Parte A

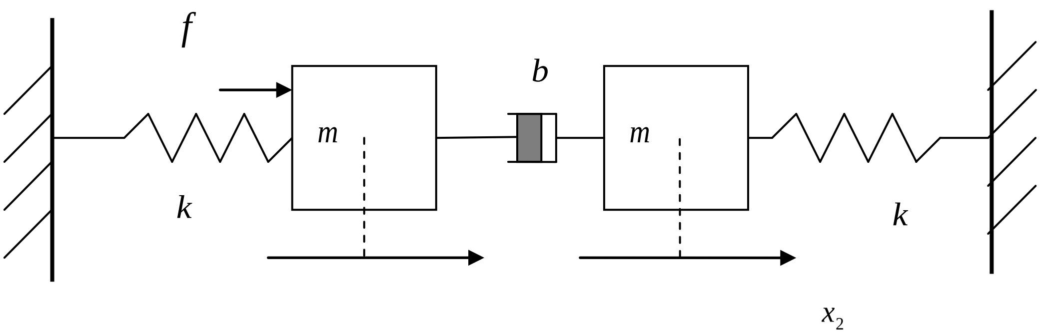
1. [punti 4]
Si consideri un sistema dinamico orientato da u (ingresso) ad y (uscita) e descritto dall'equazione differenziale $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u(t)$. Sia $(u, y) \in \mathcal{B}^*$ con $u(t) = 0,\ y(t) = 0\ \forall t < 0$. Si dimostri che

1. $(D^* u, D^* y) \in \mathcal{B}^*$
2. $\left(\int_{0-}^{t} u(v)dv, \int_{0-}^{t} y(v)dv \right) \in \mathcal{B}^*$

2. [punti 4]
Introdurre e definire la stabilità BIBO (bounded-input bounded output) per un sistema dinamico lineare e stazionario. Enunciare e dimostrare il teorema che indica la relazione fra la stabilità BIBO e la risposta all'impulso.

3. [punti 3]
a. Enunciare e dimostrare il teorema della trasformata di Laplace dell'integrale.
b. Enunciare e dimostrare il teorema della trasformata di Laplace della traslazione nel tempo.

4. [punti 6]
Sia assegnato il sistema meccanico vibrante di figura



caratterizzato da due molle di costante elastica k e due corpi di massa m accoppiati da uno smorzatore viscoso di coefficiente b. Il corpo di sinistra sia soggetto ad una forza f e le posizioni delle due masse siano descritte dalle variabili x_1 e x_2 (quando il sistema è in quiete $x_1 = x_2 = 0$).

a) Determinare le equazioni differenziali che descrivono il moto delle due masse.
b) Determinare l'equazione differenziale che caratterizza il sistema vibrante (denominato Σ) orientato dall'ingresso f all'uscita x_2.
c) Scrivere il polinomio caratteristico e la funzione di trasferimento di Σ.
d) Dimostrare con i metodi e teoremi della tabella di Routh che Σ è **semplicemente stabile** per qualsivoglia valore dei parametri m, k, b (tutti positivi).
e) Giustificare con un ragionamento fisico il motivo per cui Σ, nonostante la presenza di un elemento dissipativo (lo smorzatore viscoso), **non è asintoticamente stabile**.

Parte B

5. [punti 4]

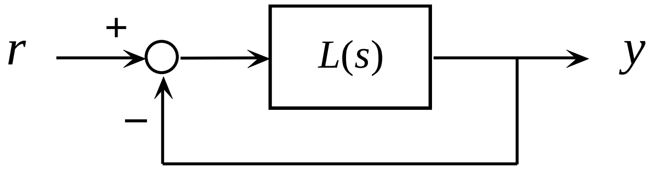
Determinare, a partire da condizioni iniziali nulle, la risposta in uscita $y(t)$ per $t>0$ del sistema con funzione di trasferimento

$$G(s)=\frac{8}{s+2}$$

al segnale armonico in ingresso $u(t)=4\sin(2t)\cdot 1(t)$.

6. [punti 4]

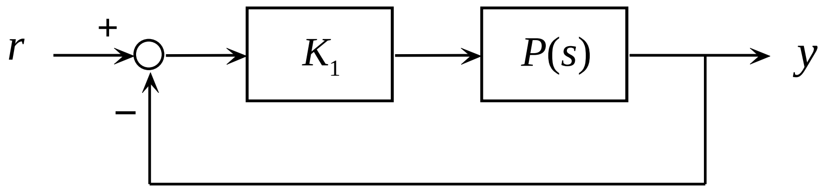
Sia dato il seguente sistema retroazionato



dove $L(s)=8\dfrac{1-s}{(s+2)^3}$.

a) Tracciare il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $L(s)$ determinando in particolare l'intersezione con l'asse reale negativo.
b) Dimostrare mediante il criterio di Nyquist che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile e determinare il corrispondente margine di ampiezza M_A.

7. [punti 6] Sia dato il sistema in retroazione di figura



dove $P(s)=\dfrac{\left[(s+2)^2+4\right]}{s(s+4)^2}$.

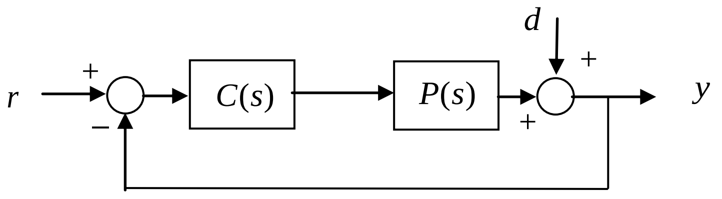
a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K_1>0$ (luogo diretto) e $K_1<0$ (luogo inverso) determinando in entrambi i luoghi gli asintoti, le eventuali radici doppie e gli angoli di arrivo.

b. Determinare i valori di $K_1\in\mathbb{R}$ per i quali il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

c. Determinare il valore di K_1 che massimizza il grado di stabilità del sistema retroazionato: $K_1^*=\arg\max_{K_1\in\mathbb{R}} G_s(K_1)$.

N.B.: L'equazione che determina le radici doppie al punto **a** è equivalente ad un'equazione polinomiale di terzo grado che ammette una sola radice reale. Questa venga stimata con una procedura numerica ed una precisione di circa l'1%.

8. **[punti 5]**
Sia dato il seguente sistema



dove $P(s)=\dfrac{9}{s+5}$.

Determinare un controllore proprio di ordine minimo $C(s)$ affinché le seguenti specifiche siano soddisfatte:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo composito $d(t)=5+11\cdot\cos(3t+2)$;
2. costante di velocità $K_v=4$;
3. sistema retroazionato asintoticamente stabile con tre poli dominanti in $-2,-2\pm j$.