Tracce delle soluzioni

1.
Vedi dispense del corso.

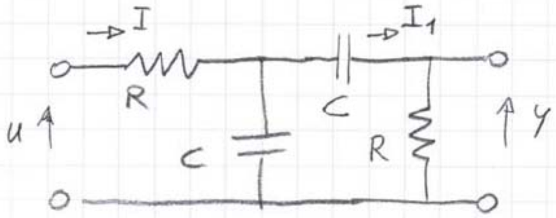
2.
Vedi dispense del corso.

3.
Vedi dispense del corso.

4.

4

a.



$$Z = R + \frac{\frac{1}{sC}\left(R + \frac{1}{sC}\right)}{R + \frac{2}{sC}}$$

$$I = \frac{U}{Z} \qquad I_1 = I \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{2}{sC}}$$

$$Y = R\,I_1 = R\,\frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{2}{sC}} \cdot \frac{U}{R + \frac{\frac{1}{sC}\left(R + \frac{1}{sC}\right)}{R + \frac{2}{sC}}}$$

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{RCs}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1} \quad ; \quad T \triangleq RC$$

$$G(s) = \frac{Ts}{T^2s^2 + 3Ts + 1}$$

b. $T^2s^2 + 3Ts + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{T}$

$$\text{modi} = \left\{ e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2T} \cdot t} \, , \, e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2T} \cdot t} \right\}$$

Il guadagno statico è $G(0) = 0$

c. $T^2D^2y + 3TDy + y = TDu$

5.

5 a. $\mathcal{L}[g_s(t)] = G(s) \cdot \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}[g_s(t)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$G(s) = \frac{1}{2} + \frac{s}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{s+2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$$

$$G(s) = 2 \cdot \frac{s + 1/2}{(s+1)(s+2)}$$

b. $u(t) = 1(t) + t \cdot 1(t)$, $U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \cdot \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) = \frac{2s+1}{\cancel{(s+1)}(s+2)} \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s^2}$$

$$= \frac{2s+1}{s^2(s+2)} = \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_{11} = \left. \frac{2s+1}{s+2} \right|_{s=0} = \frac{1}{2} \qquad K_2 = \left. \frac{2s+1}{s^2} \right|_{s=-2} = -\frac{3}{4}$$

$$K_{12} + K_2 = 0 \implies K_{12} = \frac{3}{4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+2}$$

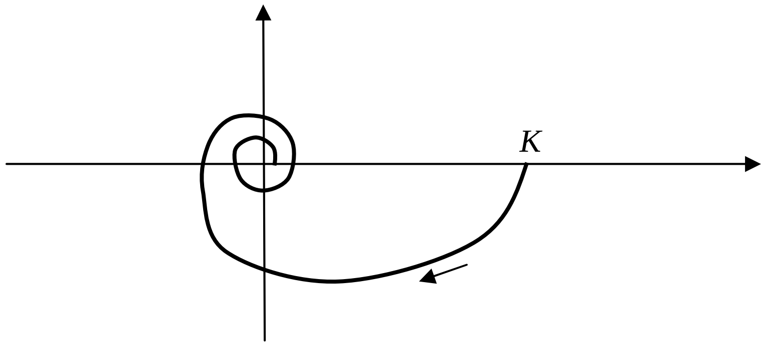
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \left(\frac{1}{2} t + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} e^{-2t} \right) \cdot 1(t)$$

6.

a. Approccio con un metodo esatto (Criterio di Nyquist).
Dal testo si ricava immediatamente che la risposta armonica del guadagno di anello è data da

$$F(j\omega)=\frac{Ke^{-j2\omega}}{(1+j\omega)(1+j4\omega)}.$$

L'argomento di tale funzione di risposta armonica sarà espresso dalla relazione $\arg(F(j\omega))=-2\omega-\arctan(\omega)-\arctan(4\omega)$. Per $K>0$ il diagramma polare di $F(j\omega)$ è qualitativamente il seguente:



Si determina la prima intersezione del diagramma polare con l'asse reale negativo. Si cerchi pertanto il valore di ω_p per il quale è soddisfatta la relazione

$$-2\omega_p-\arctan(\omega_p)-\arctan(4\omega_p)=-\pi .$$

Non esistendo soluzioni in forma chiusa si determina per tentativi una soluzione approssimata.

$$f(\omega_p):=2\omega_p+\arctan(\omega_p)+\arctan(4\omega_p)-\pi$$

$$f(\omega_p)=0$$

ω_p	$f(\omega_p)$
1	$0,96$
$0,5$	-0.57
$0,7$	0.096
$0,69$	0.065

ω_p	$f(\omega_p)$
$0,68$	0.034
$0,67$	0.00237
$0,66$	-0.02951

$\Rightarrow \omega_p \cong 0{,}67$ rad/s

Il modulo della $F(j\omega)$ calcolato per $\omega=\omega_p$ è espresso dalla relazione

$$\left|F(j\omega_p)\right|=\frac{K}{\sqrt{1+\omega_p^2}\sqrt{1+16\omega_p^2}}=\frac{K}{3,44}.$$

Per il Criterio di Nyquist il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se è verificata la disuguaglianza $\left|F(j\omega_p)\right|<1$. Quindi concluderemo che il sistema sarà asintoticamente stabile per i valori $0<K<3.44$ (si ricordi che la condizione $K>0$ era imposta dal testo del problema).

b. Approccio con un metodo approssimato.
Rappresentiamo il ritardo finito tramite uno sviluppo di Padé del primo ordine

$$e^{-t_0 s}=\frac{1-\dfrac{t_0}{2}s}{1+\dfrac{t_0}{2}s}\quad\Rightarrow\quad e^{-2s}=\frac{1-s}{1+s}$$

e sostituiamo questa relazione nella relazione della $F(s)$

$$F(s)=\frac{Ke^{-2s}}{(1+s)(1+4s)}\cong\frac{(1-s)K}{(1+s)^2(1+4s)}.$$

Studiamo la stabilità asintotica mediante il criterio di Routh

$$1+\frac{(1-s)K}{(1+s)^2(1+4s)}=0$$

$$(1+s)^2(1+4s)+(1-s)K=0$$

$$(1+2s+s^2)(1+4s)-sK-K=0$$

$$4s^3+9s^2+(6-K)s+K+1=0$$

Da quest'ultima equazione è possibile scrivere la tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 4 & 6-K \\ 2 & 9 & K+1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & K+1 & \end{array}$$

con $\alpha=9(6-K)-4(K+1)=50-13K$. Il sistema sarà asintoticamente stabile se $\alpha>0$ ovvero se

$$50-13K>0 \quad \Rightarrow \boxed{K<\frac{50}{13}=3.84}\ .$$

La condizione $K+1>0$ non è influente in quanto si è imposto che $K>0$.

In conclusione otteniamo un intervallo di valori di K più ampio rispetto a quello determinato al punto precedente ma sul quale non possiamo fare affidamento in quanto il metodo utilizzato è intrinsecamente approssimato (l'approssimante di Padé del primo ordine introdotta è una approssimazione grossolana del ritardo finito).

7.

⑦

a. $$1 + K \frac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = 0 \quad , K>0 \, , \text{ poli: } 0, -2 \pm j$$

Sono presenti tre asintoti con angoli $+60°, +180°, -60°$ e centro in $\sigma_a = -\frac{4}{3} = -1,\bar{3}$.

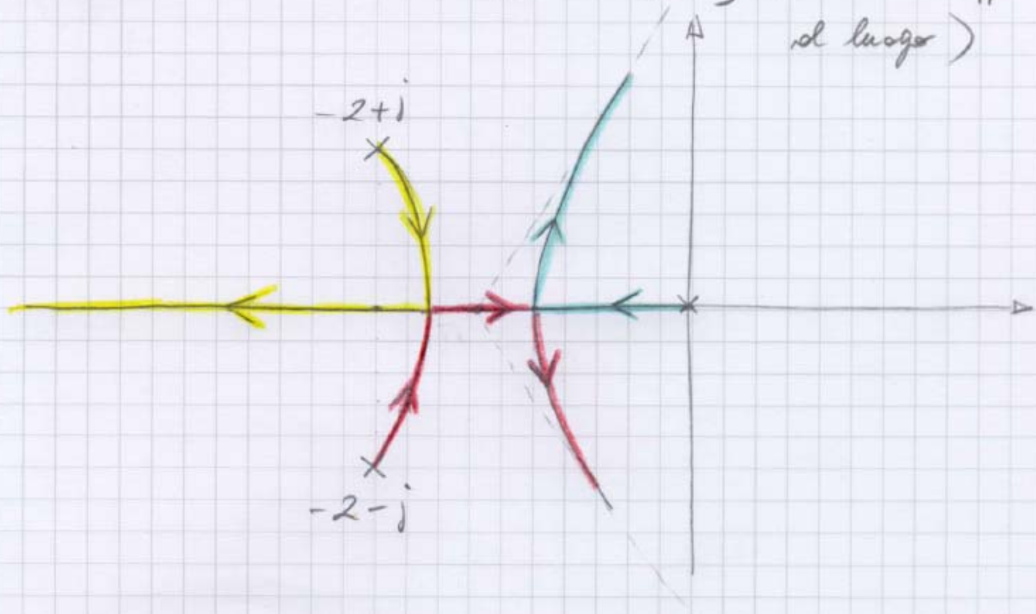
Il semiasse reale negativo appartiene al luogo. L'angolo di partenza dal polo 0 è $+180°$, l'angolo di partenza dal polo $-2+j$ è φ:

$$\varphi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2 \right) = -\operatorname{arctg} 2 = -63{,}43°$$

l'angolo di partenza dal polo $-2-j$ è $+63{,}43°$

Calcolo delle radici doppie: $\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2+j} + \frac{1}{s+2-j} = 0$

da cui $3s^2 + 8s + 5 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1, -\frac{5}{3}$ (entrambi app. al luogo)



b. Dal luogo delle radici si evince che il guadagno ottimo K^* corrisponde alla radice doppia -1:

$$1 + K^* \frac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]}\Bigg|_{s=-1} = 0$$

$$\Rightarrow K^* = 2$$

c. $e_r = \dfrac{5}{K_r}$, $\quad K_r = \lim_{s \to 0} s \dfrac{K^*}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = \dfrac{2}{5}$

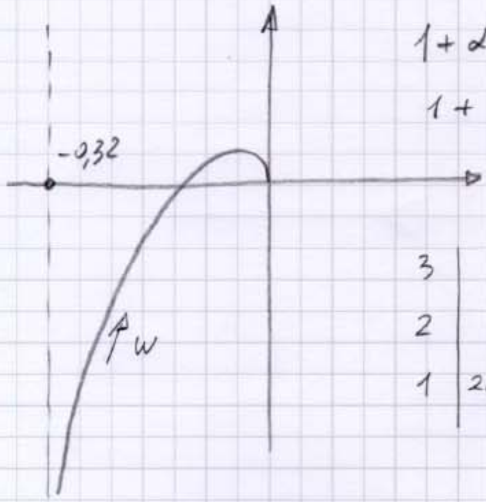
$$e_r = \frac{25}{2} = 12,5$$

d. $$L(s) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s\left(1 + \frac{4}{5}s + \frac{s^2}{5}\right)}$$

$$L(j\omega) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(j\omega)\left(1 - \frac{\omega^2}{5} + j\frac{4}{5}\omega\right)}$$

$$\sigma_a = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{25} = -0,32$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \arg L(j\omega) = -3\frac{\pi}{2}$$



$1 + \alpha L(s) = 0$ abbia radici puram. immaginarie

$1 + \alpha \cdot \dfrac{2}{s\left[(s+2)^2+1\right]} = 0$, $\quad \beta \triangleq 2\alpha$

$$s^3 + 4s^2 + 5s + \beta = 0$$

3	1	5	0
2	4	β	0
1	$20-\beta$	0	

$20 - \beta = 0 \quad \beta = 20$

$\Rightarrow \alpha = 10$

Intersezione in $-\dfrac{1}{\alpha} = -\dfrac{1}{10}$

$$\Rightarrow M_A = 10$$

8.

Affinché sia soddisfatta la specifica 1 deve valere

$T_{dy}(0) = 0$, $T_{dy}(s) = \dfrac{1}{1+L(s)}$, $L(s) := C(s)P(s)$

Quindi $L(0) = \infty \implies C(0) = \infty$

Questa condizione è soddisfatta quando il controllore ha un polo semplice nell'origine. D'altronde questa condizione soddisfa anche la specifica 3.

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s}$$

$1 + C(s)P(s) = 0 \qquad 1 + \dfrac{b_1 s + b_0}{s} \cdot \dfrac{4}{s+2} = 0$

$s(s+2) + 4(b_1 s + b_0) = 0$

$s^2 + 2s + 4b_1 s + 4b_0 = 0 \qquad s^2 + (4b_1 + 2)s + 4b_0 = 0$

$P_c(s) := s^2 + (4b_1 + 2)s + 4b_0$

$P_c(s)$ è il polinomio caratteristico associato al control. scelto.

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$P_d(s) := (s+4)(s+5) = s^2 + 9s + 20$$

Si impone $\quad P_c(s) \equiv P_d(s)$

$$\begin{cases} 4b_1 + 2 = 9 & \Rightarrow 4b_1 = 7 \qquad b_1 = \frac{7}{4} \\ 4b_0 = 20 & \qquad b_0 = 5 \end{cases}$$