$

$$= \frac{1}{sC} \cdot \frac{R + \frac{1}{sC}}{R\left(R + \frac{2}{sC}\right) + \frac{1}{sC}\left(R + \frac{1}{sC}\right)} \cdot U$$

$$Y = \frac{\frac{R}{sC} + \frac{1}{s^2C^2}}{R^2 + 2\frac{R}{sC} + \frac{R}{sC} + \frac{1}{s^2C^2}} \cdot U =$$

$$= \frac{\frac{R}{sC} + \frac{1}{s^2C^2}}{R^2 + 3\frac{R}{sC} + \frac{1}{s^2C^2}} U =$$

$$= \frac{1 + RCs}{1 + 3RCs + R^2C^2s^2} U$$

$$T \triangleq RC$$

$$G(s) = \frac{1 + Ts}{1 + 3Ts + T^2s^2}$$

eq. differenziale

$$T^2 D^2 y + 3 T Dy + y = T Du + u$$

$$T^2 s^2 + 3Ts + 1 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-3T \pm \sqrt{9T^2 - 4T^2}}{2T^2} = \frac{-3T \pm \sqrt{5T^2}}{2T^2}$$

$$= \frac{-3T \pm \sqrt{5}\,T}{2T^2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2T}$$

$$\text{modi} = \left\{ e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2T}t}, \; e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2T}t} \right\}$$

5.

1) $Du = -2e^{-t} \qquad D^2u = 2e^{-t} \qquad Dy = -2e^{-2t} \qquad D^2y = 4e^{-2t}$

$$4e^{-2t} + 4(-2e^{-2t}) + 4(e^{-2t}) =$$

$$= 2e^{-t} + 2(-2e^{-t}) + 2e^{-t} \qquad \text{OK! vera } \forall t<0$$

2) determinazione delle condizioni iniziali al tempo $t=0-$.

$$y(t) = e^{-2t} \Rightarrow y(0-) = 1$$

$$Dy = -2e^{-2t} \Rightarrow Dy(0-) = -2$$

$$u(t) = 2e^{-t} \Rightarrow u(0-) = 2$$

$$Du(t) = -2e^{-t} \Rightarrow Du(0-) = -2$$

$$s^2Y(s) - sy(0-) - Dy(0-) + 4\big(sY(s) - y(0-)\big) + 4Y(s) =$$

$$= s^2U(s) - su(0-) - Du(0-) + 2\big(sU(s) - u(0-)\big) + \cancel{4}\,U(s)$$

$$s^2Y(s) - s + 2 + 4\big(sY(s) - 1\big) + 4Y(s) =$$

$$= s^2U(s) - 2s + 2 + 2\big(sU(s) - 2\big) + U(s)$$

$$(s^2 + 4s + 4)\,Y(s) - s - \cancel{2} =$$

$$= (s^2 + 2s + 1)\,U(s) - 2s - \cancel{2}$$

$$(s^2+4s+4)\,Y(s) = (s^2+2s+1)\,U(s) - s$$

$$Y(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2+4s+4}\,U(s) - \frac{s}{s^2+4s+4}$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+2)^2} \cdot \frac{10}{s} - \frac{s}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{10(s+1)^2 - s^2}{s(s+2)^2} =$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_{21}}{(s+2)^2} + \frac{K_{22}}{s+2}$$

$$K_1 = \left. \frac{10(s+1)^2 - s^2}{(s+2)^2} \right|_{s=0} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$K_{21} = \left. \frac{10(s+1)^2 - s^2}{s} \right|_{s=-2} = \frac{10-4}{-2} = -3$$

$$K_1 + K_{22} = 9 \implies K_{22} = 9 - \frac{5}{2} = \frac{18-5}{2} = \frac{13}{2}$$

(OK! verificato con altro metodo)

$$Y(s) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s} - 3 \cdot \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{5}{2} - 3\,t\,e^{-2t} + \frac{13}{2} e^{-2t}}$$

6.

1)

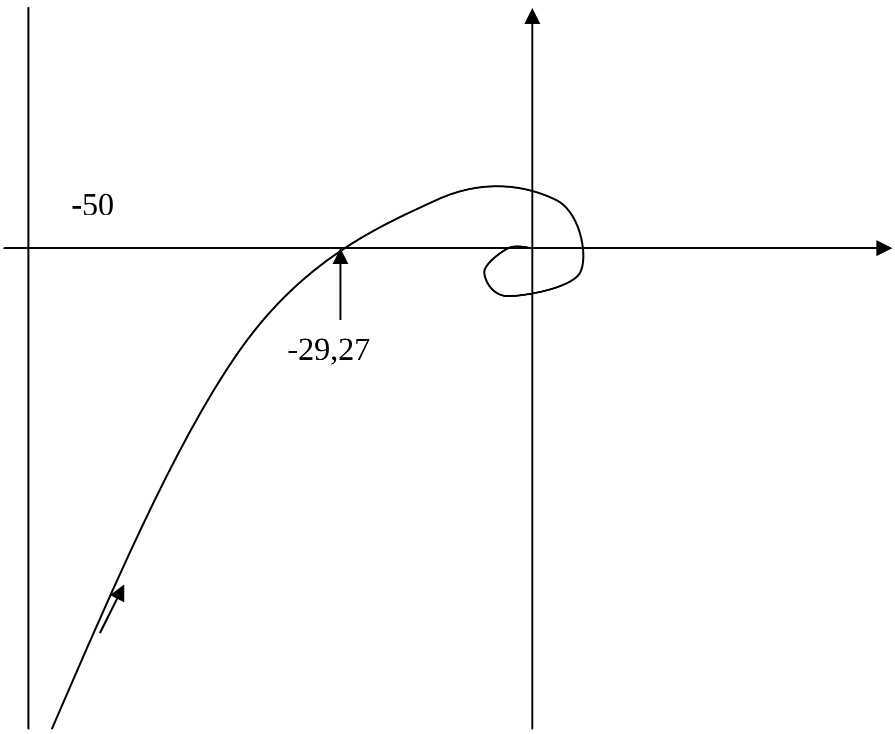
$$P(j\omega) = \frac{10(1-j\omega)^2}{(j\omega)(1+j\omega)^3}$$

$$\arg P(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 5 \text{ arctg } \omega$$

$$|P(j\omega)| = \frac{10}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

L'asintoto è verticale (il sistema è di tipo 2) e la sua ascissa è $\sigma_a = 10[(-1-1)-(1+1+1)] = -50$.

$$\omega \to \infty \qquad \arg P(j\omega) \to -2\pi - \pi$$



Calcolo intersezione con l'asse reale negativo:

$$\arg P(j\omega_p) = -\pi$$

$$5 \text{ arctg } \omega_p = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \text{ tg } \frac{\pi}{10} = 0,3249 \text{ rad}$$

$$\left|P(j\omega_p)\right| = 29,27 \quad \Rightarrow \quad P(j\omega_p) = -29,27$$

2) Considerato che P(s) non ha poli a parte reale positiva, il caso particolare del Criterio di Nyquist afferma che l'eq. 1 + P(s) = 0 ha tutte le radici a parte reale negativa se e solo se il diagramma polare completo non tocca né circonda il punto critico - 1. Dal diagramma sopra riportato risulta invece che il d.p.c. circonda 2 volte (in senso orario) il punto – 1. Si conclude quindi:

$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_+ = 2$$

$$\text{numero radici } \in j\mathbb{R} = 0$$

$$\text{numero radici } \in \mathbb{C}_- = 4 - 2 = 2$$

7.

1) L’eq. caratteristica è

$$1+K\frac{1}{s(s+4)^3}=0 \qquad K>0.$$

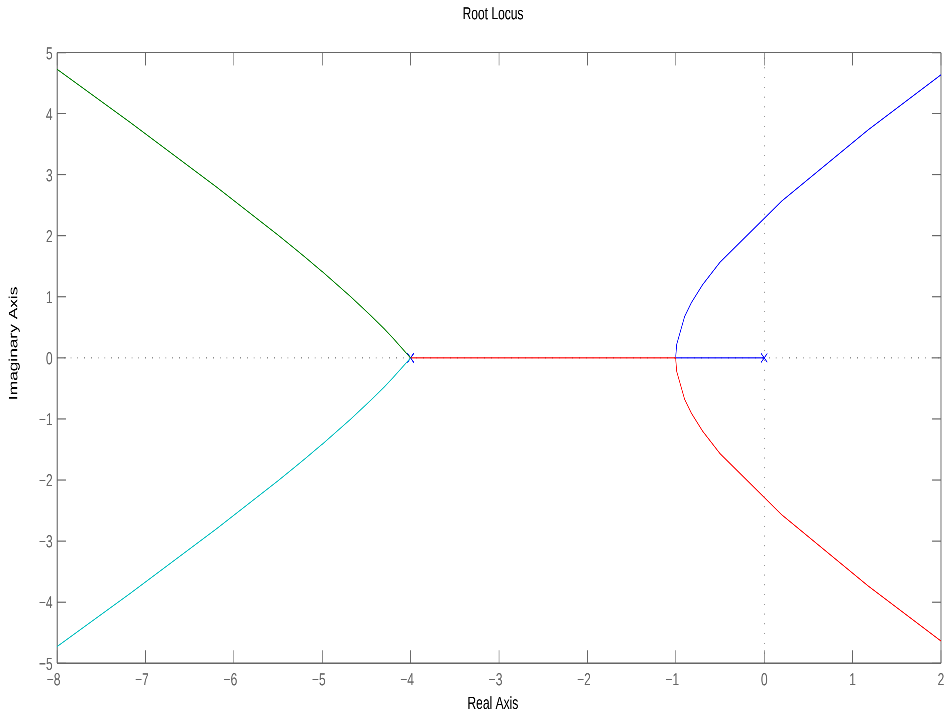
Il luogo è composto da quattro rami convergenti a quattro asintototi rettilinei con angoli rispetto all’asse reale di $+\frac{\pi}{4},+\frac{3}{4}\pi,-\frac{3}{4}\pi,-\frac{\pi}{4}$. Il centro degli asintoti è dato da

$$\sigma_a=\frac{0-4-4-4}{4}=-3$$

Il segmento dell’asse reale fra -3 e 0 appartiene al luogo ed in un suo punto interno si rivela una radice doppia determinabile risolvendo l’equazione:

$$\frac{1}{s}+\frac{3}{s+4}=0 \qquad \text{radice doppia in } s=-1$$

Il luogo è riportato in figura:



2) L’equazione caratteristica in forma polinomiale è

$$s(s+4)^3+K=0$$

$$s^4+12s^3+48s^2+64s+K=0$$

La tabella di Routh associata è

4	1	48	K
3	12	64	0
2	128	$3K$	0
1	$2048-9K$	0	
0	$3K$		

Considerato che $K>0$, l’applicazione del Criterio di Routh impone $2048-9K>0$. Quindi l’insieme dei valori positivi di K per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile è

$$K\in(0,\frac{2048}{9})\simeq(0,\ 227{,}56)$$

3) Dalla tabella di Routh si deduce l'equazione ausiliaria in corrispondenza del valore limite di $K\,(=2048/9)$:

$$128s^2+3\cdot\frac{2048}{9}=0$$

Le radici di questa equazione sono $s=\pm j\frac{4}{\sqrt{3}}\simeq\pm j2{,}309$. Quindi le intersezioni del luogo avvengono in $\pm j2{,}309$.

8.

$$C(s)=\frac{b_1 s+b_0}{s+a}$$

Eq. caratteristica $\quad 1+C(s)P(s)=0$

$$1+\frac{b_1 s+b_0}{s+a}\cdot\frac{1}{(s-1)^2}=0$$

$$(s+a)(s^2-2s+1)+b_1 s+b_0=0$$

$$s^3-2s^2+s+as^2-2as+a+b_1 s+b_0=0$$

$$P_c(s):=s^3+(a-2)s^2+(1-2a+b_1)s+a+b_0$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s):=\left[(s+1)^2+4\right](s+5)=$$
$$=\left[s^2+2s+1+4\right](s+5)=(s^2+2s+5)(s+5)=$$
$$=s^3+2s^2+5s+5s^2+10s+25$$

$$P_d(s)=s^3+7s^2+15s+25$$

Affinché la specifica 1) sia soddisfatta si impone

$$P_d(s)\equiv P_c(s)$$

$$\begin{cases} a-2=7 \\ 1-2a+b_1=15 \\ a+b_0=25 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a=9 & \\ -18+b_1=14 & b_1=32 \\ b_0=16 & \end{matrix}$$

$$C(s)=\frac{32s+16}{s+9}=32\cdot\frac{s+0{,}5}{s+9}$$

$$T_{ry}(s) = F \cdot \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

La specifica 2) è soddisfatta quando $T_{ry}(0) = 1$

$$F \cdot \frac{C(0)P(0)}{1 + C(0)P(0)} = 1$$

$$F \cdot \frac{16/9}{1 + \frac{16}{9}} = 1 \qquad F \cdot \frac{16}{25} = 1$$

$$F = \frac{25}{16} \cong 1{,}56$$