Tracce delle soluzioni

1. Vedi dispense del corso.

2. Vedi dispense del corso.

3.
Per $K = 0$ il sistema è asintoticamente stabile (anche se evidentemente la funzione di trasferimento fra r ed y è zero).

Sia $L(s) := KP(s)$ il guadagno di anello del sistema retroazionato. La risposta armonica di L è

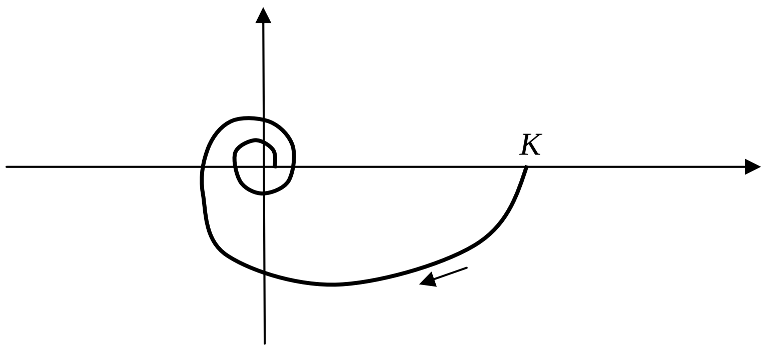
$$L(j\omega) = K\frac{1 - j\omega}{(1 + j\omega)^2}e^{-j\omega}$$

Modulo ed argomento di $L(j\omega)$ sono rispettivamente:

$$|L(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\arg L(j\omega) = -3\arctan\omega - \omega$$

Per $K > 0$ il diagramma polare di $L(j\omega)$ è qualitativamente il seguente:



Si determina la prima intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo:

$$\arg L(j\omega_p) = -\pi$$

$$3\arctan\omega_p + \omega_p = \pi$$

Si introduca $f(\omega) := 3\arctan\omega + \omega - \pi$ e si risolva con appropriati tentativi l'equazione $f(\omega_p) = 0$:

$$\omega_p = 1 \Rightarrow f = 0,2146$$

$$\omega_p = 0,9 \Rightarrow f = -0,0431$$

$$\omega_p = 0,92 \Rightarrow f = 0,0097$$

$$\omega_p = 0,91 \Rightarrow f = -0,0167$$

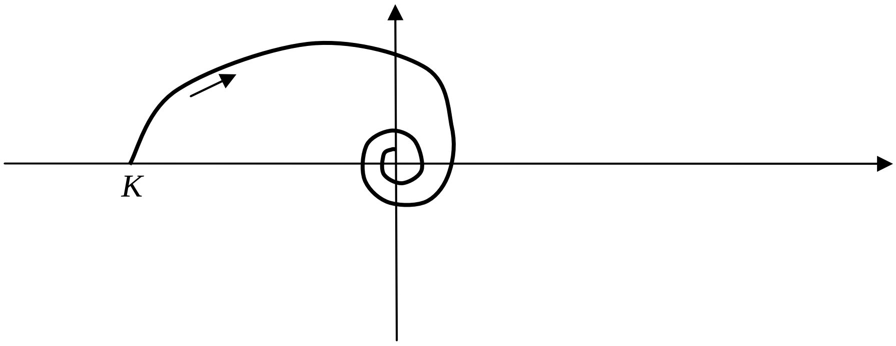
$$\omega_p = 0,917 \Rightarrow f = 0,0018$$

$$\Rightarrow \omega_p \cong 0,917 \text{ rad/sec}$$

Quindi $|L(j\omega_p)| = 0,737 \cdot K \quad \Rightarrow \quad L(j\omega_p) = -0,737 \cdot K$. Per il criterio di Nyquist il sistema è asintoticamente stabile se

$$-1 < -0,737 \cdot K \quad \Rightarrow \quad K < 1,36$$

Per $K < 0$ il diagramma polare di $L(j\omega)$ è qualitativamente il seguente:



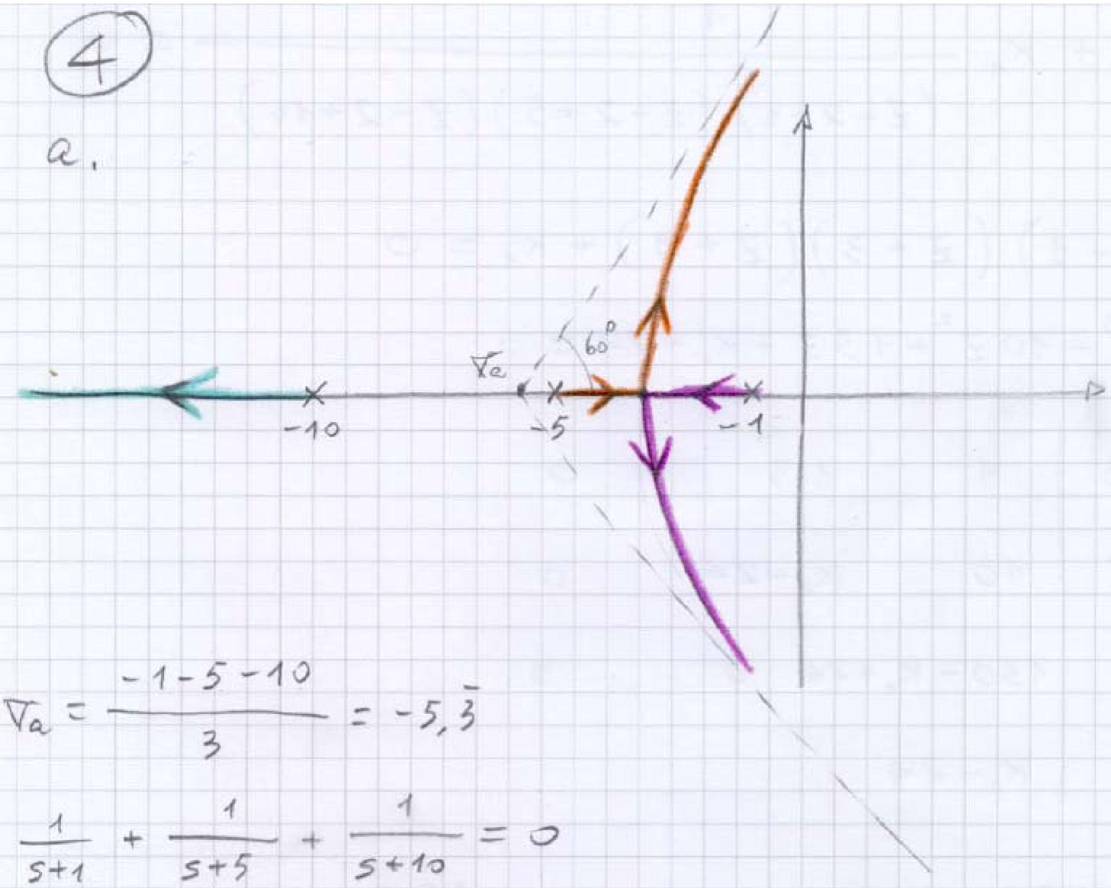
Per il criterio di Nyquist il sistema è asintoticamente stabile se $-1 < K$. In conclusione il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per

$$K \in (-1,\ 1,36)$$

4.

4

a.



$$\sigma_a = \frac{-1-5-10}{3} = -5,\bar{3}$$

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+5} + \frac{1}{s+10} = 0$$

$$(s+5)(s+10) + (s+1)(s+10) + (s+1)(s+5) = 0$$

$$3s^2 + 32s + 65 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \begin{cases} -2,7299 \\ -7,9367 \text{ (da scartare)} \end{cases}$$

b. Cambio di variabile complessa $z = s + 2$

$s = z - 2$

$$1 + K_1 \frac{1}{(s+1)(s+5)(s+10)} = 0 \quad \text{eq. carat.}$$

$$1 + K_1 \cdot \frac{1}{(z-2+1)(z-2+5)(z-2+10)} = 0$$

$$(z-1)(z+3)(z+8) + K_1 = 0$$

$$z^3 + 10z^2 + 13z + K_1 - 24 = 0$$

3	1	13	0
2	10	$K_1 - 24$	0
1	$130 - K_1 + 24$	0	0
0	$K_1 - 24$		

$$\begin{cases} 154 - K_1 > 0 & K_1 < 154 \\ K_1 - 24 > 0 & K_1 > 24 \end{cases}$$

Quindi $K_1 \in [24, 154]$

c.

$$1 + K_1 G_1(s) = 0$$

$$K_1^* \Rightarrow \quad 1 + K_1^* G_1(-2{,}7299) = 0$$

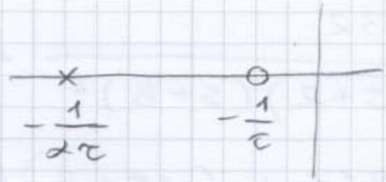
$$K_1^* = -\frac{1}{G_1(-2{,}7299)} =$$

$$= -(s+1)(s+5)(s+10)\Big|_{s=-2{,}7299} = 28{,}55$$

5.

5

$$C(s) = K\,\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$$



$$L(s) := C(s)\,P(s)$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} L(s) = K \cdot \frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{2} \cdot 8^2} = \frac{5K}{64}$$

$$e_r = \frac{1}{1+K_p} \qquad e_r = 0{,}05 = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \quad K_p = 19 \qquad \frac{5K}{64} = 19 \qquad K = \frac{1216}{5} = 243{,}2$$

progetto per cancellazione polo-zero ammissibile:

$$-\frac{1}{\tau} = -2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{2}$$

$$L(s) = \frac{1216}{5} \cdot \frac{1+\frac{1}{2}s}{1+\alpha\frac{1}{2}s} \cdot \frac{10}{(s+2)(s+8)^2} =$$

$$= \frac{1216}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{s+2}}{\alpha s+2} \cdot \frac{\cancel{10}^{\,2}}{\cancel{(s+2)}(s+8)^2} =$$

$$= \frac{2432}{(\alpha s+2)(s+8)^2}$$

Si impone che l'eq. $L(s;\alpha) + \frac{1}{2} = 0$ abbia radici puramente immaginarie. Se questo è possibile significa che il diagramma polare del guadagno di anello interseca l'asse reale in $-\frac{1}{2}$ e quindi si ottiene la stabilità asintotica del sistema retroazionato (dal criterio di Nyquist) con $M_A = 2$.

$$\frac{2432}{(\alpha s+2)(s+8)^2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$4864 + (\alpha s+2)(s^2+16s+64) = 0$$

$$\alpha s^3 + (16\alpha+2)s^2 + (64\alpha+32)s + 4992 = 0$$

3	α	$64\alpha+32$	0
2	$16\alpha+2$	4992	0
1	$f(\alpha)$	0	

$$f(\alpha) = (16\alpha+2)(64\alpha+32) - 4992\cdot\alpha =$$

$$= 1024\alpha^2 - 4352\alpha + 64 = 0$$

$\alpha =$ 4,2352 è da scartare perchè $\alpha \in (0,1)$

$\alpha =$ 0,0148