Parte A

1. [punti 3] Dato un sistema dinamico lineare descritto dall'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{*i} y = \sum_{i=0}^{m} b_i D^{*i} u$$

si denoti con $\mathcal{B}^*$ l'estensione impulsiva dell'insieme dei behaviours.

Si dimostri la seguente proprietà:

Sia $(u, y) \in \mathcal{B}^*$ con $u(t)$ azione forzante ed $y(t)$ risposta forzata.

Segue $\left(\int_{0-}^{t} u(v)dv, \int_{0-}^{t} y(v)dv \right) \in \mathcal{B}^*$.

2. [punti 3]

Dato un sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$, $\omega_n > 0$, $\delta \in (0,1)$ sia noto che la risposta al gradino unitario è esprimibile come:

$$g_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - Ae^{-\delta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

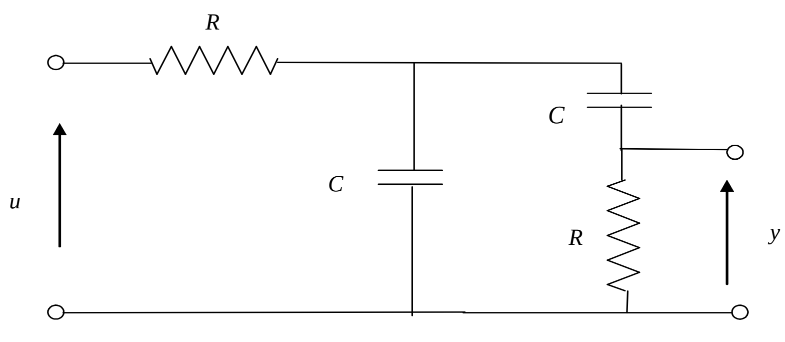
$$\omega := \omega_n\sqrt{1-\delta^2} \qquad A := \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$\varphi := \arccos(\delta) \qquad \left(= \operatorname{arcsen}\sqrt{1-\delta^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} \right)$$

Dedurre l'espressione della massima sovraelongazione S.

3. [punti 4]
Enunciare il Criterio di Nyquist (sia il caso generale che quello particolare) avendo cura di definire i concetti e le premesse teoriche sui quali si basa. Riportare inoltre una dimostrazione di tale criterio.

4. [punti 5]
Il seguente schema elettrico definisca un sistema dinamico Σ orientato da u, tensione di ingresso, ad y, tensione d'uscita (si introduca il parametro $T \triangleq RC$).



a. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ.
b. Determinare modi e guadagno statico di Σ.
c. Scrivere l'equazione differenziale che descrive il comportamento di Σ.

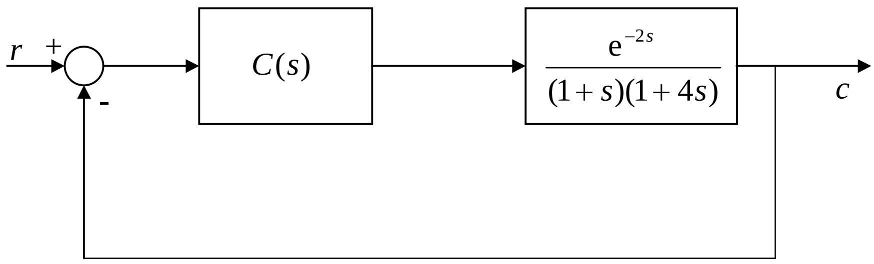
Parte B

5. [punti 5] Da una elaborazione di dati sperimentali su di un sistema dinamico è nota la risposta al gradino unitario $g_s(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$.

a) Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema esprimendola nella forma standard con poli e zeri.

b) Determinare la risposta forzata $y(t),\ t \geq 0$ del sistema al segnale di ingresso $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1+t & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$.

6. [punti 5] Sia assegnato il seguente sistema retroazionato

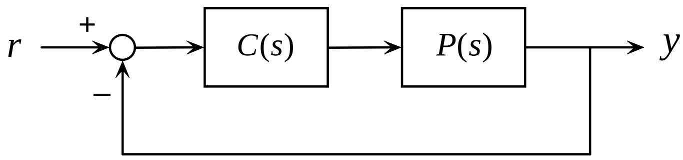


dove $C(s) = K > 0$ è un controllore proporzionale.

a. Si determini utilizzando il criterio di Nyquist l'insieme dei valori di $K > 0$ che assicurino la stabilità asintotica del sistema retroazionato.

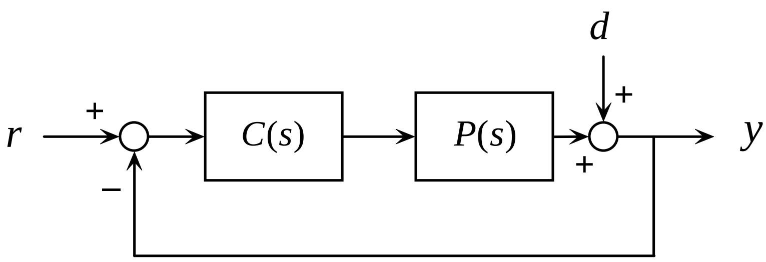
b. Si sostituisca il ritardo finito e^{-2s} con una approssimante di Padè del primo ordine e si determini l'insieme dei valori di $K > 0$ che assicurino la stabilità asintotica del sistema retroazionato (a tal fine si utilizzi il criterio di Routh). Confrontare e discutere i risultati ottenuti ai punti a e b.

7. [punti 7] Sia dato il sistema in retroazione di figura dove $P(s) = \dfrac{1}{s\left[(s+2)^2+1\right]}$ e $C(s) = K \in \mathbb{R}$..



a. Tracciare il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato per $K > 0$, determinando in particolare gli asintoti, le radici doppie e gli angoli di partenza del luogo.
b. Determinare il guadagno ottimo K^* del controllore affinché il grado di stabilità del sistema retroazionato sia massimo $\left[K^* = \arg\max_{K\in\mathbb{R}} G_s(K)\right]$.
c. Per il controllore progettato al punto b precedente $C(s) = K^*$ determinare l'errore a regime e_r in risposta alla rampa $r(t) = 5 \cdot t \cdot 1(t)$.
d. Per il controllore progettato al punto b precedente $C(s) = K^*$ tracciare il diagramma polare associato al guadagno di anello $L(s) := C(s)P(s)$ determinando l'asintoto verticale del diagramma. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_A del sistema retroazionato.

8. **[punti 4]** Sia dato lo schema di sistema di controllo di figura



dove $P(s) = \dfrac{4}{s+2}$. Determinare un controllore $C(s)$ di ordine minimo affinché il sistema di controllo soddisfi le seguenti specifiche:

1. reiezione infinita asintotica al disturbo a gradino $d(t) = 3 \cdot 1(t)$;
2. sistema retroazionato con poli dominanti in $-4,\ -5$;
3. l'errore a regime in risposta ad un gradino del riferimento sia nullo.